

# Modulación PWM

Introducción y conceptos básicos

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile



Roberto Cárdenas Dobson  
Ingeniero Civil Electricista, Msc. Ph.D

Este apunte ha sido desarrollado para el curso EL6009, (actualmente EL7032), “Electrónica de potencia y Accionamientos”. Para entender de mejor forma los conceptos discutidos en este material de apoyo, el estudiante debería estar familiarizado con los métodos de estimación espectral, particularmente la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

En la primera versión de este apunte (2010), se utilizaba rutinas en Matlab para efectos de modelación y simulación. Esto se debe a que en el pasado nosotros utilizábamos Matlab para simular las rutinas de control de convertidores y cuando el sistema de control estaba funcionando correctamente en simulación era relativamente simple trasladar las rutinas a la plataforma de control DSK6713 que nuestro grupo de investigación utilizaba desde el año 2004.

En el presente utilizamos con más frecuencia plataformas de control programables en lenguaje de alto nivel (Simulink y PLECS) como DSPACE Microlab box, DSPACE 1103, PLECS Real Time System, Triphase y OPAL. Por lo tanto se ha eliminado un capítulo de este apunte y añadido otro. Infortunadamente, desde mi punto de vista, el dominio del lenguaje C y assembler ya no es tan necesario en la época en que existen poderosas plataformas de control como las mencionadas anteriormente. Sin embargo, tengan en cuenta que, para los usuarios más avanzados, todavía es necesario programar algunas rutinas en lenguaje de bajo nivel, particularmente C.

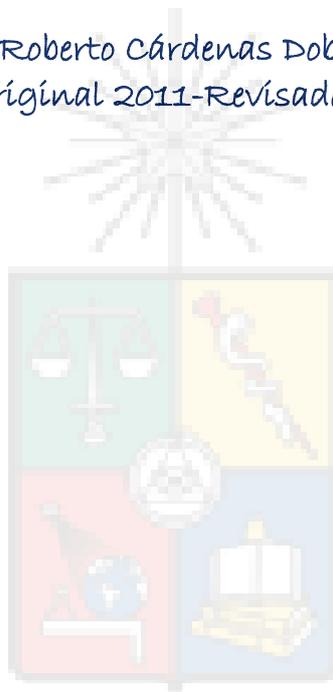
Modulación por ancho de pulso PWM es un área de investigación muy activa y fructífera. En este apunte se entregan solo los conceptos elementales que, de acuerdo a mi opinión, todo curso básico de electrónica de potencia y accionamientos debería considerar y que todo curso de pregrado en electrónica de potencia debería enseñar. A los alumnos que quieran profundizar estos tópicos, particularmente a aquellos que disfrutan de las matemáticas, se le recomienda utilizar el libro “Pulse Width Modulation

for Power Converters”, D. G. Holmes y T.A. Lipo y el libro del profesor Bin Wu “High-Power Converters and AC Drives” entre otros.

El objetivo de este material es apoyar los contenidos entregados en clases. En ningún caso se ha escrito con el objetivo de que este apunte por sí solo sea autosuficiente para entender todos los conceptos requeridos en esta área.

Se recomienda imprimir este apunte utilizando una impresora láser en colores. De esta forma se entenderán en mejor forma algunas de las figuras y gráficos.

Roberto Cárdenas Dobson.  
(Original 2011-Revisado 2020)



## ÍNDICE

|      |  |    |
|------|--|----|
| I.   | MODULACIÓN PWM “CONVENCIONAL”  | 5  |
| 1.1  | Componentes Típicos de un Variador de Frecuencia.                        | 6  |
| 1.2  | Modulación Utilizando Onda Cuadrada.                                     | 9  |
| 1.3  | Modulación PWM.  | 14 |
| 1.4  | Índice de Modulación, Sobremodulación e Inyección de Terceros Armónicos. | 20 |
| 1.5  | Implementación Digital, PWM Regular Asimétrico.                          | 26 |
| 1.6  | PWM Regular Simétrico.   | 27 |
| II.  | VECTORES ROTATORIOS Y COMPONENTES DE SECUENCIA.                          |    |
| 2.1  | Introducción a Vectores Rotatorios                                       | 33 |
| 2.2  | Transformación $\alpha$ - $\beta$  | 34 |
| 2.3  | Secuencia Positiva Negativa y Cero                                       | 37 |
| III. | MODULACIÓN VECTORIAL (SVM)   | 39 |
| 3.1  | Introducción.  | 40 |
| 3.2  | Cálculo de los Ciclos de Trabajo de los Vectores.                        | 44 |
| 3.3  | Otras Consideraciones.   | 48 |
| 3.4  | Implementación de PWM con Patrón Simétrico Doble.                        | 49 |
| 3.5  | Algunos resultados de simulación.  | 50 |
| 3.6  | Eliminación de armónicos pares   | 54 |
|      | APÉNDICE. RUTINA MATLAB PARA ESTIMACIÓN ESPECTRAL.                       | 59 |
|      | REFERENCIAS  | 62 |

A large, faded watermark of the University of Chile crest is centered in the background of the page.

# Capítulo I

## MODULACIÓN PWM "CONVENCIONAL"

### SINUSOIDAL COMPARADA CON TRIANGULAR

## I. Modulación PWM

### 1.1 Componentes Típicos de un Variador de Frecuencia.

Para operar un motor de inducción a velocidad variable, se requiere de una fuente de tensión 3 $\phi$  balanceada que alimente la máquina con señales de voltaje y frecuencia variable [1]. El dispositivo comercial que efectúa esta función se conoce habitualmente como “variador de frecuencia”, inversor o conversor de dos niveles tipo fuente de voltaje (se utiliza generalmente el acrónimo VSC o voltage source converter).

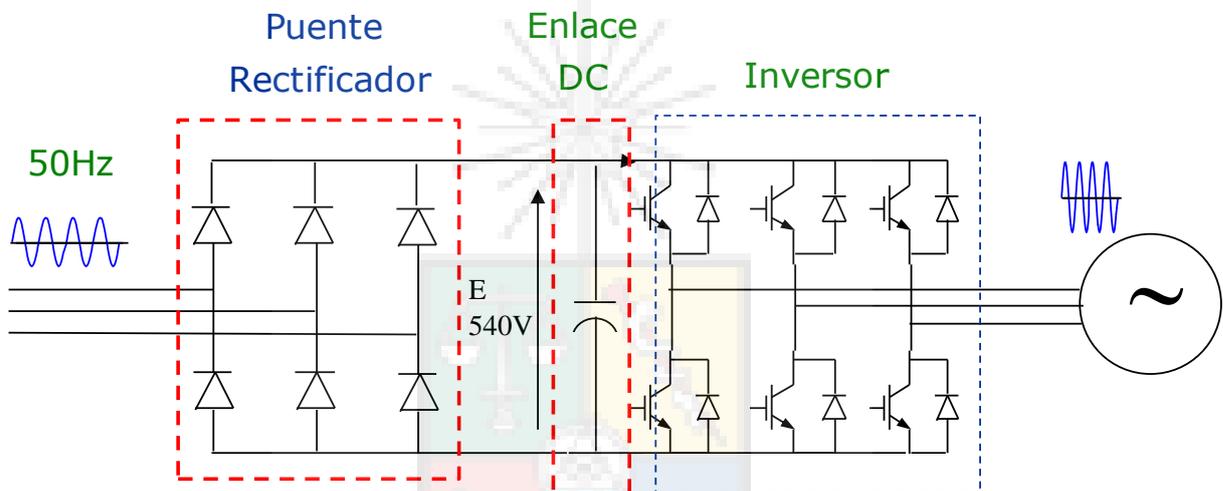


Fig. 1.1 Estructura de un inversor típico, también llamado conversor fuente de voltaje de dos niveles (abreviado 2-level VSC acrónimo por Voltage Source Converter) o variador de frecuencia.

El variador de frecuencia de la Fig. 1.1 se divide en tres partes componentes [2]. El puente rectificador de seis pulsos que se encuentra en la entrada, el enlace de continua que se compone de condensadores electrolíticos y los interruptores de salida. El enlace de continua se carga con una tensión cercana al máximo valor de la tensión línea a línea de entrada. El condensador, para el resto de los dispositivos ubicados a la derecha, actúa como una fuente de voltaje y por ese motivo se le denomina a la topología “conversor fuente de voltaje” o VSC (voltage source converter).

La última etapa se compone de seis interruptores controlados, habitualmente IGBTs, los cuales sintetizan el voltaje de magnitud y frecuencia variable que alimenta el motor de

inducción u otro equipo. Una carga trifásica desbalanceada, pero sin componentes de secuencia cero, también se puede alimentar a la salida del variador de frecuencia mostrado en la Fig. 1.1. Finalmente, topologías como éstas o similares se pueden utilizar para entregar energía a la red, interconectando generadores de velocidad variable (vgr. eólicos) o sistemas fotovoltaicos.

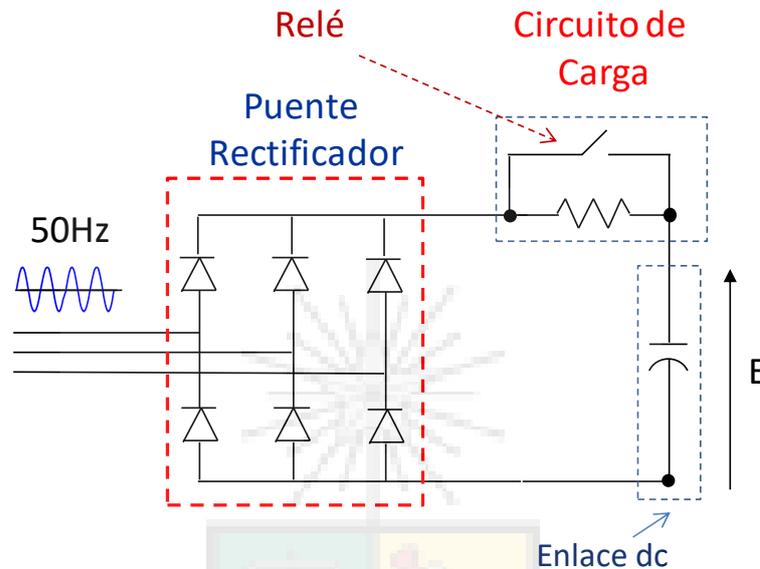


Fig. 1.2 Circuito típico de carga del condensador del enlace dc.

Cuando se energiza el variador de frecuencia, el condensador del enlace de continua se encuentra inicialmente descargado y la corriente puede alcanzar valores muy elevados. Para reducir la corriente de carga inicial se utiliza un circuito similar al que se muestra en la Fig. 1.2. Mientras el valor de tensión en el condensador sea menor a  $\approx 70\%$ - $80\%$  del valor nominal, la resistencia de carga se encuentra conectada en serie con el condensador. Cuando la tensión supera este umbral el relé cierra sus contactos y el condensador se conecta directamente a la salida del puente rectificador. Circuitos similares se pueden implementar utilizando otras topologías. En general la elección del circuito de carga puede variar dependiendo de la potencia del inversor.

Otro componente requerido en algunos variadores de frecuencia es la resistencia de frenado. Cuando una máquina se desacelera, se produce un cambio en la energía rotacional igual a:

$$\Delta E = \frac{1}{2}J(\omega_{r1}^2 - \omega_{r2}^2) \quad (1.1)$$

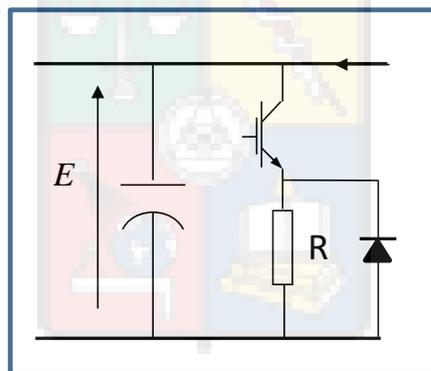
donde  $\omega_{r1}$  y  $\omega_{r2}$  son las velocidades inicial y final respectivamente y  $J$  es el momento de inercia rotacional. La potencia generada al desacelerar se puede calcular como:

$$P \approx \left( \frac{1}{2} J (\omega_{r1}^2 - \omega_{r2}^2) \right) / (t_2 - t_1) \quad (1.2)$$

la potencia generada en el proceso de frenado se entrega al inversor. Si en la entrada del variador de frecuencia existe un puente rectificador, la energía recuperada durante el frenado no puede ser suministrada a la red eléctrica. Por este motivo se produce un aumento en la tensión del enlace dc. Si se desprecian las pérdidas se tiene:

$$\frac{1}{2} C (v_2^2 - v_1^2) \approx \frac{1}{2} J (\omega_{r1}^2 - \omega_{r2}^2) \quad (1.3).$$

Por lo tanto, a menos que la energía producida al frenar la máquina se disipe, la tensión en los condensadores puede alcanzar valores mayores a los que soportan estos dispositivos. Para evitar la destrucción de los condensadores, los convertidores comerciales están protegidos y apagan todos los transistores del inversor cuando la tensión sobrepasa un determinado valor



- Para desacelerar se puede utilizar “frenado disipativo”
- Para “frenado regenerativo” se requiere un rectificador controlado en la entrada u otra topología similar.
- Si  $E$  sobrepasa  $E_{nom} + \Delta E$ , el transistor se cierra
- Si  $E$  se reduce a  $E_{nom} - \Delta E$ , el transistor se abre.
- El frenado disipativo es simple y de bajo costo pero la energía del frenado se pierde en forma de calor.

Fig. 1.3 Circuito utilizado para frenado disipativo.

(por ejemplo 750V en el conversor Eurotherm 584V). Otra forma de proteger los condensadores del enlace de continua, es descargar estos dispositivos cuando la tensión sobrepasa un valor predefinido. Este esquema de control se denomina habitualmente “*frenado disipativo*”.

Fig. 1.3. muestra un esquema de frenado disipativo. Una resistencia de frenado y un diodo volante se encuentran conectados, a través de un interruptor estático (usualmente un transistor IGBT), al terminal positivo del enlace de continua. Cuando la tensión supera el valor prefijado, el interruptor se enciende y parte de la energía almacenada se disipa en la resistencia. El disparo del IGBT se puede controlar utilizando histéresis (también denominado control “*bang-bang*” en la literatura anglosajona). Sin embargo el control por histéresis, que es muy simple de implementar, tiene la desventaja de generar una frecuencia de switching variable y a veces se prefiere control PWM que genera una frecuencia switching fija. Nótese que el concepto de frecuencia de switching se discute después en este apunte.

