

Cinemática 1D. → Partícula se mueve a lo largo de 1 eje.

Desplazamiento: $\Delta x = x_f - x_i$

Velocidad media: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

Aceleración media: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

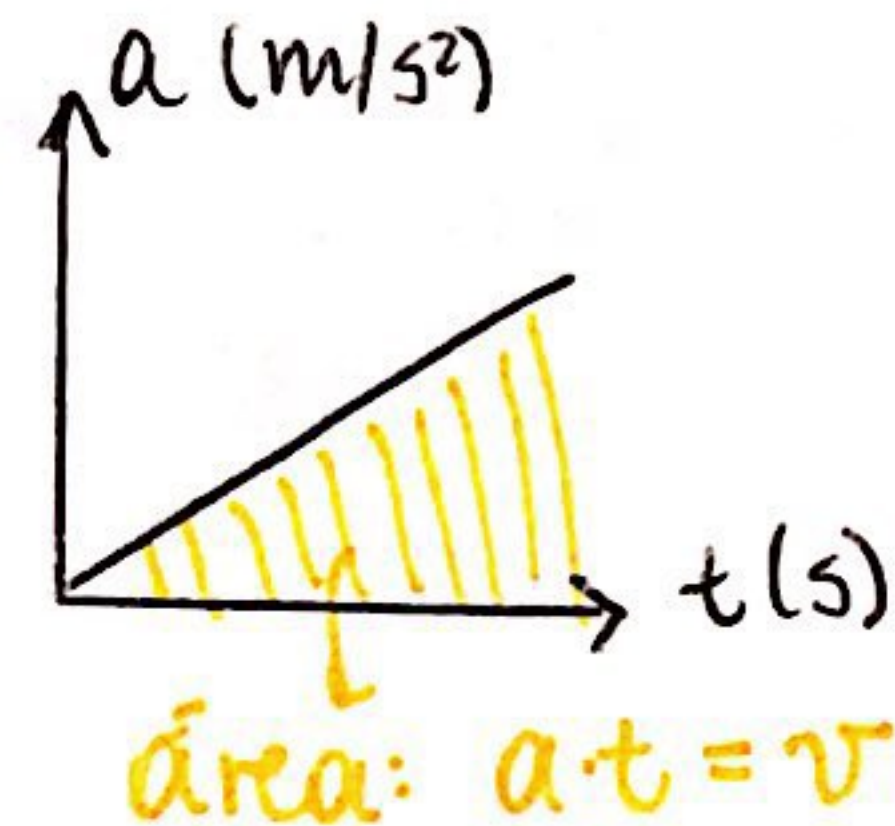
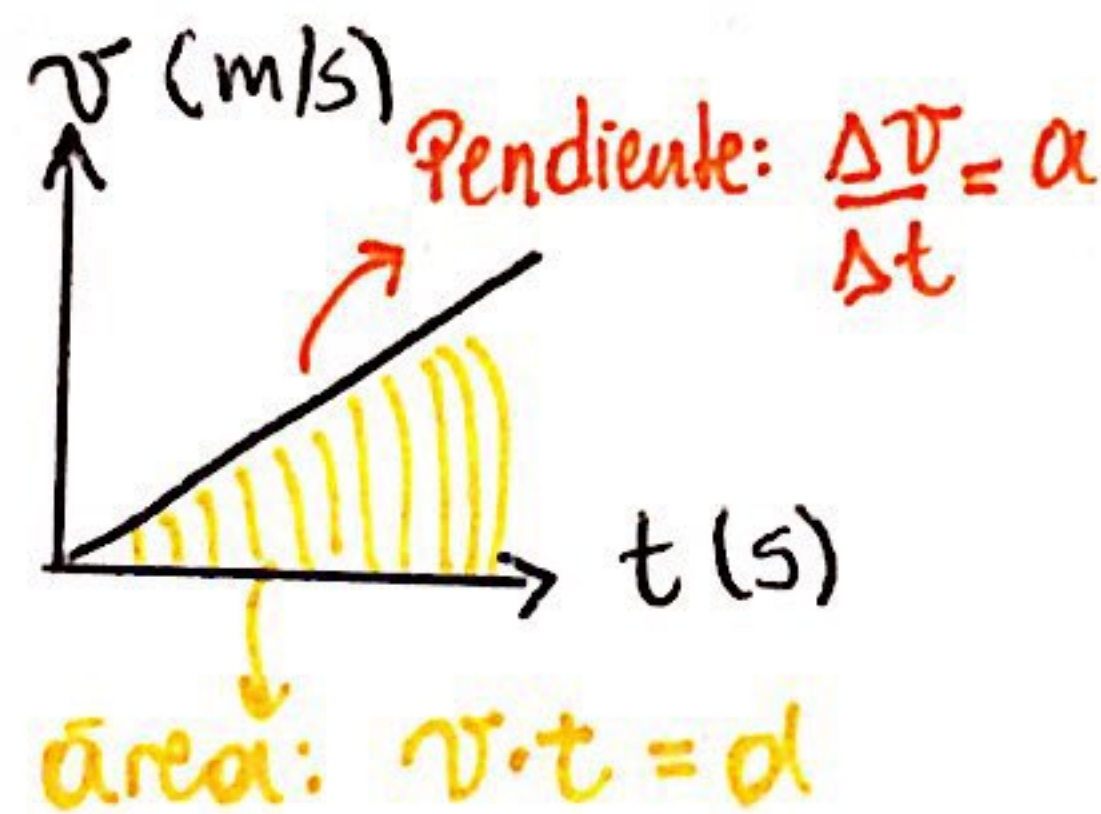
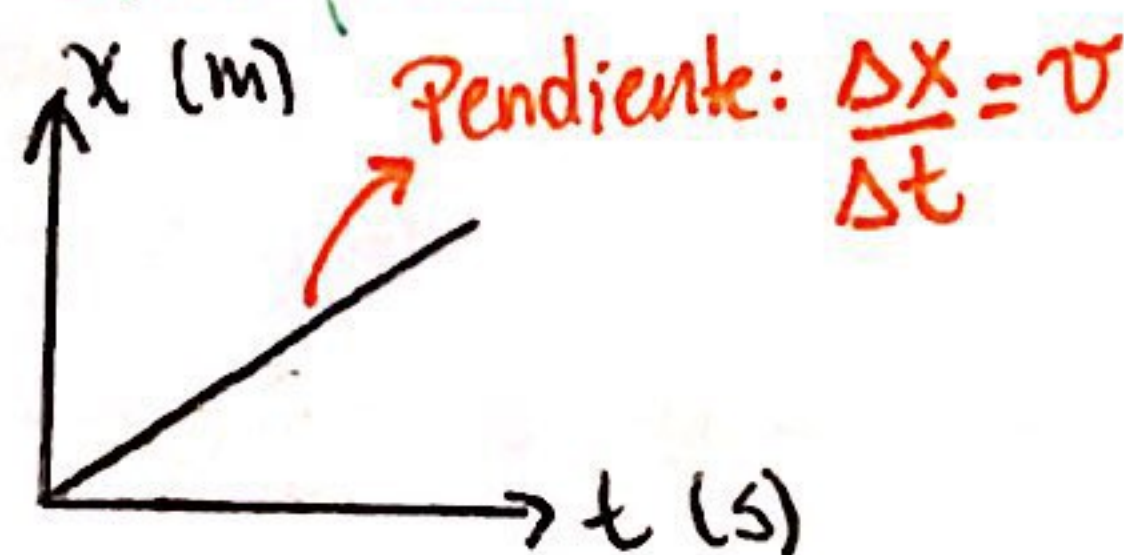
Modelo de velocidad constante: $x_f = x_i + v \cdot t$