### 1.2. Modulación Utilizando Onda Cuadrada.

En la etapa de salida del inversor se deben activar los interruptores estáticos para sintetizar el voltaje de salida. Se asume que existe un neutro ficticio “*o*” ubicado en el punto central de los condensadores del enlace de continua. El estudiante debe tener claro que este neutro ficticio no es real y se requiere solo para efectos de análisis matemático de la

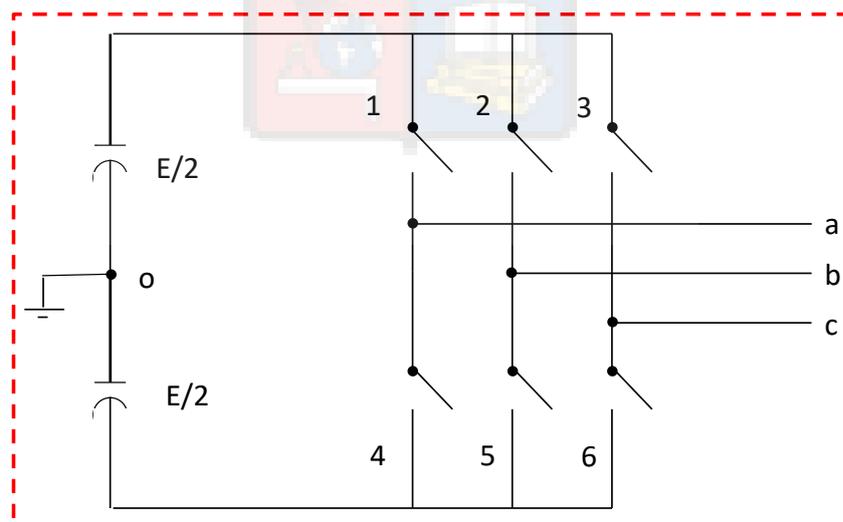


Fig. 1.4 Etapa de salida del conversor mostrado en la Fig. 1.1.

modulación. Más aun, las cargas trifásicas como motores de inducción no utilizan neutro y se alimentan con la tensión línea a línea a la salida del variador de frecuencia. En este apunte “neutro ficticio” se abrevia como NF.

Al utilizar modelación por onda cuadrada los interruptores de una “pierna” en particular (por ejemplo 1 y 6 en Fig. 1.4), son utilizados para conectar durante  $180^\circ$  las salidas a la tensión positiva o negativa del enlace C.C. Por lo tanto se obtienen las tensiones  $v_{ao}$ ,  $v_{bo}$  y  $v_{co}$  que se muestran en Fig. 1.5. Tres ondas cuadradas desfasadas por  $120^\circ$  eléctricos entre ellas.

Los variadores de frecuencia comerciales no disponen de un neutro a la salida. La carga se alimenta desde tres tensiones línea-línea que se obtienen como:

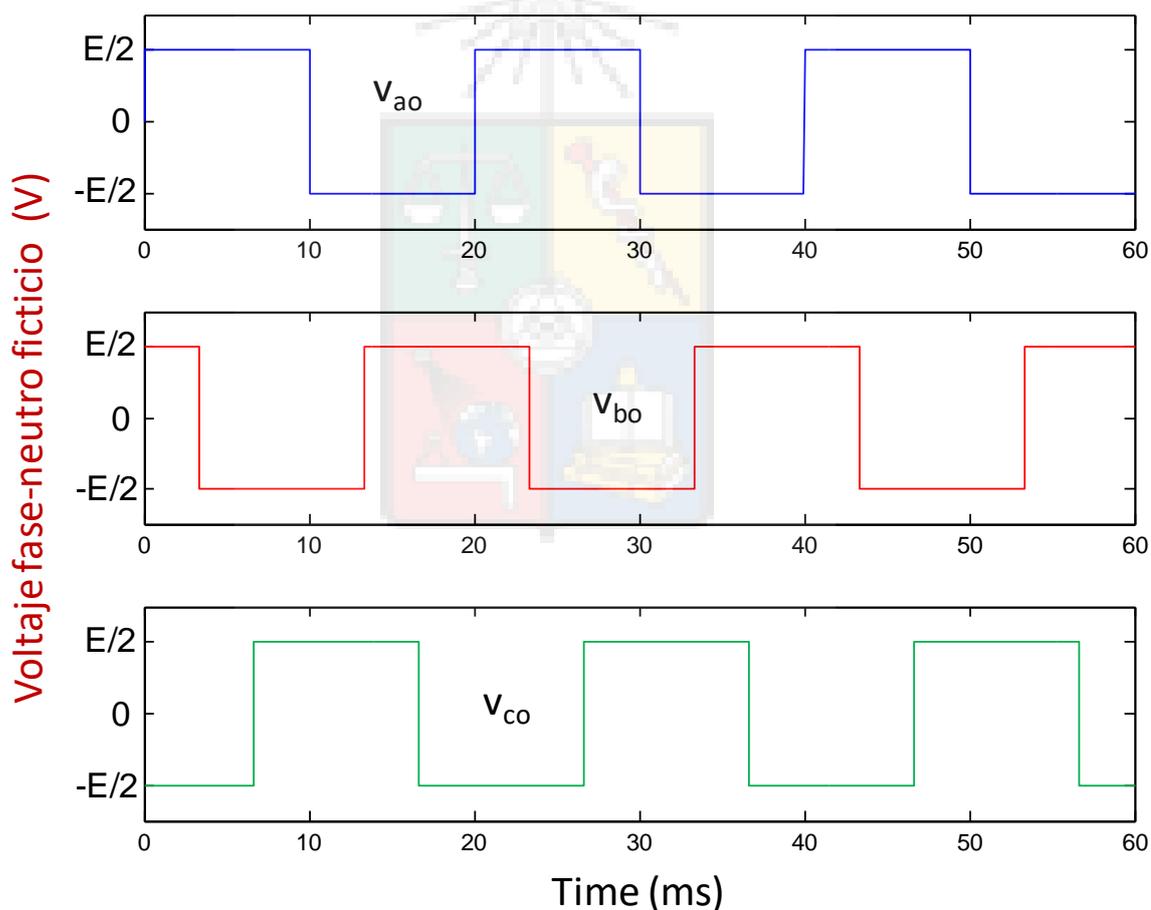


Fig. 1.5. Ondas cuadradas obtenidas entre las salidas y el neutro ficticio

$$v_{ab} = v_{ao} - v_{bo}$$

$$v_{bc} = v_{bo} - v_{co} \tag{1.4}$$

$$v_{ac} = v_{ao} - v_{co}$$

Al calcular las tensiones línea a línea de la Fig. 1.5 utilizando (1.4) se obtienen las señales que se muestran en la Fig. 1.6.

Las formas de onda de la Fig. 1.6, se denominan “cuasi-cuadradas”. Las señales cuasi-cuadrada tienen alta distorsión armónica y producen torques pulsatorios en los motores de corriente alterna [3]. Sin embargo se consideran apropiadas para algunos sistemas como circuitos de calefacción o iluminación. Por este motivo, ondas cuasi-cuadradas todavía se utilizan en algunos pequeños inversores, particularmente los instalados en sistemas híbridos de generación basados en energías renovables.

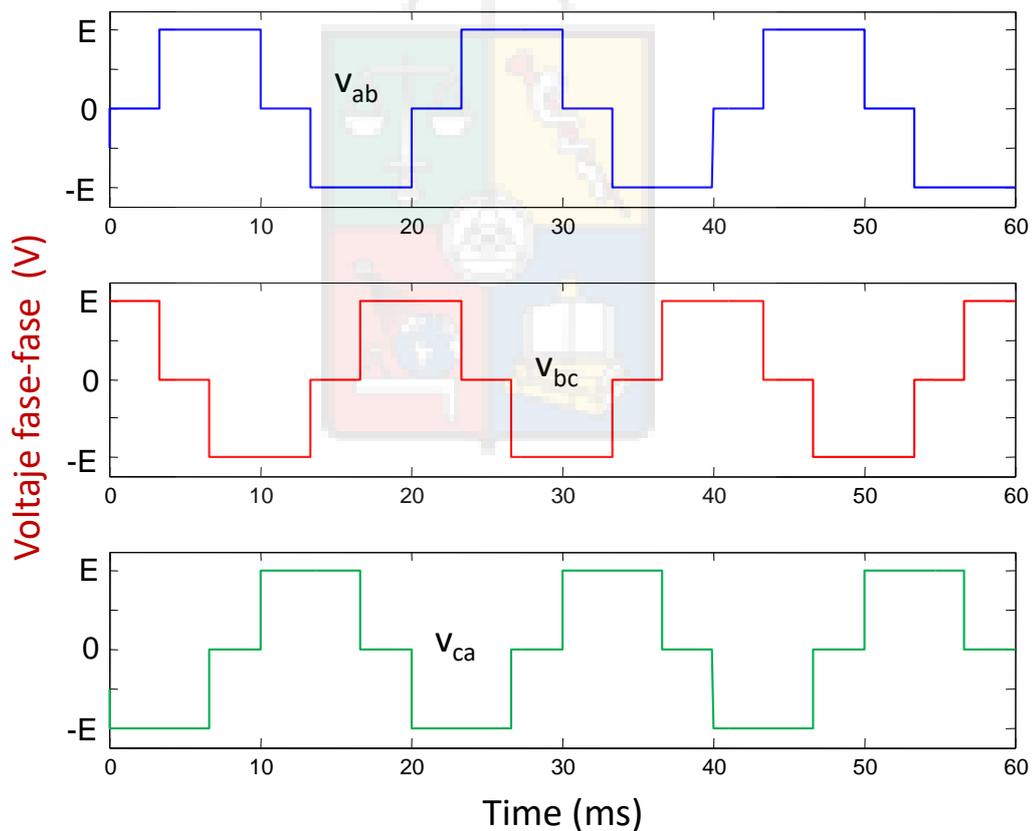


Fig. 1.6. Tensiones línea a línea correspondientes a la tensiones fase-neutro ficticio de la Fig. 1.6.

A pesar de la alta distorsión armónica existente en la onda cuasi-cuadrada, el valor de tensión en la fundamental es bastante alto. Esto se muestra en la Fig. 1.7, el valor efectivo de la fundamental alcanza a  $(\sqrt{6}/\pi)E$ , donde E es el voltaje total del enlace de continua. Para el caso de alimentar el rectificador de la Fig. 1.1 con 380V y asumiendo que el condensador del enlace de continua se carga al valor máximo ( $\approx 537.4V$ ), entonces el valor línea a línea efectivo

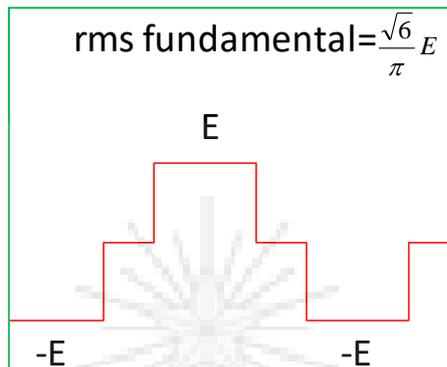
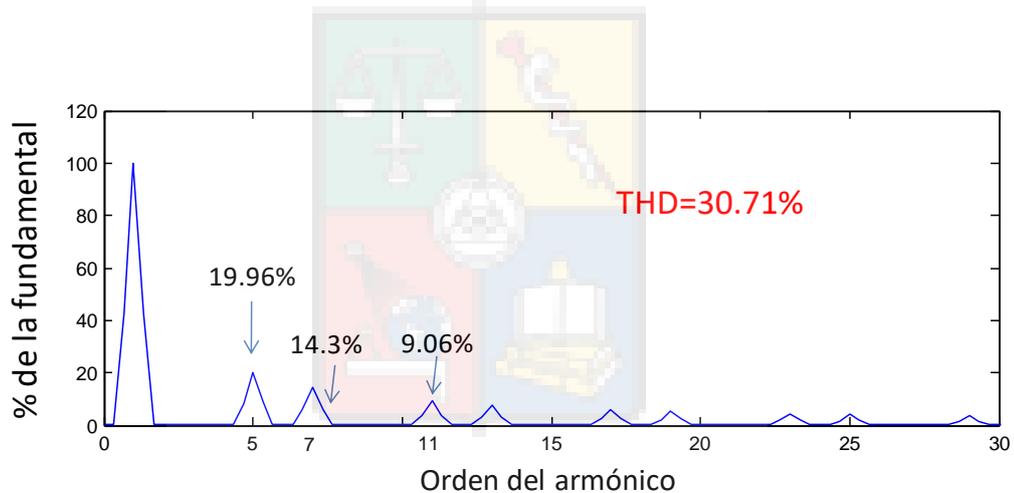


Fig. 1.7. Onda cuasi-cuadrada y valor rms de la fundamental.



|                     |                           |    |
|---------------------|---------------------------|----|
| Frecuencia= 50.00   | Valor= 100.00 por ciento. | 1  |
| Frecuencia= 250.00  | Valor= 19.96 por ciento.  | 5  |
| Frecuencia= 350.00  | Valor= 14.31 por ciento.  | 7  |
| Frecuencia= 550.00  | Valor= 9.06 por ciento.   | 11 |
| Frecuencia= 650.00  | Valor= 7.72 por ciento.   | 13 |
| Frecuencia= 850.00  | Valor= 5.85 por ciento.   | 17 |
| Frecuencia= 950.00  | Valor= 5.29 por ciento.   | 19 |
| Frecuencia= 1150.00 | Valor= 4.32 por ciento.   | 23 |

Fig. 1.8 Estimación espectral de la onda cuasi cuadrada.

máximo de la fundamental es 419V. Esto es bastante más alto que los que se obtiene utilizando modulación por ancho de pulso convencional donde para una entrada de 380V se obtiene a lo una salida máxima de 380V. Sin embargo la modulación de onda cuadrada produce muchos armónicos de baja frecuencia los cuales en algunas cargas como motores podrían producir problemas como torques pulsantes.

Utilizando el programa de estimación espectral con ventanas, “*fft\_rcd*” (o las rutinas de estimación espectral disponibles en PLECS) , cuyo código fuente se encuentra incluido en el apéndice al final de este apunte, se obtiene la estimación espectral mostrada en la Fig. 1.8. Para el cálculo del valor de THD (Total Harmonic distortion o distorsión armónica total) se utiliza la expresión:

$$THD = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots + I_n^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^n I_h^2}}{I_1} \quad (1.5a)$$

Donde  $I_1$  es el valor de la fundamental e  $I_2, I_3, \dots, I_n$  corresponde al valor de los armónicos de orden mayor a 1 que se encuentren en la señal. Para la onda cuasi-cuadrada de la Fig. 1.6 el valor de THD es de aproximadamente 31% [1], [4]. Para el caso de voltajes (preferentemente), se utiliza también el llamado Weighted THD que, para sistemas inductivos, tiene la siguiente expresión:

$$WTHD = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^n (V_h/h)^2}}{V_1} \quad (1.5b)$$

El WTHD representa la acción de filtrado que realizan las inductancias en la corriente al dividir por el orden del armónico  $h$ . Por lo tanto, en teoría, el WTHD nos indica aproximadamente el valor que alcanzaría el THD en un circuito inductivo al aplicar un voltaje distorsionado por armónicos.

Debido a la acción de filtrado que producen las impedancias series de una máquina de corriente alterna, los armónicos de menor orden en el voltaje producen mayor distorsión en las corrientes de estator, particularmente cuando la máquina opera a baja velocidad rotacional. En la Fig. 1.8 el 5to armónico de la tensión línea a línea genera una parte importante de la

distorsión armónica en las corrientes de línea. Esta corriente de 5to armónico produce torques pulsantes que pueden afectar la vida útil los elementos mecánicos conectados al eje de la máquina, por ejemplo las cajas de engranajes utilizadas en sistemas eólicos. Además de lo anterior, los armónicos de baja frecuencia pueden aumentar las pérdidas totales de la máquina y ocasionar *derating* del sistema [2][3].

En general debido a la alta distorsión armónica producida por las ondas cuasi cuadradas, este tipo de señales se consideran inapropiada para alimentar máquinas eléctricas.

### 1.3 Modulación PWM.

Para reducir la distorsión de baja frecuencia en las corrientes de la máquina conectada a la salida del variador de frecuencia, existen varios métodos de modulación publicados en la literatura especializada. Por ejemplo:

- a) Modulación PWM “convencional” en que se compara una onda sinusoidal con una onda triangular [2]. En la literatura de habla inglesa se conoce este método como “*sine weighted PWM*”, lo que podría traducirse como PWM por “onda sinusoidal pesada”.
- b) Modulación vectorial [5]. Este método produce resultados similares al PWM convencional con inyección de armónicos de secuencia cero presentado en sección 1.4. En la literatura anglosajona este método se denomina “*Space Vector Modulation*” o SVM.
- c) Control por corriente [2]. En esta metodología las corriente de fase del motor son habitualmente sintetizadas utilizando control *bang-bang* de la tensión fase-NF de salida. Este método no requiere controladores de corriente, pero tiene alguna de las desventajas propias de los controladores de histéresis. Por ejemplo frecuencia de switching variable.
- d) Otros métodos, por ejemplo PWM con eliminación selectiva de armónicos[6-8], control predictivo sin modulador, etc.

Solo los métodos a) y b) son discutidos en este apunte. Los métodos de modulación de los puntos c) y d) se discuten en otras publicaciones, por ejemplo [2], [6-8].

La estrategia de onda sinusoidal pesada denominada “*PWM por muestreo natural*”. se presenta en la Fig. 1.9. En el caso del muestreo natural la implementación es analógica y las

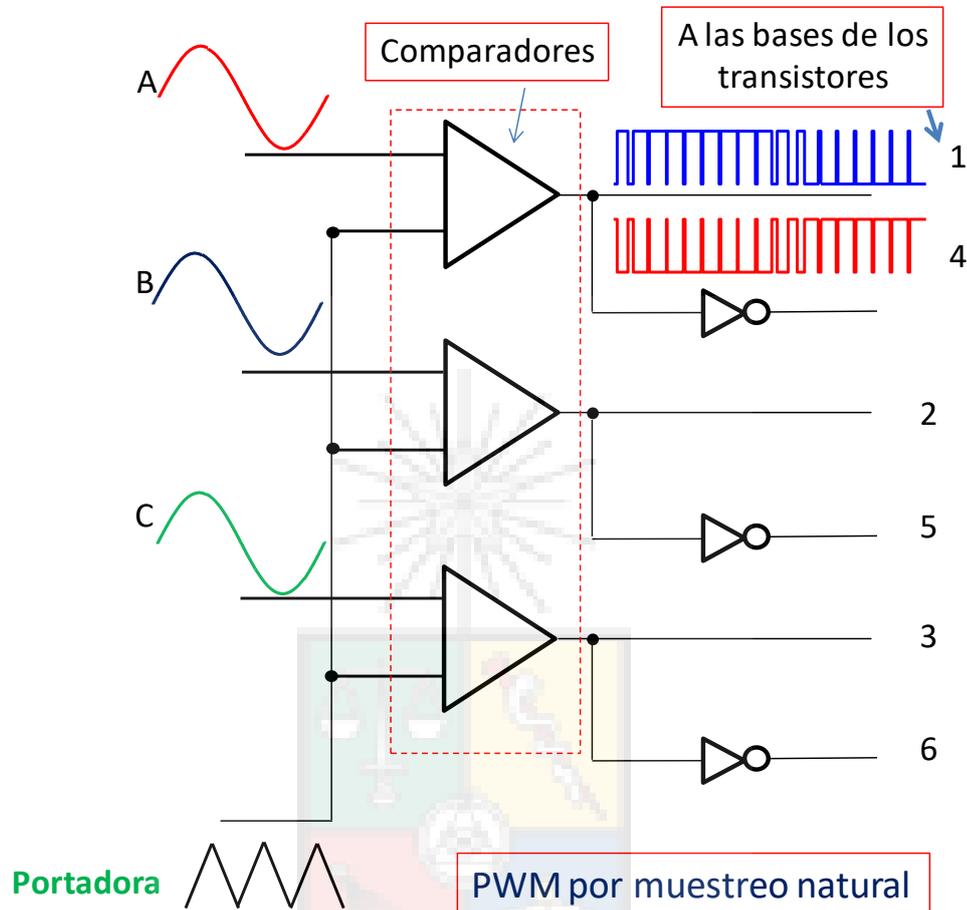


Fig. 1.9. Esquema de modulación por onda sinusoidal pesada.

señales que se envían a los interruptores de una determinada pierna son complementarias. Es decir cuando se dispara el interruptor “1”, el interruptor “2” se apaga de forma de evitar cortocircuitar el enlace de continua (ver Fig. 1.4).

Los pulsos de disparo se obtienen comparando las señales fase-NF a sintetizar con una onda triangular de frecuencia  $f_{sw}$ , donde  $f_{sw}$  es denominada “frecuencia de switching”. En general, para reducir la distorsión armónica en las corriente de línea,  $f_{sw}$  debe ser muy superior a la frecuencia  $f_e$  de la fundamental Para los variadores de frecuencia modernos, frecuencias de switching en el orden de 3kHz a 10kHz son comunes. Sin embargo en potencias del orden de 1-2 MW, frecuencias de switching del orden de 1kHz o menores son utilizadas. Esto se debe a

que las pérdidas de conmutación son altas en este rango de potencia, limitando el valor máximo de  $f_{sw}$  a utilizar. Para un convertidor VSC de dos niveles es apropiado que la frecuencia de conmutación o switching sea de al menos 20 veces el valor de la frecuencia a modular, para producir resultados aceptables. Por lo tanto, a mayores potencias, cuando la frecuencia de switching a utilizar es demasiado baja, puede ser necesario recurrir a otras metodologías de modulación. Por ejemplo eliminación óptima de armónicos de baja frecuencia [7].

La onda denominada “portadora” en la Fig. 1.9 varía entre  $-E/2$  y  $E/2$ . En la Fig. 1.10 se muestran la onda portadora y la onda modulante en el mismo gráfico. En este caso se asume que la tensión  $E/2$  es de 300V. Fig. 1.11 muestra en forma ampliada un sector de la Fig. 1.10. La señal a modular es comparada con la portadora. Cuando la portadora es menor a la señal a modular, la salida de la pierna (con respecto al neutro ficticio) se lleva a un valor de  $E/2$  lo que es equivalente a disparar el interruptor de la parte superior y apagar el que se encuentra en la parte inferior. En el otro caso, cuando la señal portadora es mayor a la señal a sintetizar, la salida de la pierna es  $-E/2$ , lo que equivale a disparar el interruptor inferior y apagar el superior. Nótese en la Fig. 1.11 que los pulsos son más anchos a medida que la tensión a sintetizar es mayor.

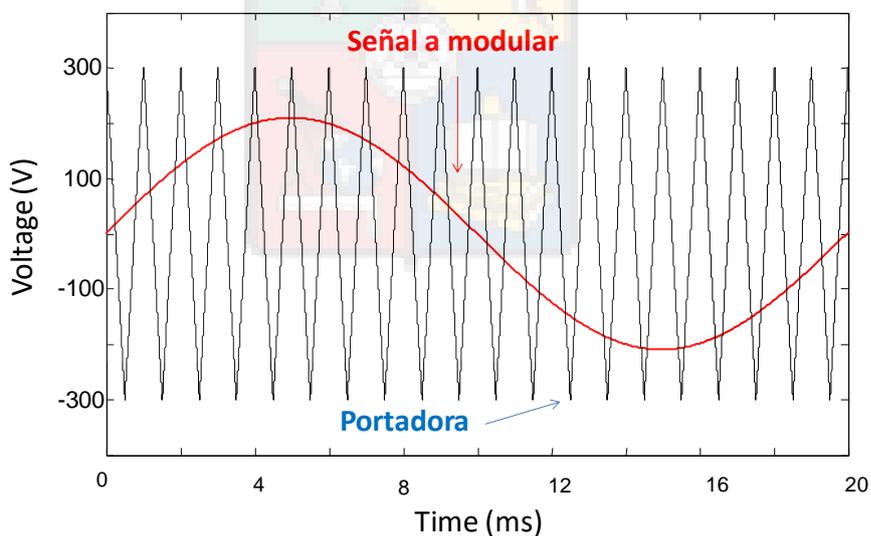


Fig. 1.10 Señal a modular y la onda portadora.

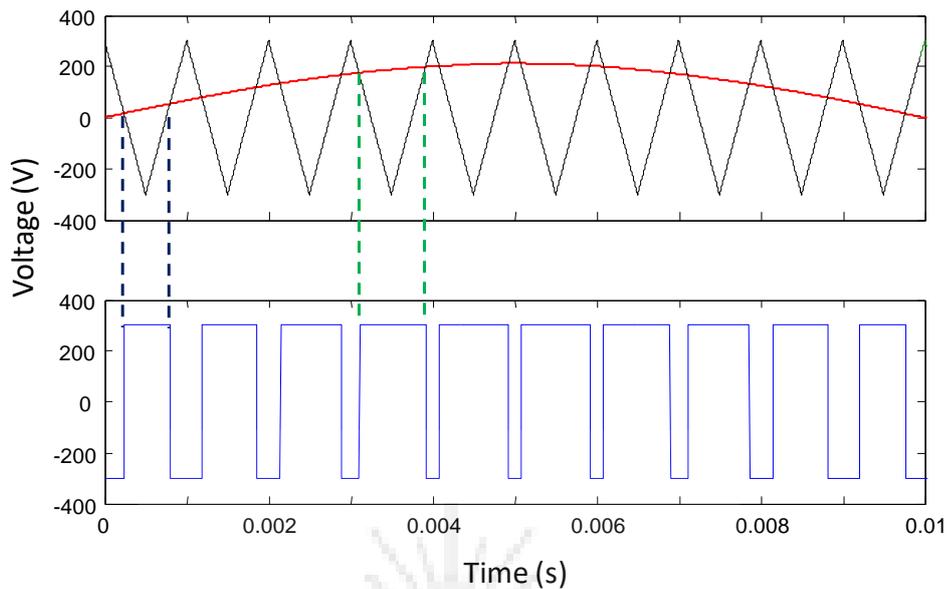


Fig. 1.11 Vista ampliada de la Fig. 1.10.

La estimación espectral de la onda de salida (fase con respecto a NF) se muestra en la Fig. 1.12. Para este caso se asume una frecuencia fundamental de  $f_e=50\text{Hz}$  y  $f_{sw}=1\text{kHz}$ . En condiciones ideales y sin considerar efectos no lineales, los armónicos se encuentran en los alrededores de la frecuencia de switching y sus múltiplos enteros ( $f_{sw}=20f_e$ ). No existen armónicos de orden 5,7,11,13, etc. en las salidas. Sin embargo, existen al menos los siguientes efectos no lineales que están presentes en los convertidores:

- El efecto denominado “pulse dropping”. Los pulsos demasiado pequeños en tiempo son eliminados por la implementación digital de la modulación (se discute después).
- Los tiempos muertos que se utilizan para evitar cortocircuitos entre el transistor superior e inferior de una determinada pierna.
- Las caídas de tensión de los semiconductores (IGBTs y diodos) que son significativas en algunos sistemas de bajo voltaje.

En general si se diseña bien el sistema, los efectos discutidos arriba generan distorsión de baja frecuencia (5to, 7mo, 11vo etc.) pero que no tienen valores muy significativos. La magnitud de los armónicos de voltaje, cercanos a  $f_{sw}$ , es alta, pero debido a que estos se encuentran en una región de alta frecuencia es relativamente simple filtrarlos. Por ejemplo, si un simple filtro pasabajo de 150Hz (primer orden) con la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (1.6)$$

se aplica a la salida del inversor, se obtiene la forma de onda que se muestra en la Fig. 1.13.

Fig. 1.14 muestra la estimación espectral correspondiente a la forma de onda de la Fig. 1.13. Al comparar la Fig. 1.12 con la Fig. 1.14 se concluye que los componentes espectrales cercanos a la frecuencia de switching han sido atenuados significativamente. Es decir, el WTHD del PWM es bajo (cuando está bien diseñado e implementado).

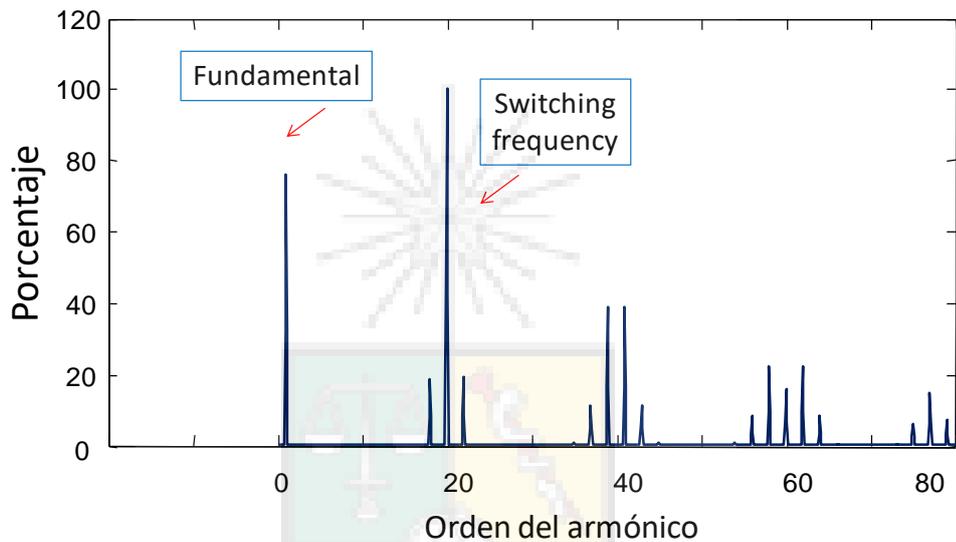


Fig. 1.12. Estimación de la onda sintetizada.

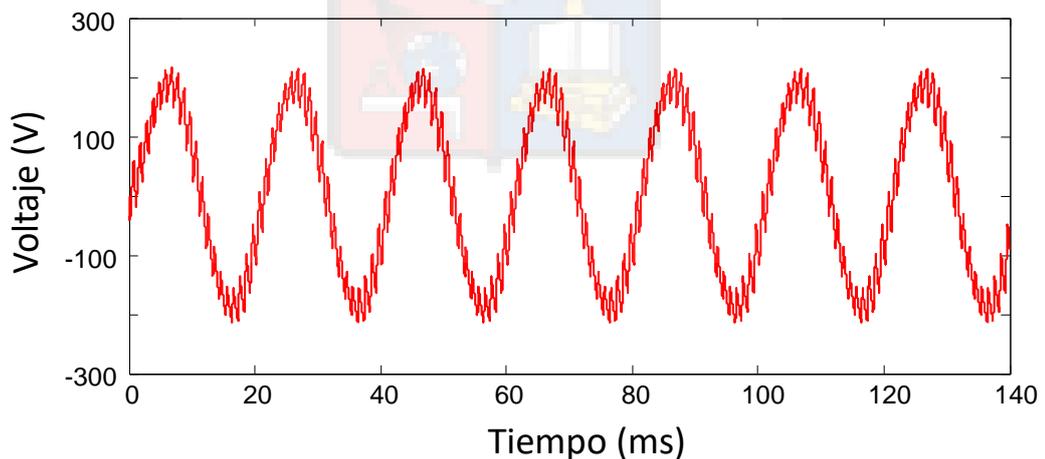


Fig. 1.13. Onda filtrada con una frecuencia de corte de 150Hz.