Modelo de aceleración constante: $v_f = v_i + a \cdot t$

$$x_f = x_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

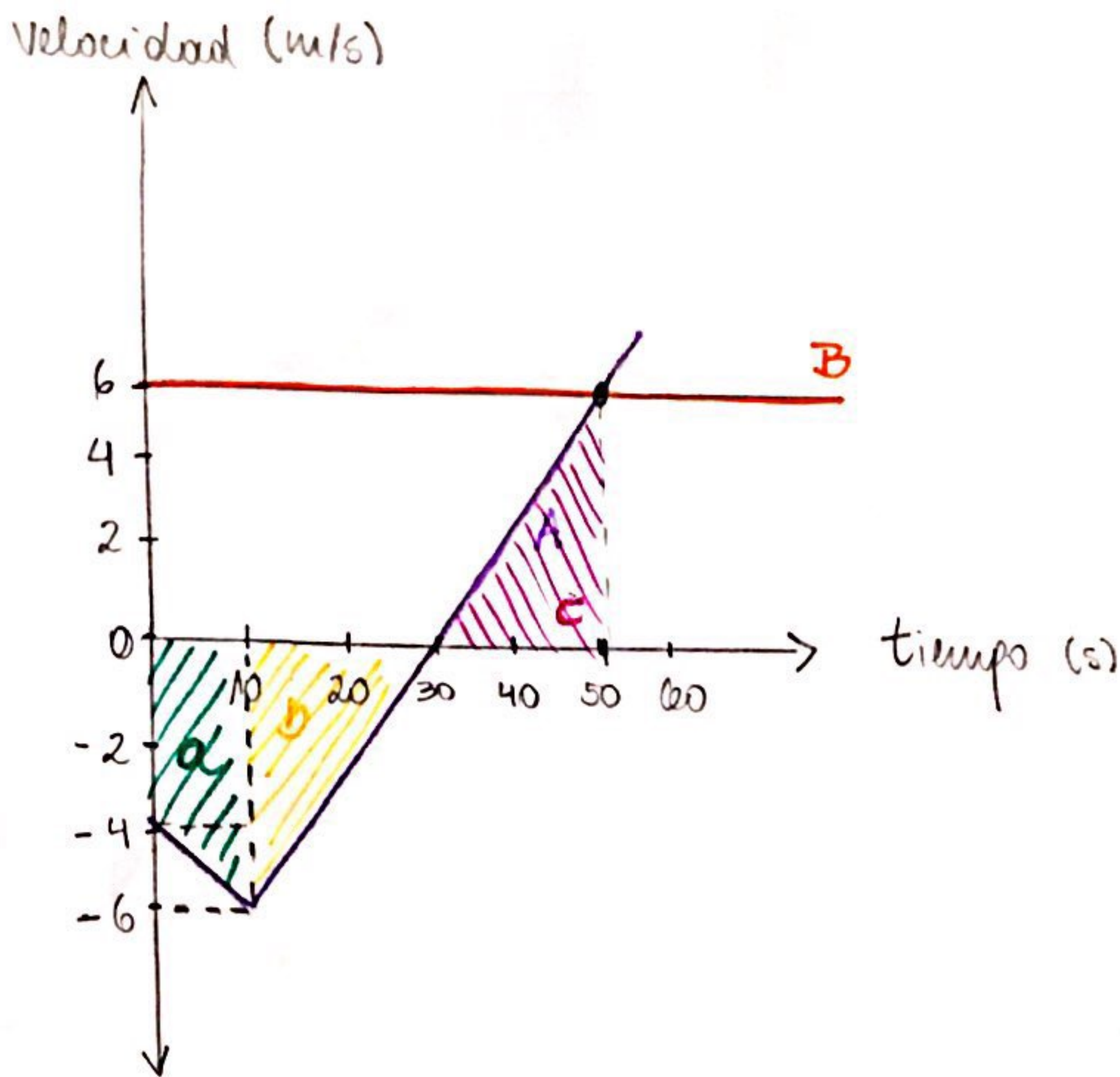
Gráficos.



Posición $\xrightarrow{\text{Pendiente}}$ Velocidad $\xrightarrow{\text{Pendiente}}$ aceleración

Aceleración $\xrightarrow{\text{Área}}$ Velocidad $\xrightarrow{\text{Área}}$ distancia

Parta auxiliar 1



- ① Al tener este tipo de ejercicios, lo primero que debemos hacer es imaginar una película de lo que ocurre en el problema.
- A y B: 2 autos que se desplazan en un mismo trayecto rectilíneo.

A: v_A

B: $v_B \rightarrow \text{cte.}$

- ② Datos del problema:

Cuando $v_A = v_B \Rightarrow x_A = x_B$

$x_{0B} = ?$

$x_{0A} = x_A(t=0) = 25 \text{ m}$

$v_B = 6 \text{ m/s. cte.}$

3 Resolución

Dado que nos encontramos en un modelo de velocidad cte (v_B es cte.), utilizamos la sigte fórmula:

$$x_f = x_i + v \cdot t \quad \text{para } v \text{ cte.}$$

Interpretación de esta ec:

posición final del objeto es la suma de su posición inicial más el desplazamiento $v \cdot t$ que ocurre en el intervalo t .

Según los datos que tenemos del problema:

• $x_{fB} = x_{0B} + v_B \cdot t$ (1)
lo que debemos calcular

• Cuando $v_A = v_B \Rightarrow x_A = x_B$ / Como v_B es cte.

$v_A = 6 \text{ m/s} \Rightarrow x_A(t=50) = x_B(t=50)$

tampoco conocemos estos valores.

→ Hasta aquí, sabemos que cuando el auto A alcance una vel de 6 m/s, ambos autos estarán en la misma posición y, de esta forma, tendremos una posición final para B que podremos reemplazar en la ec. (1) y despejar x_{0B} .

Como tenemos la posición inicial de A, podemos estudiar el movimiento de A y encontrar x_A .

Movimiento de A. → utilizamos distancia recorrida = $v \cdot t$

② $t=0$ a $t=10$: $(v \cdot t)_a = 4 \square + \frac{10 \cdot 2}{2} = 4 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 2}{2} = 40 + 10 = 50 \text{ m}$

⇒ $x_A(t=10) = x_{0A} + (v \cdot t)_a = 25 \text{ m} - 50 \text{ m}$

$x_A(t=10) = -25 \text{ m}$

bajo el eje x

⇒ Retrocede (distancia negativa).

Recordar: en gráficos v vs. t , área bajo la curva $v \cdot t$ es la distancia recorrida.

③ $t=10$ a $t=30$: $(v \cdot t)_b = 6 \nabla = \frac{20 \cdot 6^3}{2} = 20 \cdot 3 = 60 \text{ m}$ } bajo el eje x ⇒ Retrocede

⇒ $x_A(t=30) = x_A(t=10) + (v \cdot t)_b = -25 \text{ m} - 60 \text{ m} = -85 \text{ m} = x_A(t=30)$

↳ En este 2º intervalo la "nueva" posición inicial será la posición final del 1º intervalo.

c) $t=30$ a $t=50$: $(\vec{v}_A \cdot t)_c = \frac{\triangle 6}{20} = \frac{20 \cdot 6}{2} = 20 \cdot 3 = 60 \text{ m.}$ y sobre el eje x $\Rightarrow$ avanza

$\Rightarrow x_A(t=50) = x_A(t=30) + (\vec{v}_A \cdot t)_c = -85 \text{ m} + 60 \text{ m} = -25 \text{ m} = x_A(t=50)$

Movimiento de B.

$t=0$ a $t=50$: $\vec{v}_B \cdot t = 6 \boxed{50} = 50 \cdot 6 = 300 \text{ m}$ y sobre el eje x $\Rightarrow$ avanza

En este valor de tiempo las velocidades son iguales y, por ende, $x_A = x_B$.
Como ya calculamos $x_A(t=50)$, tenemos $x_B(t=50)$ y solo nos faltaría reemplazar en la ec. (1).

Así: $x_B(t=50) = \underbrace{x_{0B}(t=0)}_{x_{0B}} + \vec{v}_B \cdot t$ / $x_B(t=50) = x_A(t=50) = -25 \text{ m}$
 $\vec{v}_B \cdot t = 300 \text{ m.}$

$-25 \text{ m} = x_{0B} + 300 \text{ m.}$

$\Rightarrow x_{0B} = -300 \text{ m} - 25 \text{ m}$

$\therefore \boxed{x_{0B} = -325 \text{ m}}$ //

Pauta problema 2.

Antes: ¿Cómo abordar el problema (y en general problemas de cinemática)?

•> Una forma de resolver problemas es con los siguientes pasos:

1.- **Intuición física**: hacemos una idea de lo que está ocurriendo físicamente, de modo que sepamos, por ejemplo, qué ecuaciones son útiles para resolver el problema. En este paso obtendremos los datos del problema.

2.- **Definir sistema coordenado**: Siempre buscando simplificar el problema. Fijaremos el eje coordenado de modo que los cálculos que tengamos que hacer sean lo menos complicado posible. Si vemos que el problema se complica demasiado, probablemente, (AUNQUE NO SIEMPRE, OJO, MUY IMPORTANTE) estamos eligiendo un sistema coordenado poco práctico.