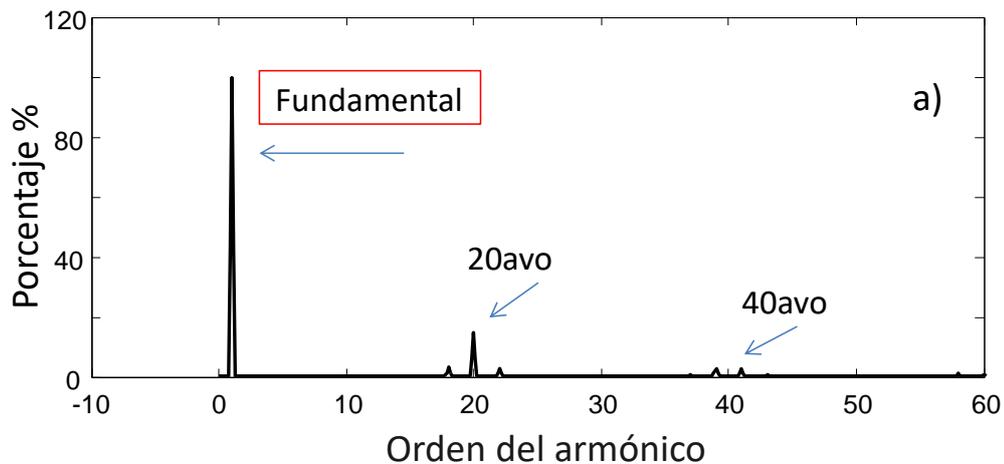


Fig. 1.14. Estimación espectral correspondiente a la forma de onda de la Fig. 1.13.

La acción de filtrado (pasa-bajo) es producida por la impedancias series de naturaleza inductiva que poseen las máquinas eléctricas. Habitualmente no es necesario conectar un filtro de potencia a la salida del variador para obtener corrientes sinusoidales de baja distorsión armónica. Si una corriente con menor THD es requerida, se recomienda aumentar la frecuencia de switching  $f_{sw}$ .

En general el análisis desarrollado en esta sección considera que la tensión del enlace de continua es estable y sin oscilaciones. En aplicaciones reales la tensión aplicada al circuito rectificador de entrada (ver Fig. 1.1) puede estar desbalanceada y esto implica la aparición de un segundo armónico de la red en la tensión  $E$ . Adicionalmente, si el banco de condensadores electrolíticos no tiene la capacidad requerida, existe un armónico de seis veces la frecuencia de la red en la tensión  $E$  que alcanza magnitudes no despreciables y se debe compensar en el algoritmo PWM.

Si no se utilizan los métodos de compensación adecuados en el algoritmo de modulación, los armónicos en la tensión del enlace de continua pueden generar armónicos adicionales en la tensión sintetizada a la salida del inversor [9][10]. Adicionalmente, en los inversores comerciales se utiliza un “tiempo muerto” (denominado *dwel-time* o *dead-time* en la literatura anglosajona) entre el encendido de un interruptor y la apertura del otro en una pierna determinada [10][11].

Si el interruptor 1 (ver Fig. 1.4 y Fig. 1.16) se dispara y el 4 se apaga, la señal de cierre del interruptor 1 se entregará con un retardo de  $t_d$   $\mu$ s, con respecto a la señal de apertura del interruptor 4. Este tiempo  $t_d$  evita que se produzca un cortocircuito en el enlace de continua, en el caso de que el interruptor 1 se active antes de que el 4 termine de apagarse. El retardo  $t_d$  depende del tiempo de apagado del interruptor estático que se esté utilizando. Por ejemplo un tiempo muerto  $t_d$  de 2-5 $\mu$ s es suficiente para un sistema típico basado en IGBTs, aunque lo correcto es verificar en la hoja de datos.

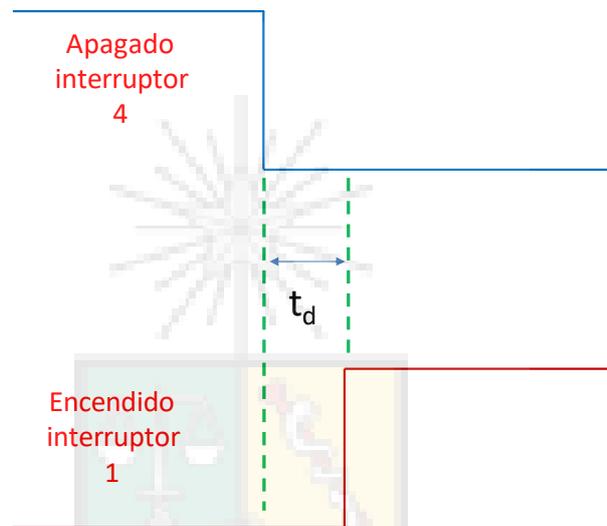


Fig. 1.15. Aplicación de tiempo muerto entre los interruptores que se encuentran en la misma pierna.

El efecto del tiempo muerto no compensado es una distorsión adicional producida en la modulación PWM [2]. Los tiempos en que un transistor permanece encendido se acortan en  $t_d$ , tal como se muestra en la Fig. 1.15. En general esta distorsión no es muy importante cuando se opera con un alto índice de modulación. Sin embargo cuando el motor opera a baja velocidad, con una baja contra fuerza electromotriz, la distorsión porcentual introducida por el tiempo muerto es habitualmente mayor. Adicionalmente, cuando la frecuencia de switching es muy alta, el tiempo muerto comienza a ser comparable con el período de la portadora generándose mayor distorsión armónica de baja frecuencia.

#### 1.4. Índice de Modulación, Sobremodulación e Inyección de Armónicos de Secuencia Cero.

El índice de modulación se define como:

$$m = \frac{2V_m}{E} \quad (1.7)$$

donde  $V_m$  es el valor máximo de la fundamental en la onda a sintetizar y  $E$  es la tensión en el enlace de continua. En general el límite máximo (teórico) del índice de modulación, cuando

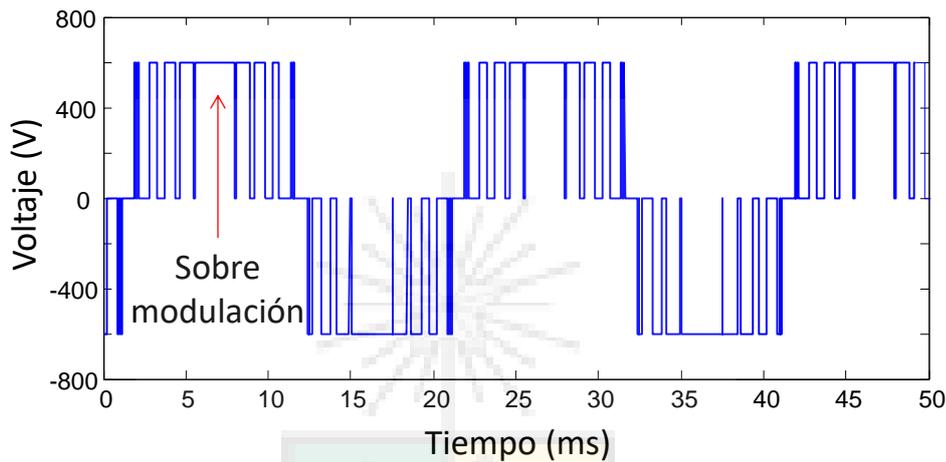


Fig. 1.16. Modulación con  $m=1.4$ .

no se considera la inyección de armónicos de secuencia cero, es 1. Cuando este límite se sobrepasa, se produce sobremodulación, lo que implica que la onda tiene mayor similitud con una onda cuadrada en el sector en que la onda a sintetizar es mayor que la portadora. Por ejemplo, la Fig. 1.16 muestra la forma de onda obtenida cuando se utiliza un índice de modulación de 1.4.

Para la forma de onda mostrada en este gráfico (voltaje línea a línea), el 5to armónico alcanza el valor de  $\approx 3\%$ . Esto se debe a que en la parte superior de la onda, cuando  $m > 1$ , la salida de la fase respectiva alcanza  $E/2$  (o  $-E/2$ ) y se mantiene en ese valor.

Además de sobremodulación, otros problemas pueden ocasionar distorsión armónica en la onda. Por ejemplo los pulsos de muy corta duración, de un tiempo menor al necesario para encender/apagar el transistor son usualmente eliminados del PWM. El pulso de la Fig. 1.17 podría no ser suficientemente ancho para operar con algunas tecnologías de interruptores estáticos (un transistor bipolar requiere un pulso mínimo de  $\approx 10-15\mu s$ ). Al eliminarse los pulsos

de corta duración, significa que la sobremodulación comienza a producirse incluso cuando la onda a sintetizar tiene un valor máximo menor a  $E/2$ .

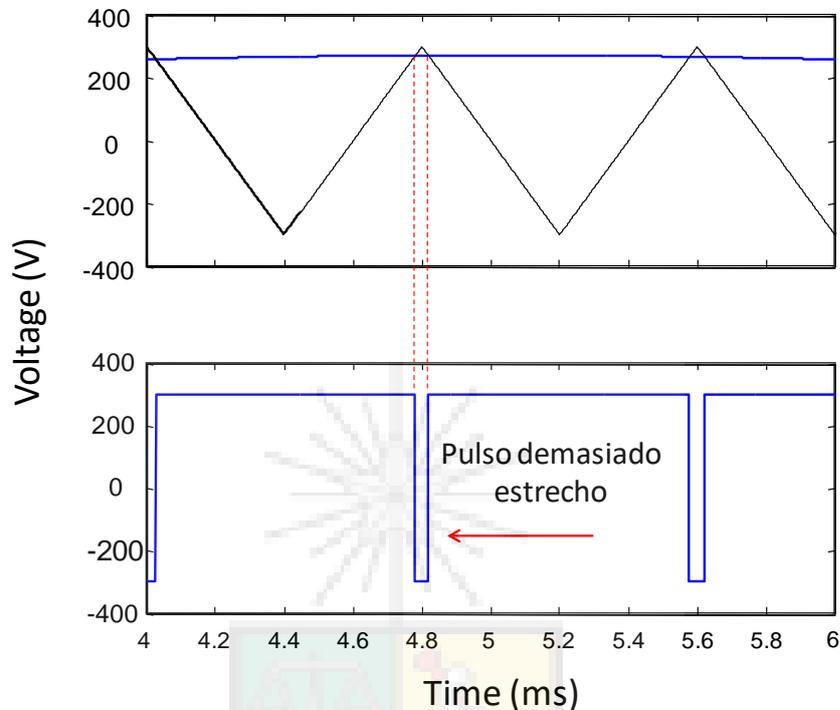


Fig. 1.17. Ejemplo de eliminación de pulso de corta duración o “pulse dropping”.

Una de las desventajas principales del PWM convencional es que el voltaje de entrada al inversor es mayor al voltaje de salida máximo aplicable al motor. Por ejemplo al alimentar el inversor con 380V se logra una tensión máxima en el enlace dc de 537V. Esto significa que la tensión máxima fase-NF de la fundamental de salida ( $m=1$ ) es  $537/2 \approx 269$ , correspondiente a un valor efectivo de  $\approx 190$ V fase-NF. Por lo tanto si se opera el inversor sin sobremodular (de lo contrario se producen armónicos de baja frecuencia en la salida), la tensión de salida se reduce en aproximadamente 14% (base 220V). Esta reducción del voltaje máximo disponible, implica que la máquina de inducción requiere operar a flujo debilitado para alcanzar la velocidad rotacional nominal. Como se discute en el apunte “Control Vectorial de Máquinas de Inducción Jaula de Ardilla”, operar un motor a flujo debilitado implica que la máquina no puede entregar torque nominal a la carga.

Unas de las técnicas utilizadas para aumentar el índice de modulación consiste en la inyección de armónicos de secuencia cero a cada una de las tensiones fase-NF a modular [2], [12-14]. En este caso la tensión a comparar con la portadora triangular reduce su valor máximo y es posible obtener un índice de modulación máximo  $m = 2/\sqrt{3}$ .

Fig. 1.18 muestra la forma de aumentar el índice de modulación considerando inyección de terceros armónicos (el tercer armónico es de secuencia cero). Figs. 1.18a y b muestran las tensiones con respecto al neutro ficticio  $V_a$  y  $V_b$ . Adicionalmente en estas figuras se muestran señales de tres veces la frecuencia fundamental (terceros armónicos) las cuales se encuentran en fase entre ellas. Cuando el tercer armónico se suma a la tensión fase-NF (con la fase adecuada) se obtiene una forma de onda “plana” en la parte superior (ver Fig. 1.18c). Esto permite modular la onda sin sobrepasar los límites de la onda portadora. El motor de inducción se alimenta con tensiones línea a línea. Debido a que los terceros armónicos se encuentran en

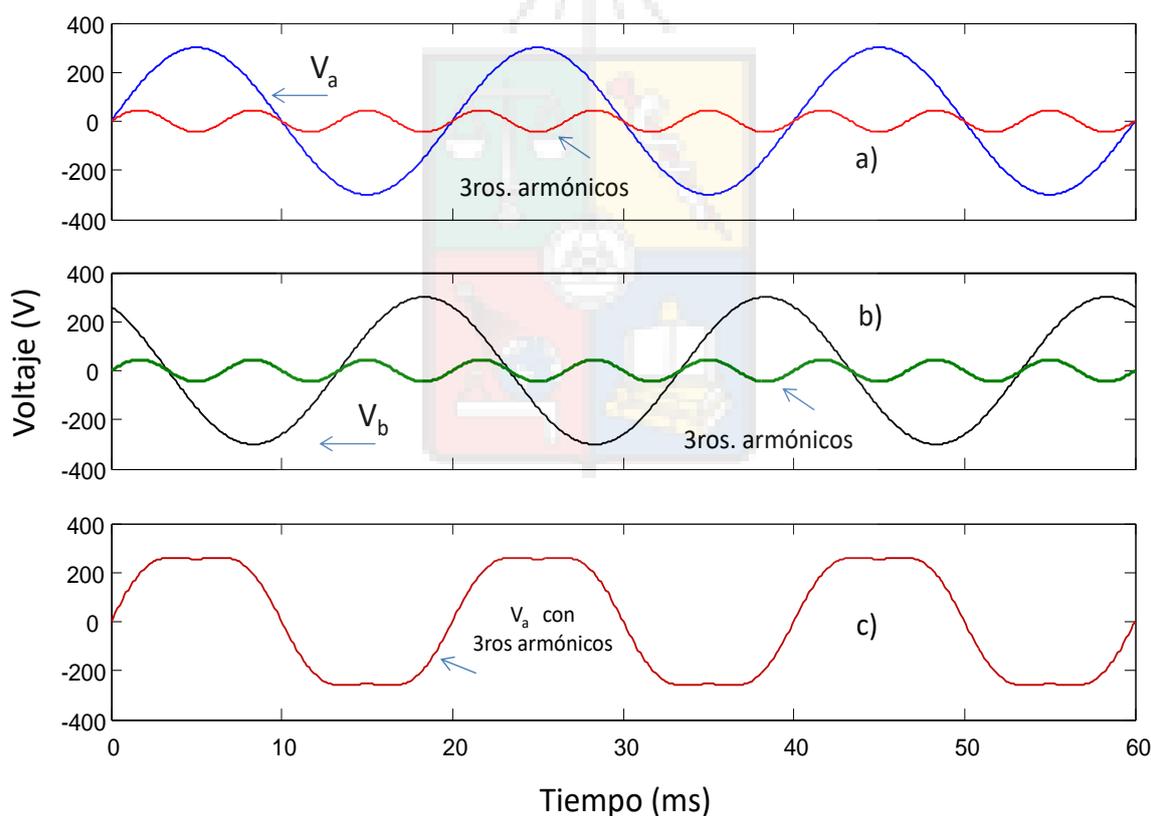


Fig. 1.18. Onda fase-neutro ficticio, considerando la inyección de terceros armónicos. a) Fundamental sin distorsión de la fase a y terceros armónicos. b) Fundamental sin distorsión de la fase b y terceros armónicos. c) Forma de onda de la tensión en la fase a + tercer armónico.

fase (ver Figs. 1.18a y b), se eliminan cuando se restan las tensiones entre dos fases, por ejemplo al calcular  $v_{ab} = v_{ao} - v_{bo}$ . Por este motivo los componentes de secuencia cero no deberían afectar la operación de la máquina.