3.- **Plantear ecuaciones**: En base a la intuición física del problema, planteamos las ecuaciones que nos servirán para resolver el problema, en su forma general. (Ej: $y_f(t) = y_i + v_{0y}t + \frac{a}{2}t^2$).

4.- **Imponer condiciones**: sobre las ecuaciones con los datos obtenidos. Esto es, reemplazar en las ecuaciones planteadas en 3.- valores, de acuerdo a lo que ocurre en una situación física.

Por ejemplo:

Si tenemos una partícula que se mueve con velocidad constante, y cuya posición inicial es x_0 , la ecuación que describe el mov. de la partícula es:

$$x_f(t) = x_i + v t \quad (1)$$

Con los datos, la ecuación sería:

$$x_f(t) = x_0 + v t \quad (2)$$

Y si en un enunciado se nos menciona que, por ejemplo, la partícula recorre L metros en τ segundos, el imponer esta condición en la ecuación (2) sería simplemente reemplazar

$$x_f(t=\tau) = L = x_0 + v \tau$$

Con esto, si nos preguntaran por la rapidez de la partícula, podríamos despejar v para conocerla:

$$L = x_0 + v \tau \Rightarrow v \tau = L - x_0 \Rightarrow v = \frac{L - x_0}{\tau}$$

•> Somos nosotros quienes le "decimos" a las ecuaciones lo que queremos que pase! Nosotros imponemos que cuando hayan pasado τ segundos la partícula llegará a la posición L .

5.- **Reconocer incógnitas:** Luego de haber planteado ecuaciones e imponer condiciones, podemos reconocer las incógnitas del problema (simplemente aquellas cantidades físicas que no conocemos, pero que son necesarias para resolver el problema, ya sea porque son útiles para un paso intermedio, o porque el enunciado nos pide directamente calcularlas).

6.- **Despejar las incógnitas!:** En este punto podremos escribir una serie de ecuaciones que obtuvimos en los pasos anteriores, y además tendremos una serie de incógnitas, necesarias de despejar para resolver el problema.

Importante : Para despejar las incógnitas de un problema, necesitamos que se cumpla que :

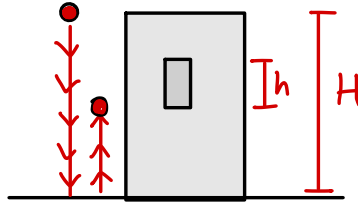
$$\# \text{ Ecuaciones} \geq \# \text{ incógnitas}$$

En general esta estrategia debería funcionar para problemas en que nos piden encontrar cantidades físicas bajo ciertas condiciones. No es la única forma de abordar un problema, lo que les sirva está bien! Solo es para ordenarse un poco.

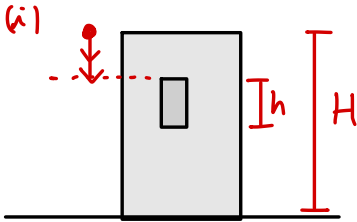
→ Ahora sí, podemos pasar a resolver el problema:

1.- Intuición física:

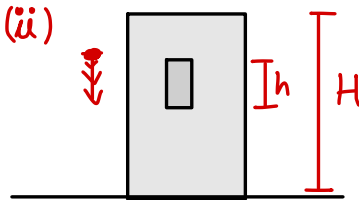
- > No nos interesa lo que ocurre con el observador más que para conocer lo que ocurre en el problema.
- > La bala es soltada desde lo alto de un edificio de largo H [m], pasa por una ventana de largo h [m], impacta en suelo llega a la parte baja de la ventana, siempre bajo la acción de $\vec{g}$.
- > Los dibujos son siempre útiles para hacernos una idea de lo que pasa:



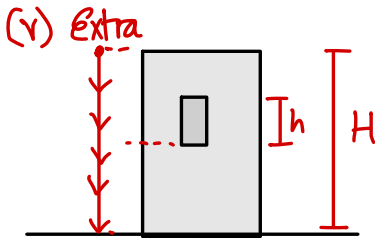
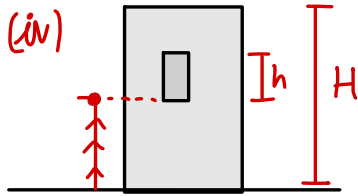
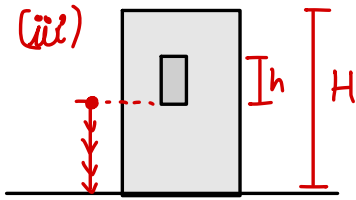
→ Podemos separar (por intervalos de tiempo) lo que ocurre.