Para aumentar el índice de modulación existe una fórmula sencilla que permite obtener a la salida del variador una señal fundamental fase-NF de  $v = 2E/\sqrt{3}$ . En este caso no solo terceros armónicos son utilizados, sino que también los armónicos de secuencia cero de orden 9, 15, 21 etc. Este método de inyección de armónicos de secuencia cero se encuentra publicado en la literatura, se denomina habitualmente “Método Min-Max” y corresponde a [2]:

$$\begin{aligned} v'_{ao} &= v_{ao} - v_o \\ v'_{bo} &= v_{bo} - v_o \\ v'_{co} &= v_{co} - v_o \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$v_o = \frac{\max(v_{ao} + v_{bo} + v_{co}) + \min(v_{ao} + v_{bo} + v_{co})}{2} \quad (1.9)$$

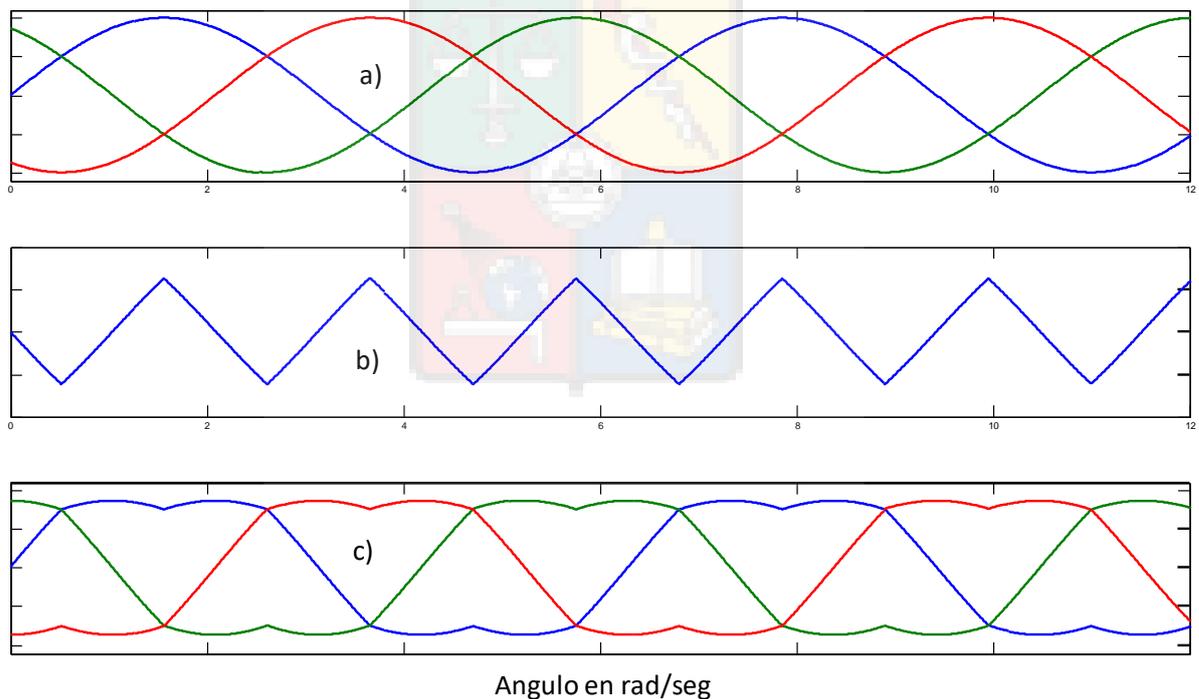


Fig. 1.19. a) Señales balanceadas entregadas por el sistema de control al modulador PWM. b) Tensión  $V_0$  calculada utilizando la expresión (1.9). c) Señales a modular calculadas utilizando (1.8), incluyendo la secuencia cero  $V_0$ .

En (1.8) los voltajes  $v_{ao}$ ,  $v_{bo}$ ,  $v_{co}$  corresponden a los voltajes de entrada fase-neutro que se ingresan al modulador. Los voltajes  $v'_{ao}$ ,  $v'_{bo}$ ,  $v'_{co}$  son los voltajes que finalmente se modulan utilizando la portadora triangular. Al efectuar implementación digital de (1.9), en cada instante de muestreo se busca el mínimo y el máximo de las señales instantáneas a modular. Con estos valores se calcula el valor de la tensión de secuencia cero ( $v_0$ ) que debe ser inyectada para obtener  $v_{ao}'$ ,  $v_{bo}'$  y  $v_{co}'$ . La secuencia cero obtenida es una onda triangular como puede observarse en la Fig. 1.19b.

Utilizando un sencillo programa de simulación es posible obtener los resultados que se muestran en la Fig. 1.20. En este grafico el valor  $E/2$  se representa como uno en por unidad. La onda a modular contiene los armónicos de secuencia cero y una fundamental de amplitud  $2/\sqrt{3} \approx 1.1547$ . El valor máximo considerando la fundamental y los armónicos de secuencia cero no supera  $E/2$  y por lo tanto no existe sobremodulación a pesar de que la tensión fundamental tiene un valor total de 1.1547. La señal de salida correspondiente a la Fig. 1.20 se muestra en la Fig. 1.21.

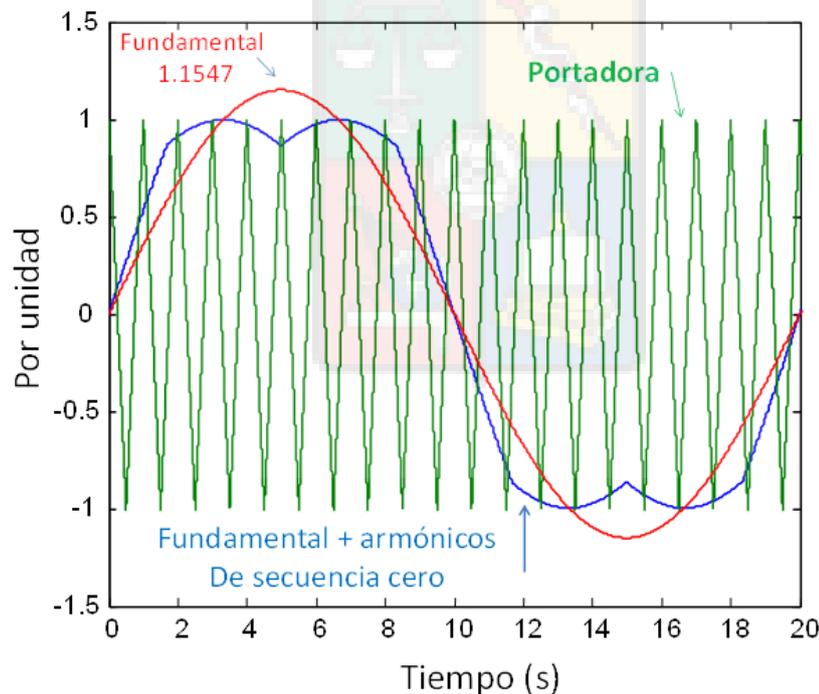


Fig. 1.20. Formas de onda fase-neutro ficticio, considerando la inyección de terceros armónicos.

La Fig. 1.22a muestra la tensión de la fase a, incluyendo armónicos de secuencia cero y la Fig. 1.22b muestra la estimación espectral. La señal de la Fig. 1.22a contiene terceros, novenos y otros armónicos de secuencia cero. Armónicos de secuencia cero de orden superior también se encuentran en la señal de la Fig. 1.22a, pero en valores pequeños casi indetectables para la rutina de estimación espectral utilizada en este apunte.

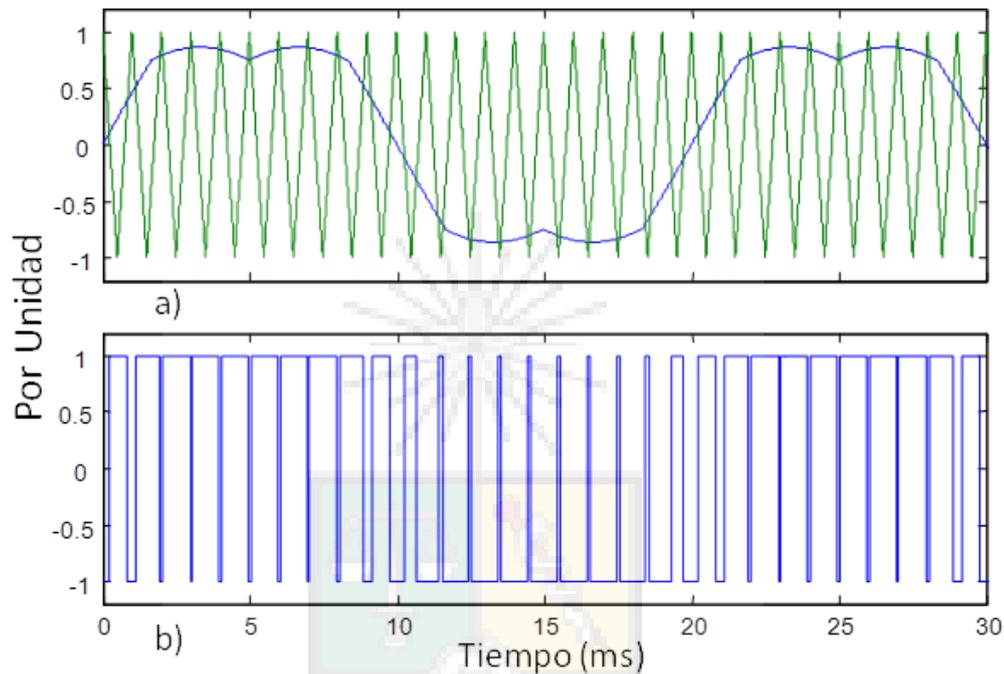


Fig. 1.21. Modulación obtenida utilizando los armónicos de secuencia cero.

Al utilizarse (1.9) se aumenta en 15.47% el valor de la fundamental obtenida. Si la entrada al variador de frecuencia es 220V efectivos fase-neutro, la salida máxima es  $190(2/\sqrt{3}) \approx 219V$  efectivos. Por lo tanto, el variador de frecuencia se comporta como un “transformador” de razón cercana a 1:1. Sin embargo se debe tomar en cuenta que los efectos no lineales, como tiempos muertos, pulse dropping, etc. reducen la ganancia del variador de frecuencia.

### 1.5 Implementación Digital, PWM Regular Asimétrico

La implementación de un esquema de PWM por muestreo natural se muestra la Fig. 1.9. Esta implementación es analógica y es inapropiada para procesadores digitales como DSP y microcontroladores. En este apunte dos metodologías de implementación digital son discutidas. Estas se denominan PWM regular asimétrico y PWM regular simétrico [1], [2], [15]

La implementación de un PWM regular asimétrico se muestra en la Fig. 1.23. Cada  $T_s/2$  se muestrea la señal a modular, la que se mantiene constante durante el cálculo. En la Fig. 1.23 se asume una señal sinusoidal, pero señales de otro tipo (por ejemplo, considerando inyección de armónicos de secuencia cero) pueden ser sintetizadas.

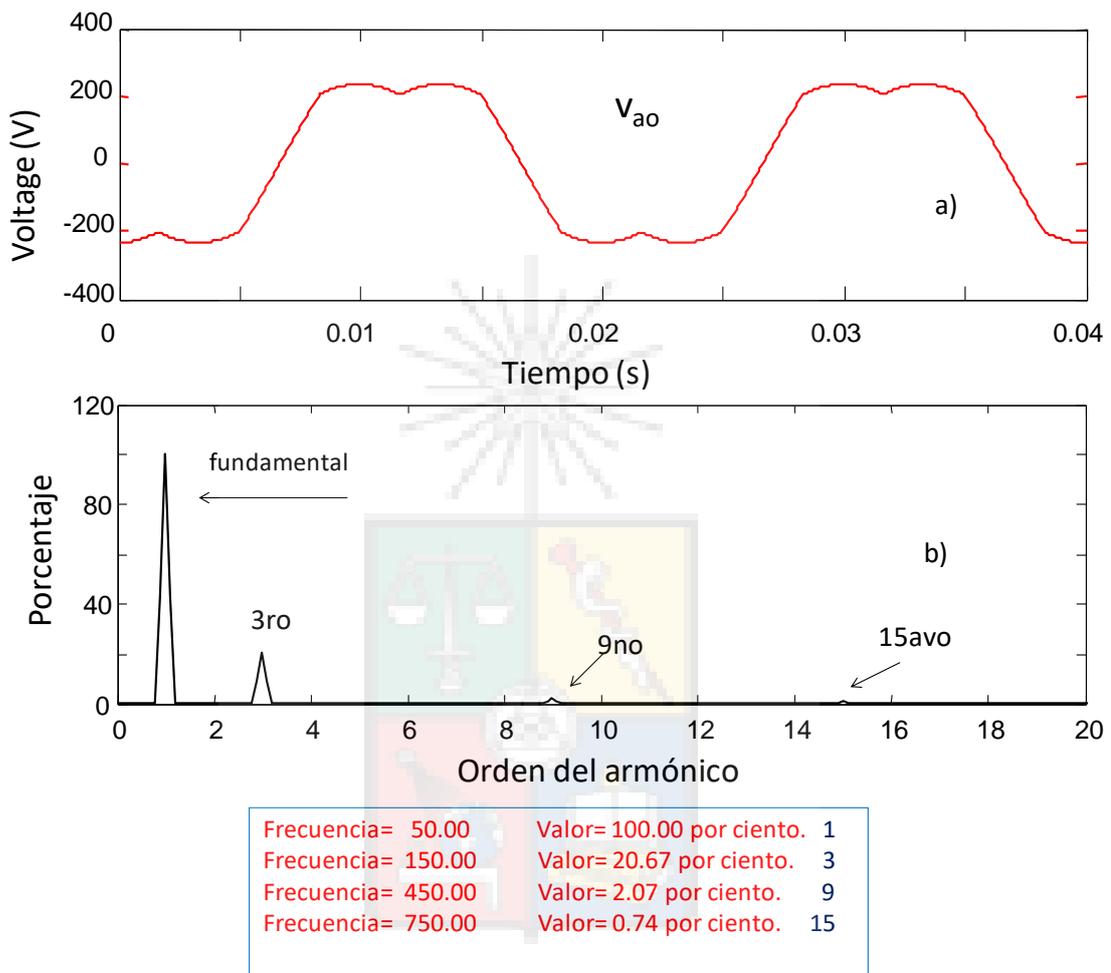


Fig. 1.22. Señal con armónicos de secuencia cero y su estimación espectral.

El algoritmo regular asimétrico calcula la intersección de la señal muestreada con la rampa positiva y negativa de la portadora. Asumiendo que los límites de la señal triangular son  $-E/2$  y  $E/2$ . La ecuación de la rampa de bajada de la señal portadora es:

$$v = -2 \frac{E}{T_s} t + \frac{E}{2} \quad (1.10)$$

De la misma forma la ecuación de la rampa positiva de la señal portadora se calcula como:

$$v = 2 \frac{E}{T_s} t - \frac{E}{2} \quad (1.11)$$

Donde el tiempo  $t$  es medido desde el instante de muestreo de la señal a modular.

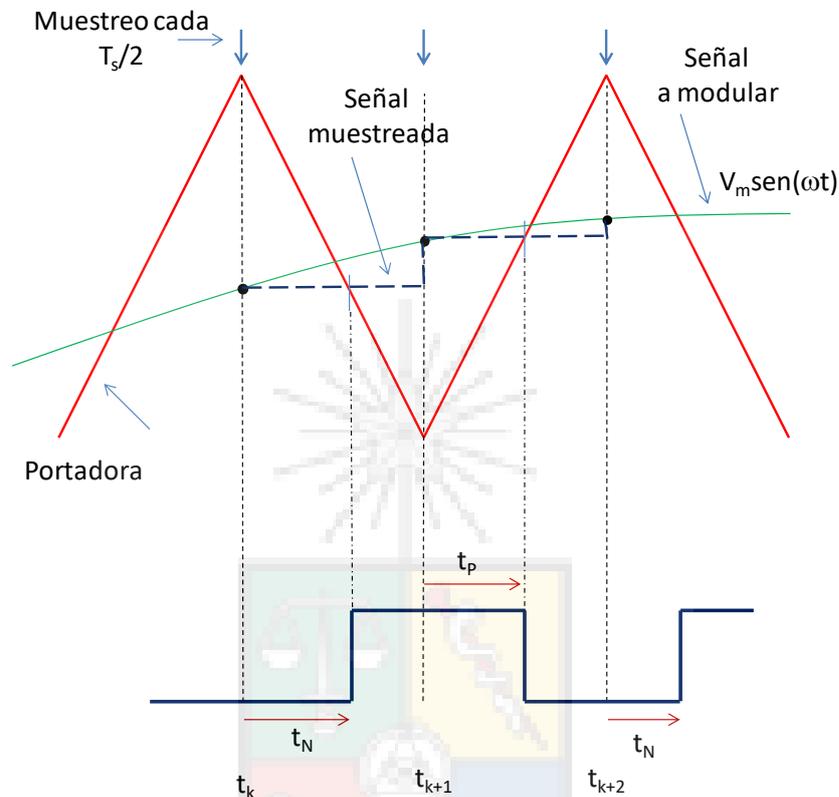


Fig. 1.23. PWM regular asimétrico.

Utilizando (1.10) es relativamente simple calcular el valor de  $t_N$ , el punto de intersección de la señal muestreada con la rampa de bajada de la señal portadora. Asumiendo que la tensión muestreada en  $t_k$  es  $v_k$ , se tiene:

$$t_N = \frac{T_s}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{v_k}{E} \right) \quad (1.12)$$

En la parte inferior de la Fig.1.23 se muestra una onda cuadrada que oscila entre cero y uno. El valor lógico de “1” implica que la salida con respecto al neutro ficticio se conecta a  $E/2$ . El valor lógico “0” implica que la salida se conecta a  $-E/2$ . Por lo tanto en  $t_N$  se produce la primera transición desde  $-E/2$  a  $E/2$  en la fase respectiva.

En la próxima muestra correspondiente a  $t=t_{k+1}$  se calcula el tiempo  $t_p$  correspondiente al punto en que la muestra  $v_{k+1}$  de la señal a sintetizar se intersecta con la rampa ascendente de la señal portadora. Asumiendo que la tensión muestreada en  $t_{k+1}$  es  $v_{k+1}$ , se tiene:

$$t_p = \frac{T_s}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{v_{k+1}}{E} \right) \quad (1.13)$$

Si es que no existe sobremodulación, los límites de  $v_k$  y  $v_{k+1}$  son:

$$(v_k, v_{k+1}) \rightarrow \left[ \frac{-E}{2} \quad \frac{E}{2} \right] \quad (1.14)$$

Utilizando (1.12) y (1.13) es posible calcular el tiempo  $t_N$  para la transición desde  $-E/2$  a  $E/2$  y luego el tiempo  $t_p$  para efectuar la transición desde  $E/2$  a  $-E/2$ . Los tiempos calculados deben ser implementados en contadores/temporizadores digitales. La tendencia moderna en control digital de convertidores PWM y máquinas rotatorias, es utilizar FPGAs (Field programmable gate arrays) para implementar el hardware digital necesario para obtener los retardos de tiempo  $t_N$  y  $t_p$ . Finalmente circuitos lógicos implementados en la FPGA son utilizados para disparar los transistores de la etapa inversora.

Existe una expresión alternativa a (1.12) y (1.13), que es habitualmente utilizada en la literatura especializada. Las tensiones  $v_k$  y  $v_{k+1}$  pueden obtenerse en función del índice de modulación como:

$$t_N = \frac{T_s}{4} (1 - m \sin(\omega t_k)) \quad (1.15)$$

$$t_p = \frac{T_s}{4} (1 + m \sin(\omega t_{k+1})) \quad (1.16)$$

Donde  $m$  es el índice de modulación definido de acuerdo a (1.7). Las tensiones  $v_k$  y  $v_{k+1}$  se calculan como:

$$v_k = v_m \sin(\omega t_k)$$

$$v_{k+1} = v_m \sin(\omega t_{k+1}) \quad (1.17)$$

### 1.6 PWM Regular Simétrico

El algoritmo del PWM regular simétrico se basa en el esquema mostrado en la Fig. 1.24. En este caso la frecuencia de muestreo es igual a la frecuencia de switching. Los puntos de intersección de la señal  $v_k$  con las pendientes negativas y positivas de la señal portadora se calculan como:

$$t = \frac{T_s}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{v_k}{E} \right) \quad (1.18)$$

$$t_p = \frac{T_s}{2} \left( 1 + \frac{2v_k}{E} \right) \quad (1.19)$$

Utilizando el índice de modulación  $m$ , las expresiones (1.18) y (1.19) se pueden escribir como:

$$t = \frac{T_s}{4} (1 - m \sin(\omega t_k)) \quad (1.20)$$

$$t_p = \frac{T_s}{2} (1 + m \sin(\omega t_k)) \quad (1.21)$$

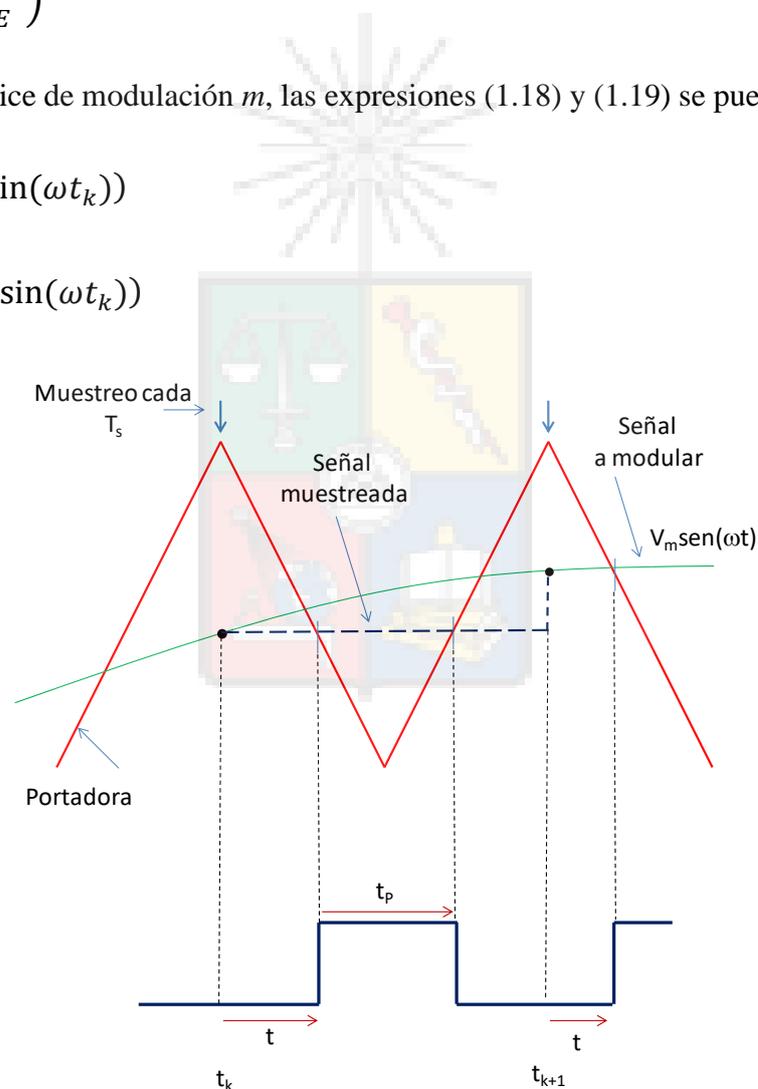


Fig. 1.24. PWM regular simétrico.

Nuevamente el valor lógico “1” significa que la tensión fase-NF respectiva es  $E/2$ . Al contrario, cuando el valor lógico es “0” significa que la tensión fase-NF es  $-E/2$  (ver señal cuadrada en la parte inferior de la Fig. 1.24).

El PWM regular simétrico tiene ventajas y desventajas cuando se compara con el PWM regular asimétrico. En el PWM regular asimétrico se efectúan los cálculos cada  $T_s/2$ , lo que implica una mayor carga para el procesador, pero se obtiene una representación digital más precisa de la señal a modular (ver Fig. 1.25).

El PWM simétrico se muestrea una vez por ciclo de la señal portadora y su carga computacional, en términos de multiplicaciones y divisiones por período de muestreo es la mitad de aquella obtenida en el PWM regular asimétrico. Sin embargo al muestrear solo una vez por ciclo el PWM digital utiliza una representación menos precisa de la señal a modular. Las diferencias de las señales a modular con PWM regular simétrico y regular asimétrico se muestran en la Fig. 1.25.

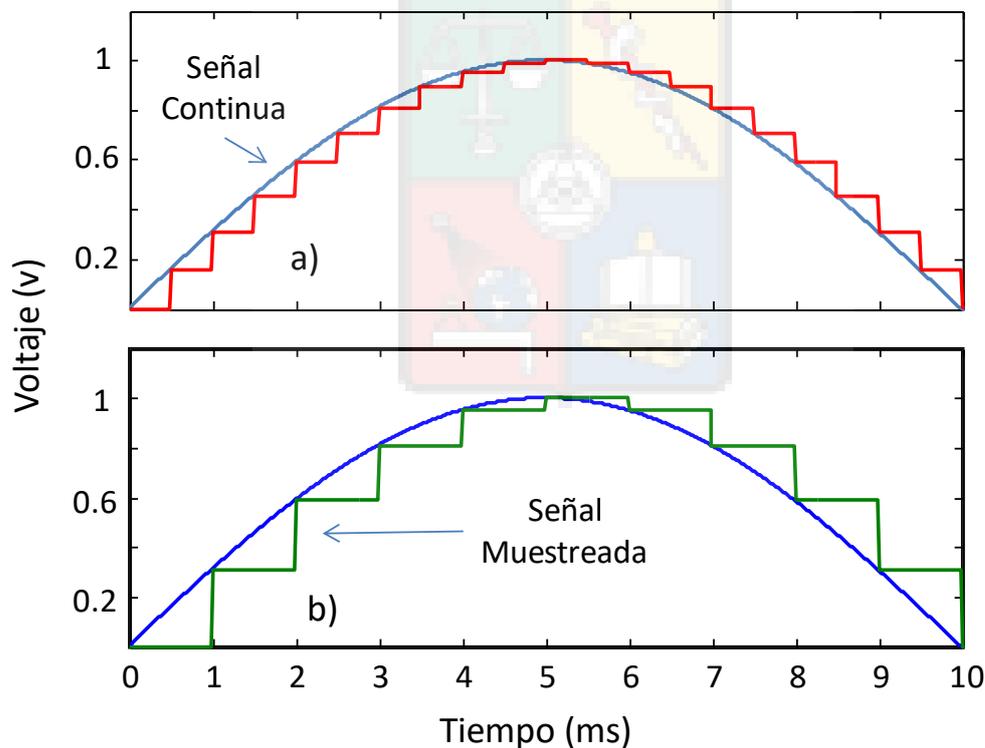


Fig. 1.25. Implementación digital de PWM. A) PWM asimétrico regular. B). PWM simétrico regular.

## Capítulo II

# VECTORES ROTATORIOS Y COMPONENTES DE SECUENCIA.

## II. Vectores Rotatorios

### 2.1 Introducción a Vectores Rotatorios

Uno de los métodos de modulación más utilizado corresponde al denominado Space Vector Modulation (SVM) [1], [2], [5], [16], conocido en el idioma castellano como “modulación por vectores espaciales” o “modulación vectorial”. El concepto de modulación vectorial está relacionado al concepto de vectores rotatorios. Esto a su vez están muy relacionado con el concepto de flujo rotatorio utilizado en el análisis de máquinas eléctricas.

Para entender el concepto de flujo rotatorio, se asume una máquina trifásica con devanados en estrella, operando con flujos balanceados, es decir el módulo del flujo  $\psi_m$  es el mismo en las tres fases y existe un desfase de  $120^\circ$  entre ellos. La figura 2.1 muestra esta representación:

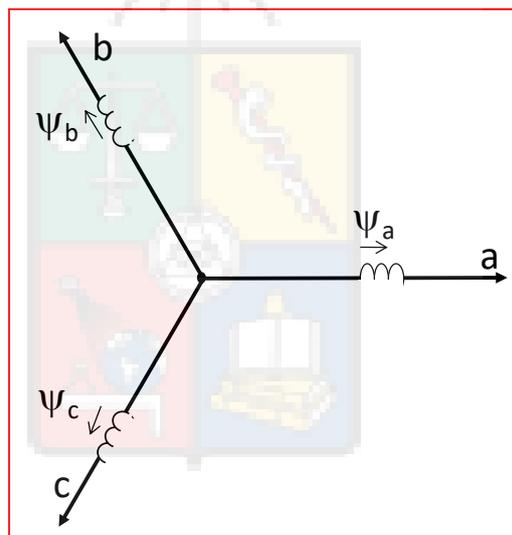


Fig. 2.1. Flujos balanceados desfasados 120 grados.

Utilizando coordenadas polares, donde la parte real es el eje de abscisas (X) y el componente imaginario  $j$  es el eje de ordenadas (Y), se tiene:

$$\underline{\psi} = \psi_a e^{j0} + \psi_b e^{j2\pi/3} + \psi_c e^{-j2\pi/3} \quad (2.1)$$

Donde:

$$\psi_a = \psi_m \cos(\omega t)$$

$$\psi_b = \psi_m \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad (2.2)$$

$$\psi_c = \psi_m \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

Al utilizar (2.2) en (2.1) se tiene:

$$\underline{\psi} = \psi_m \cos(\omega t) e^{j0} + \psi_m \cos(\omega t - 2\pi/3) e^{j2\pi/3} + \psi_m \cos(\omega t + 2\pi/3) e^{-j2\pi/3} \quad (2.3)$$

Ecuación (2.3) es relativamente simple de solucionar. Con algo de pirotecnia matemática y utilizando la identidad  $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$  se obtiene:

$$\underline{\psi} = \frac{3}{2} \psi_m e^{j(\omega t)} \quad (2.4)$$

La información importante que entrega (2.4) es que la suma de tres vectores, de igual magnitud, desfasados entre sí 120 grados espaciales y a su vez desfasados en 120 grados en el tiempo (ver (2.2)) produce un vector giratorio de módulo constante, cuyo ángulo con respecto al vector de referencia es proporcional a la frecuencia de operación.