- > En $t=0$ la bala se **deja caer**.
→ Deja caer $\Leftrightarrow$ **velocidad inicial nula $v_i=0$**
- > Recorre una distancia **L [m] desconocida** en **T [s]**, desconocido también.



- > La bala recorre una distancia **h [m]** conocida en **τ [s]**, conocido también.



→ La bala recorre una distancia D [m] desconocida en $T_0/2$ [s] (conocido).

Esto está dado por la colisión elástica entre la bala y el suelo (no hay cambios en rapidez) La lógica es: si se demora T_0 en bajar y subir, entonces se demora la mitad en bajar y subir por separado.

→ Al considerar todo el trayecto desde lo alto del edificio hasta el suelo (sin contar cuando sube la bala), tenemos que se recorre una distancia H [m] desconocida en T [s], desconocido también.

→ Notemos que los largos L , h y D están contenidos en H , y los tiempos T , t y $\frac{T_0}{2}$ están contenidos en T (es el tiempo total).

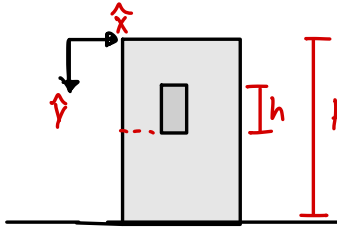
Resumamos los datos:

- $\vec{g}$ siempre presente → hay aceleración constante ✓.
- Se recorre L^x [m] en T^x [s].
- Se recorre $h^{\checkmark}$ [m] en $T^{\checkmark}$ [s].
- Se recorre D^x [m] en $\frac{T_0^{\checkmark}}{2}$ [s].
- Se recorre H^x [m] en T^x [s].
- Se deja caer → $V_i = 0$ ✓

✓: Dato

x: Desconocido

2.- Definir eje coordenado: Colocaremos el eje coordenado de esta forma:



- hacia abajo, y es positivo
- $y=0$ está en lo más alto del edificio.
- Esta elección simplifica los cálculos!

3.- Plantear ecuaciones: Como la bola se deja caer libremente y está sujeta a la acción de gravedad, comparemos la ecuación de itinerario que describe el mov. de una partícula con aceleración constante (¡ojo! la velocidad NO es constante, varía en el tiempo por $\vec{g}$):

$$y_f(t) = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Como $a_y = \oplus g$ Por el eje coordenado que elegimos

$$\rightarrow y_f(t) = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

4.-, 5.- Imponer condiciones (obtención de ecuaciones) y reconocer incógnitas:

Para el problema particular, es útil considerar lo que ocurre en los intervalos de tiempo (i) y (ii):

- Recorre L [m] en T [s]
 - Recorre h [m] en τ [s]
- } Juntamos ambas $\rightarrow$ Recorre $L+h$ [m] en $T+\tau$ [s].

Imponemos esta condición en (3).

$$L+h = \cancel{y_i} + \cancel{y_{yi}} (\bar{t} + \tau) + \frac{1}{2} g (\bar{t} + \tau)^2$$

0 por elección de eje coordenado

0 porque no deja caer

$$\rightarrow L+h = \frac{1}{2} g (\bar{t} + \tau)^2$$

Tenemos una ecuación y dos incógnitas, necesitamos más ecuaciones.

Ahora, si consideramos sólo lo que ocurre en el intervalo de tiempo (i), al imponer que se recorre L [m] en $\bar{t}$ [s] en la ecuación (3), se tiene que:

por mismas razones que en el anterior.

$$\rightarrow L = \cancel{y_i} + \cancel{y_{yi}} \bar{t} + \frac{1}{2} g \bar{t}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} g \bar{t}^2$$

tenemos ahora 2 ecuaciones y 2 incógnitas, pero queremos calcular H , así que necesitamos más ecuaciones.