## 2.2 Transformación $\alpha$ - $\beta$ .

La ecuación 2.4 indica que en coordenadas polares, el vector flujo  $\underline{\psi}$  puede ser representado por una parte real y otra imaginaria. Convencionalmente el eje real se denomina como  $\alpha$  y al eje imaginario se le denomina  $\beta$  (existen otras convenciones, particularmente entre autores alemanes). Por lo tanto, utilizando la identidad de Euler, el flujo se puede expresar como:

$$\underline{\psi} = \psi_\alpha + j\psi_\beta = \frac{3}{2} (\psi_m \cos(\omega t) + j\psi_m \sin(\omega t)) \quad (2.5)$$

La transformada  $\alpha$ - $\beta$  es una transformación de tres señales a dos, comúnmente denominada de  $a$ - $b$ - $c$  a  $\alpha$ - $\beta$ . En algunas publicaciones se denomina al sistema  $a$ - $b$ - $c$  como “coordenadas naturales” [13]. En general la transformación  $a$ - $b$ - $c$ / $\alpha$ - $\beta$  se puede representar esquemáticamente como se muestra en la Fig. 2.2.

La transformada de 3 a 2 es posible debido a que el sistema de coordenadas a-b-c tiene tres variables, pero solo dos de ellas son linealmente independientes. Eso se debe a que si el sistema es balanceado  $\psi_a + \psi_b + \psi_c = 0$  y  $\psi_b = -(\psi_b + \psi_c)$ . Por lo tanto, se requieren solo dos variables para representar el sistema a-b-c sin neutro.

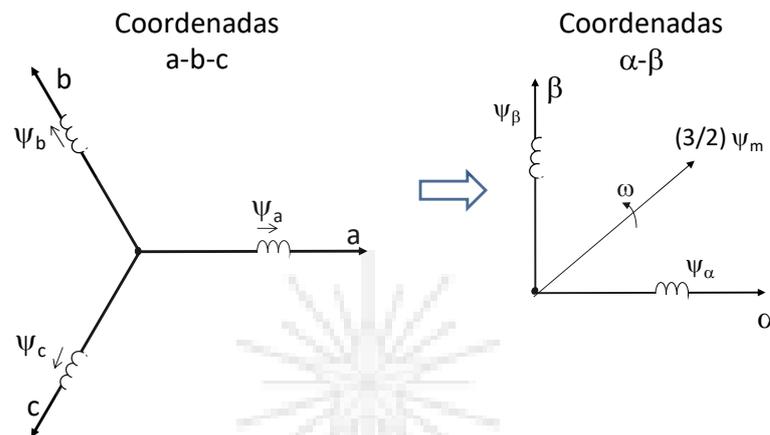


Fig. 2.2 Transformada a-b-c a  $\alpha$ - $\beta$

Utilizando trigonometría, los valores  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  y  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$  y las Figs. 2.1 y 2.2, el cambio de coordenadas se puede expresar matemáticamente como:

$$\begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La transformación desde  $\alpha$ - $\beta$  a coordenadas a-b-c se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/\sqrt{3} \\ -1/3 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La transformada  $\alpha$ - $\beta$ , es también denominada transformada de Clarke (en honor a Edith Clarke, la primera mujer en ser contratada como ingeniero eléctrico en EEUU en 1921). La transformada de Clarke es una transformación lineal, y como tal no es única. La transformación representada en (2.6) conserva el valor del flujo rotatorio, y era utilizada para analizar máquinas eléctricas, aunque en la actualidad solo muy pocos académicos la utilizamos. La más conocida

es la que conserva la magnitud del flujo aplicado a cada devanado. En este caso se aplica un escalar a (2.6) y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Cuando se utiliza esta expresión se cumple que  $\sqrt{\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2} = \psi_m$ .

Las transformadas (2.6) y (2.8) no son conservativas en potencia. Por este motivo existe una tercera transformada utilizada en el libro “Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning” de Akagi et al, donde se propone utilizar:

$$\begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Esta es invariante en potencia. Por ejemplo la potencia activa trifásica total, se puede calcular en función de los componentes  $\alpha$ - $\beta$  de las corrientes y voltajes [calculados en (2.9)] utilizando:

$$P = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta \quad (2.10)$$

¿Cuál de las tres es correcta?. Todas y dependiendo de lo que se debe analizar algunas pueden simplificar considerablemente el trabajo. Cualquiera que se utiliza significa que se debe (por supuesto) utilizar la transformada inversa correspondiente cuando se retorna de  $\alpha$ - $\beta$  a  $a$ - $b$ - $c$ . Tenga en cuenta que la más utilizada en textos y publicaciones es la transformada lineal mostrada en (2.8).

La transformada  $\alpha$ - $\beta$  se puede aplicar a voltajes, corrientes, cualquier variable trifásica. El concepto de flujo rotatorio es más fácil de entender que un voltaje rotatorio. Sin embargo, es posible crear un voltaje rotatorio ficticio como concepto matemático definiendo:

$$\underline{v} = k \left( v_a e^{j0} + v_b e^{j2\pi/3} + v_c e^{-j2\pi/3} \right) = v_\alpha + jv_\beta \quad (2.11)$$

Donde el valor de  $k$  depende de cuál de las tres transformadas se desea utilizar.

### 2.3. Secuencia Positiva, Negativa y Cero

La expresión (2.3) produce un vector de secuencia positiva  $\underline{\psi} = \frac{3}{2}\psi_m e^{j(\omega t)}$  debido a que los flujos están balanceados. Como se indicó anteriormente, el término balanceado implica que las magnitudes del flujo en cada eje son iguales y el ángulo de fase entre ellos es 120 grados. ¿Qué sucede si se encuentran desbalanceados?. Por ejemplo, asumiendo que:

$$\psi_a = \psi_m \cos(\omega t)$$

$$\psi_b = (\psi_m + \Delta\psi) \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad (2.12)$$

$$\psi_c = \psi_m \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

Al calcular el vector total se [utilizando por simplicidad (2.6)] se tiene:

$$\underline{\psi} = k (\psi_a e^{j0} + \psi_b e^{j2\pi/3} + \psi_c e^{-j2\pi/3}) = \frac{3}{2}\psi_m e^{j\omega t} + \Delta\psi \cos(\omega t - 2\pi/3) e^{j2\pi/3}$$

$$\underline{\psi} = \frac{3}{2}\psi_m e^{j\omega t} + \Delta\psi \left( \frac{e^{j(\omega t - 2\pi/3)} + e^{-j(\omega t - 2\pi/3)}}{2} \right) e^{j2\pi/3}$$

$$\underline{\psi} = \left( \frac{3}{2}\psi_m + \frac{\Delta\psi}{2} \right) e^{j\omega t} + \frac{\Delta\psi}{2} e^{-j(\omega t + 2\pi/3)} \quad (2.13)$$

Nótese que en (2.13) aparece un término que gira en sentido horario con respecto al sentido mostrado en la Fig. 2.2. Este término  $\frac{\Delta\psi}{2} e^{-j(\omega t + 2\pi/3)}$  es un flujo de secuencia negativa ya que por mera definición el término  $e^{j\omega t}$  es la secuencia positiva y el término  $e^{-j\omega t}$  gira en el otro sentido. El flujo de secuencia negativa produce algunos problemas en las máquinas, pero eso lo discutiremos después.

Existe otro componente de secuencia que es homopolar (todos los polos o fases tienen el mismo componente). Este es el componente de secuencia cero. Utilizando corrientes en este caso (aunque puede ser cualquier variable eléctrica) se define la corriente de secuencia cero como:

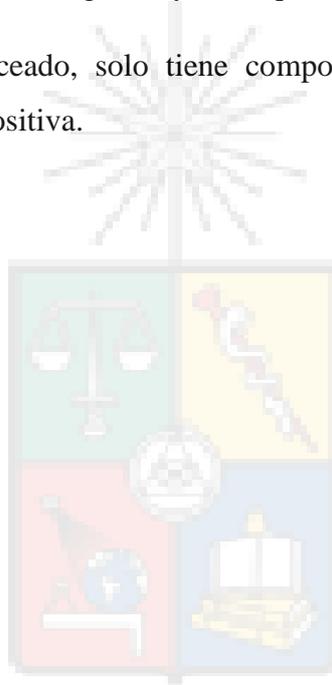
$$i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) \quad (2.14)$$



La secuencia cero no puede existir en cualquier sistema y normalmente requiere una topología física adecuada. Por ejemplo si no existe un cable de neutro la corriente de secuencia cero no puede circular, y por lo tanto no existe (es decir  $i_a + i_b + i_c = 0$ ). Distinto es el caso de los voltajes donde podemos definir un neutro ficticio, como se realizó anteriormente y aplicar tensiones de secuencia cero a ese sistema.

¿Pueden existir corrientes desbalanceadas sin un neutro?. La respuesta es si, ya que la secuencia negativa es también un componente de desbalance y no requiere de un neutro para circular. Matemáticamente se puede tener un sistema con  $i_a + i_b + i_c = 0$  sin que las magnitudes de la tres corrientes sean iguales y/o sin que el desfase entre ellas sea 120 grados.

Nótese que un sistema balanceado, solo tiene componentes de una sola secuencia, que normalmente se define como positiva.



## Capítulo III

# ALGORITMO DE MODULACIÓN VECTORIAL O “SPACE VECTOR MODULATION” (SVM)

### III. Modulación Vectorial (SVM)

Para analizar el algoritmo SVM se utiliza un arreglo similar al mostrado en la Fig. 1.4, el cual por conveniencia se repite en la Fig. 3.1. Seis interruptores estáticos se muestran en este gráfico. Un neutro ficticio es utilizado en el enlace de continua para explicar el algoritmo SVM.

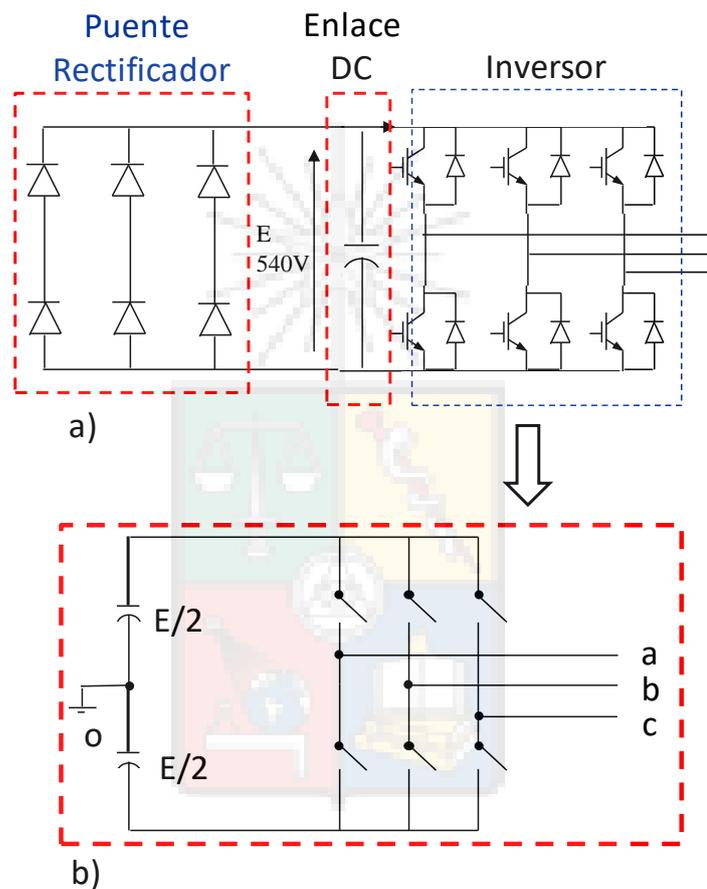


Fig. 3.1 Etapa de salida del variador de frecuencia. a) Variador de frecuencia. b) Inversores de salida compuesto de seis interruptores estáticos.

En la etapa inversora de la Fig. 3.1, se definen ocho “combinaciones factibles”. Las combinaciones no factibles son aquellas que consideran los dos interruptores de la misma pierna abiertos y los dos interruptores de la misma pierna cerrados. De esta forma las combinaciones posibles de ser realizadas en el inversor de la Fig. 3.1b corresponden a los mostrados en la Fig.



3.2. El total de vectores “factibles” es ocho, de los cuales seis son denominados vectores activos y los dos últimos se denominan vectores nulos.

Utilizando los vectores activos y nulos que se encuentran en las Fig. 3.2, se puede implementar la Tabla 3.1. En este apunte el módulo y ángulo de cada vector se calcula utilizando la transformada  $\alpha$ - $\beta$ :

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha} \\ V_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ao} \\ V_{bo} \\ V_{co} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Aunque por supuesto cualquiera de las transformadas  $\alpha$ - $\beta$  utilizadas anteriormente puede utilizarse. Los valores de  $v_{a0}$ ,  $v_{b0}$ ,  $v_{c0}$  para cada combinación factible del SVM se muestran en la Fig. 3.2. Utilizando (3.1)-(3.2) se obtienen los vectores que se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Resumen de los vectores obtenidos desde las Figs. 3.2

| Vector | $V_{ao}$ | $V_{bo}$ | $V_{co}$ | $V_{ab}$ | $V_{bc}$ | $V_{ca}$ | Módulo | Ángulo Grados |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|---------------|
| 1      | $E/2$    | $-E/2$   | $-E/2$   | $E$      | $0$      | $-E$     | $E$    | $0$           |
| 2      | $E/2$    | $E/2$    | $-E/2$   | $0$      | $E$      | $-E$     | $E$    | $60$          |
| 3      | $-E/2$   | $E/2$    | $-E/2$   | $-E$     | $E$      | $0$      | $E$    | $120$         |
| 4      | $-E/2$   | $E/2$    | $E/2$    | $-E$     | $0$      | $E$      | $E$    | $180$         |
| 5      | $-E/2$   | $-E/2$   | $E/2$    | $0$      | $-E$     | $E$      | $E$    | $240$         |
| 6      | $E/2$    | $-E/2$   | $E/2$    | $E$      | $-E$     | $0$      | $E$    | $300$         |
| 7      | $E/2$    | $E/2$    | $E/2$    | $0$      | $0$      | $0$      | $0$    | X             |
| 8      | $-E/2$   | $-E/2$   | $-E/2$   | $0$      | $0$      | $0$      | $0$    | X             |