Si nos enfocamos en lo que pasó en el intervalo de tiempo (v), e imponemos las condiciones en la ecuación (3) tenemos que:

$$H = \cancel{y_i} + \cancel{y_{yi}} T + \frac{1}{2} g T^2$$

$$\rightarrow H = \frac{1}{2} g T^2$$

Ahora tenemos H !, pero tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas

¿De donde sacamos la 4ta ecuación?

Recordemos que T incluye a $\bar{t}$, τ y $\frac{\tau_0}{2}$, de modo que:

$$T = \bar{t} + \tau + \frac{\tau_0}{2}$$

Tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas! podemos resolver.

Tenemos las 4 ecuaciones:

(I)

$$L + h = \frac{1}{2} g (\bar{t} + \tau)^2$$

(II)

$$L = \frac{1}{2} g \bar{t}^2$$

(III)

$$H = \frac{1}{2} g T^2$$

(IV)

$$T = \bar{t} + \tau + \frac{\tau_0}{2}$$

y las 4 incógnitas L , $\bar{t}$, T y H . Podemos resolver!

6.- Despejar incógnitas:

De (II) tenemos una expresión para L . Reemplazamos en (I):

$$L + h = \frac{1}{2} g (\bar{t} + \tau)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g \bar{t}^2 + h = \frac{1}{2} g (\bar{t} + \tau)^2$$

Despejamos $\bar{t}$:

$$\frac{1}{2} g \bar{t}^2 + h = \frac{1}{2} g (\bar{t} + \tau)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2} g \bar{t}^2} + h = \cancel{\frac{1}{2} g \bar{t}^2} + g \bar{t} \tau + \frac{1}{2} g \tau^2$$

$$\Rightarrow h = g \bar{t} \tau + \frac{1}{2} g \tau^2$$

$$\Rightarrow g \bar{t} \tau = h - \frac{1}{2} g \tau^2 \Rightarrow \bar{t} = \frac{h}{g \tau} - \frac{\tau}{2}$$

obtenemos $\bar{t}$ en función de cosas conocidas!

Si reemplazamos este resultado en (IV) tendremos que:

$$T = \cancel{\tau} + \tau + \frac{\tau_0}{2}$$

$$\rightarrow T = \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau_0}{2}$$

$$\rightarrow T = \frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau_0}{2}$$

← Tenemos T en función de cosas conocidas!

Finalmente, reemplazando este resultado para T en la ecuación (III):

$$H = \frac{1}{2} g T^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} g \left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau_0}{2} \right)^2$$

Para llegar al resultado que se nos pide, factorizamos la expresión en paréntesis:

Multiplicamos por un 4 estúpido

$$\left(\frac{h}{g\tau} \cdot \frac{2}{2} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau_0}{2} \right)^2 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2h}{g\tau} + \tau + \tau_0 \right)^2 \right]$$

Si a, b son números reales $\rightarrow (ab)^2 = a^2 b^2$. Aplicando esto a nuestro caso:

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{2h}{g\tau} + \tau + \tau_0 \right)^2 \right] = \frac{1}{4} \left(\tau + \tau_0 + \frac{2h}{g\tau} \right)^2$$

Volviendo al resultado:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} g \left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau_0}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} g \left(\tau + \tau_0 + \frac{2h}{g\tau} \right)^2 \\ \Rightarrow H &= \frac{g}{8} \left(\tau + \tau_0 + \frac{2h}{g\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

Que es el resultado que se nos pedía!

Para terminar, realizamos un análisis dimensional, para confirmar que H es efectivamente un largo.

la expresión $\frac{1}{8} g \left(\tau + \tau_0 + \frac{2h}{g\tau} \right)^2$ va como:

$$\sim \frac{L}{T^2} \left(T + T + \frac{L}{\left(\frac{L}{T^2}\right) \cdot T} \right)^2$$

$$= \frac{L}{T^2} \left(T + T + \frac{\cancel{L} T^{\cancel{2}}}{\cancel{L} T} \right)^2$$

$$= \frac{L}{T^2} (T + T + T)^2 \sim \frac{L T^2}{T^2} = \boxed{L} \checkmark$$

tiene dimensiones
de largo!
↓

⚠ Ojo: Es muy importante que siempre hagan este análisis dimensional, les ayudará a saber si su resultado tiene sentido.