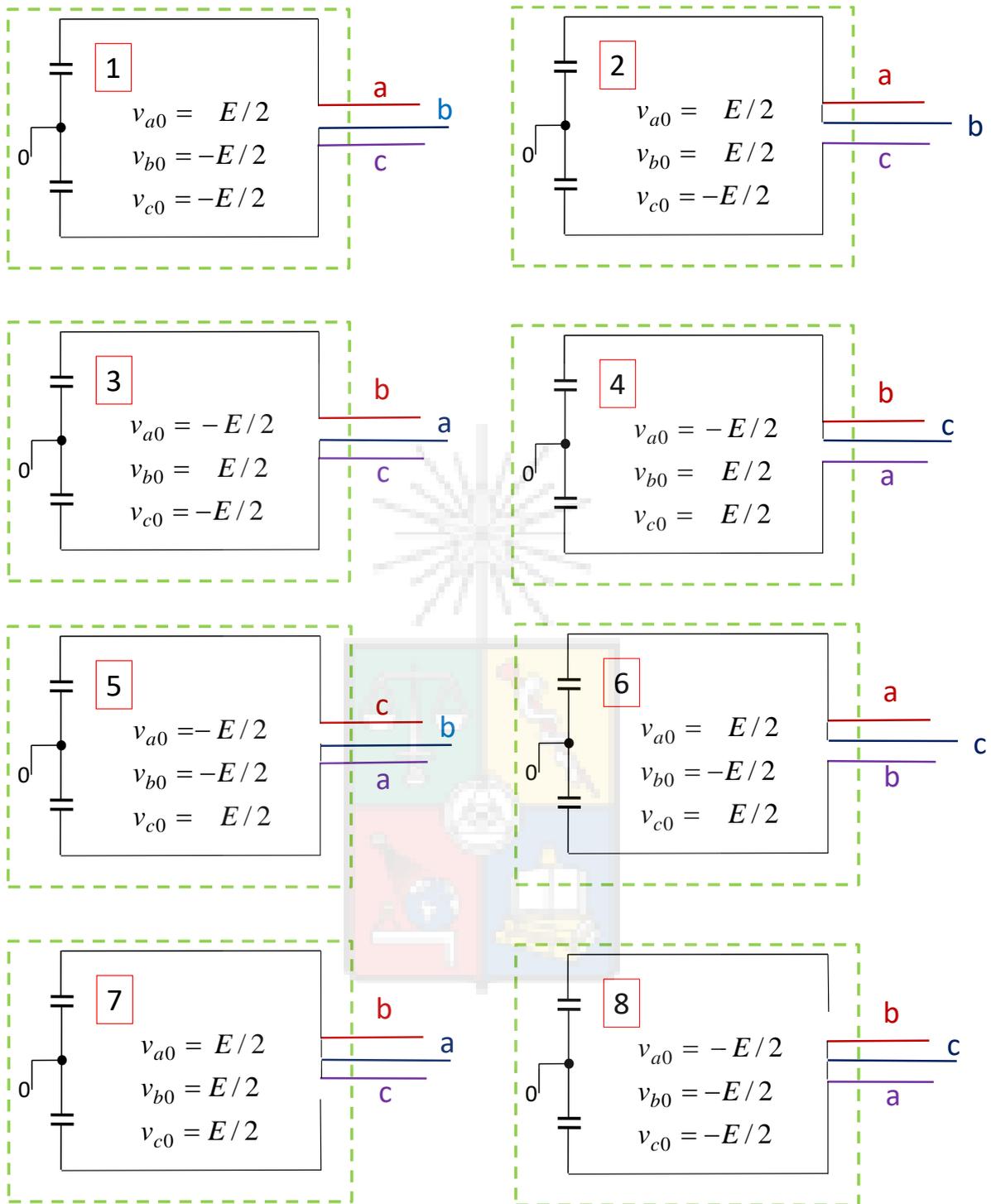


Fig. 3.2. Combinaciones factibles obtenidas con los seis interruptores estáticos mostrados en la Fig. 3.1b

El módulo y ángulo de cada vector se pueden calcular utilizando las ecuaciones:

$$|V| = \sqrt{V_{\alpha}^2 + V_{\beta}^2} \quad \theta_e = \tan^{-1}(V_{\beta} / V_{\alpha}) \quad (3.2)$$

Recuerde que el potencial al que se encuentra el neutro ficticio no tiene importancia al analizar la operación normal del motor, debido a que la carga se alimenta con tensiones fase a fase. Tome en cuenta que para algunos efectos, como por ejemplo al analizar fallas en la aislación del motor, el voltaje de secuencia cero aplicado si puede ser importante.

La función  $\tan^{-1}$  utilizada en (3.2), corresponde a la función arco-tangente de 4 cuadrantes, definida habitualmente como  $\text{atan2}$  en los sistemas basados en DSP Texas Instruments. El DSP (Digital Signal Processor) utilizado en los prototipos implementados por nuestro grupo de investigación corresponde a la tarjeta TI DSK6713, 1350MFLOP de alta velocidad, programable en lenguaje C. Una FPGA ACTEL A3P400-PQG208 de 400.000 compuertas es utilizada para obtener los disparos de los transistores e implementar los contadores/temporizadores requeridos en el algoritmo SVM.

Los vectores 1-8 de la Fig. 3.2, se pueden mostrar como módulo y ángulo en un sistema de ejes estacionarios  $\alpha$ - $\beta$ , tal como se observa en la Fig. 3.3.

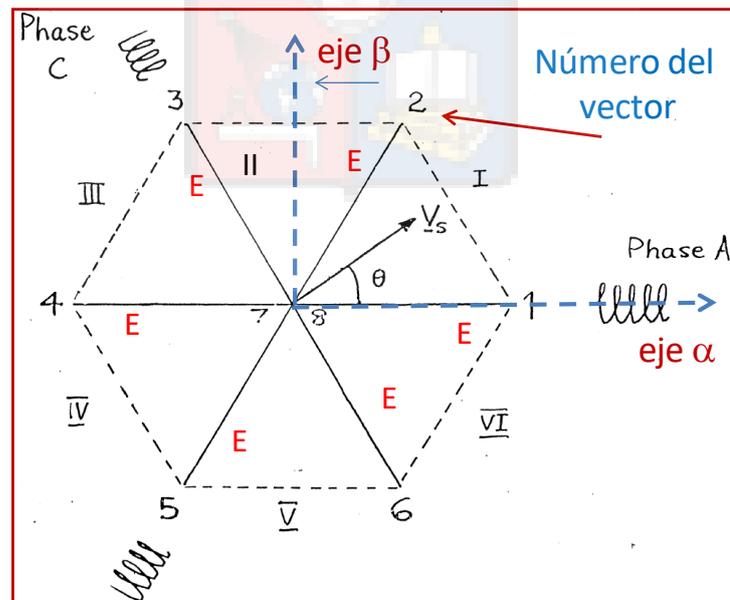


Fig. 3.3. Vectores de la Tabla 3.1 en coordenadas  $\alpha$ - $\beta$ .

Los seis vectores activos en la Fig. 3.3, forman seis sectores que se muestran en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Resumen de los sectores producidos.

| Sector | ángulo inicial<br>grados | ángulo final<br>grados | Vectores  |
|--------|--------------------------|------------------------|-----------|
| I      | 0                        | 60                     | $V_1-V_2$ |
| II     | 60                       | 120                    | $V_2-V_3$ |
| III    | 120                      | 180                    | $V_3-V_4$ |
| IV     | 180                      | 240                    | $V_4-V_5$ |
| V      | 240                      | 300                    | $V_5-V_6$ |
| VI     | 300                      | 360                    | $V_6-V_1$ |

El voltaje a sintetizar en los terminales  $a-b-c$  del conversor PWM se puede representar en notación vectorial como:

$$\underline{v}_s = \frac{3}{2} v_m e^{j\omega_e t + \theta} \quad (3.3)$$

donde  $v_m$  es el voltaje máximo de la señal de salida (fase-NF) y  $\theta$  es un ángulo arbitrario. Por lo tanto el vector voltaje de salida se mueve con una velocidad rotacional  $\omega_e$  entre los seis sectores definidos en la Tabla 3.2. Este voltaje se puede sintetizar utilizando los dos vectores activos correspondientes al sector en que se encuentre  $\underline{v}_s$ . En el caso mostrado en la Fig. 3.3, el vector  $\underline{v}_s$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores  $v_1$  y  $v_2$  mas los vectores nulos  $v_7$  y  $v_8$  de la tabla 3.1.

### 3.2 Cálculo de los Ciclos de Trabajo de los Vectores.

En esta sección se asume que se desea sintetizar un vector  $V_s$  que se encuentra entre los vectores  $V_1$  y  $V_2$  tal como se muestra en la Fig. 3.3. Los ciclos de trabajo son  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , correspondientes a los vectores nulos y vectores activos  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente. El ciclo de trabajo  $\delta_i$  se puede definir como:

$$\delta_i = \frac{\text{Tiempo Ocupado por Vector } V_i}{\text{Tiempo Total disponible}} \quad (3.4)$$

Es decir el ciclo de trabajo  $\delta_i$  es la fracción del tiempo  $T_s$  (o tiempo total) que está siendo utilizado por el vector  $v_i$ . Como se señaló anteriormente a  $f_{sw}$  se le denomina frecuencia de switching. Por ejemplo si  $\delta_i=0.5$  y la frecuencia de switching es 2kHz entonces el vector  $V_1$  ocupa la mitad del tiempo o  $250\mu s$  de este período  $T_s$  en particular.

Frecuentemente la frecuencia de muestreo y la frecuencia de switching son idénticas. Teóricamente  $f_{sw}$  podría ser una fracción de la frecuencia de muestreo. Por ejemplo en el PWM regular asimétrico discutido en la sección 1.5, la frecuencia de la portadora triangular es la mitad de la frecuencia de muestreo.

Los ciclos de trabajo están sujetos a la siguiente restricción.

$$\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = 1 \quad (3.5)$$

Para sintetizar el vector  $V_s$  se aplican fracciones  $\delta_1 V_1$  y  $\delta_2 V_2$  de los vectores activos. La ecuación utilizada para sintetizar  $V_s$  se puede obtener aplicando simples funciones trigonométricas a los vectores de la Fig. 3.4 :

$$V_s = \delta_1 V_1 \cos \theta + \delta_2 V_2 \cos(\pi/3 - \theta) \quad (3.6)$$

recordando que los módulos de todos los vectores son iguales a  $E$  (ver Tabla 3.1), (3.6) se puede escribir como:

$$V_s = \delta_1 E \cos \theta + \delta_2 E \cos(\pi/3 - \theta) \quad (3.7)$$

se puede obtener otra ecuación considerando que los componentes que se encuentran en el eje perpendicular (eje  $N$ ) al vector  $V_s$  deben anularse (por lo tanto  $V_{z1}=V_{z2}$  en Fig. 3.4). Matemáticamente esto se obtiene como:

$$\delta_1 E \text{sen}(\theta) = \delta_2 E \text{sen}(\pi/3 - \theta) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 \frac{\text{sen}(\pi/3 - \theta)}{\text{sen}(\theta)} \quad (3.8)$$

Utilizando (3.8) en (3.7) se llega a:

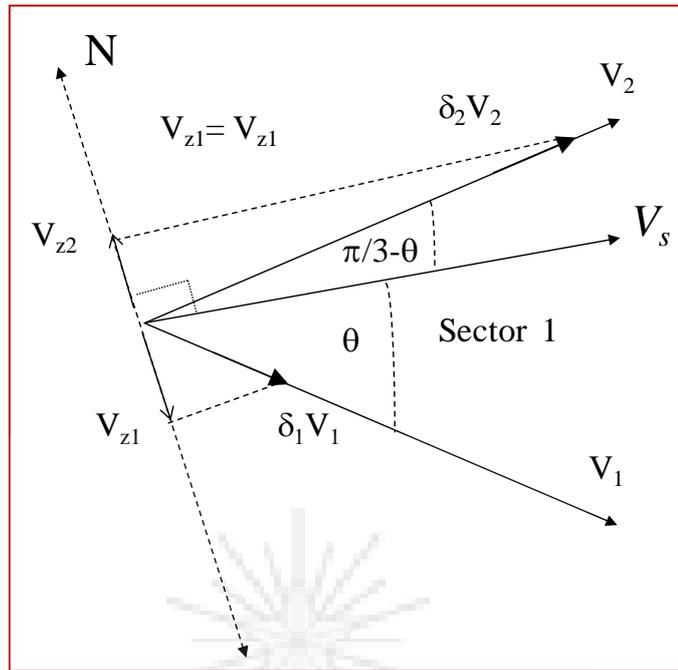


Fig. 3.4. Diagrama de vectores en el sector 1, sintetizado utilizando los vectores  $V_1$  y  $V_2$ .

$$\delta_2 [\text{sen}(\pi/3 - \theta)\cos(\theta) + \cos(\pi/3 - \theta)\text{sen}(\theta)] = \frac{V_s}{E} \text{sen}(\theta) \quad (3.9)$$

Definiendo las identidades:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen} \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \text{sen} \beta \end{aligned} \quad (3.10)$$

Utilizando (3.10) en (3.9), se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta_2 \left[ \frac{(\text{sen}(\pi/3)\cos(\theta) - \cos(\pi/3)\text{sen}(\theta))\cos(\theta) + (\cos(\pi/3)\cos(\theta) + \text{sen}(\pi/3)\text{sen}(\theta))\text{sen}(\theta)}{\cos(\pi/3 - \theta)} \right] = \frac{V_s}{E} \text{sen}(\theta) \quad (3.11)$$

Finalmente el ciclo de trabajo  $\delta_2$  se puede obtener como:

$$\delta_2 = \frac{2V_s}{\sqrt{3}E} \text{sen}(\theta) = \frac{3V_m}{\sqrt{3}E} \text{sen}(\theta) \quad (3.12)$$

Utilizando (3.12) en (3.8) se obtiene  $\delta_i$  como:

## Cálculo del Ciclo de Trabajo

$$\delta_2 [\text{sen}(\pi/3 - \theta)\cos(\theta) + \cos(\pi/3 - \theta)\text{sen}(\theta)] = \frac{V_s}{E} \text{sen}(\theta)$$

$$\delta_2 \left[ \frac{(\text{sen}(\pi/3)\cos(\theta) - \cos(\pi/3)\text{sen}(\theta))\cos(\theta) + (\cos(\pi/3)\cos(\theta) + \text{sen}(\pi/3)\text{sen}(\theta))\text{sen}(\theta)}{\sqrt{3}} \right] = \frac{V_s}{E} \text{sen}(\theta)$$

$$\delta_2 = \frac{2V_s}{\sqrt{3}E} \text{sen}(\theta)$$

$$\delta_1 = \frac{2V_s}{\sqrt{3}E} \text{sen}(\pi/3 - \theta)$$

$$\delta_0 = 1 - (\delta_1 + \delta_2)$$

Fig. 3.5. Cálculo del ciclo de trabajo de los vectores activos correspondientes al sector donde se encuentra la señal a sintetizar.

$$\delta_1 = \frac{2V_s}{\sqrt{3}E} \text{sen}(\pi/3 - \theta) = \frac{3V_m}{\sqrt{3}E} \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \quad (3.13)$$

$$\delta_0 = 1 - (\delta_1 + \delta_2) \quad (3.14)$$

La Fig. 3.5 resume las ecuaciones utilizadas para el cálculo de los ciclos de trabajo.

Las ecuaciones (3.12)-(3.14) pueden ser utilizadas para calcular los valores de  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Sin embargo, se debe recordar que los componentes  $\alpha$ - $\beta$  del vector a sintetizar, al igual que los componentes  $\alpha$ - $\beta$  de los vectores  $V_1$  a  $V_2$  se obtuvieron utilizando la transformada (3.1).

Para retornar al sistema físico se utiliza:

$$|V_s| = \sqrt{V_\alpha^2 + V_\beta^2} = \frac{3}{2} V_m \quad (3.15)$$

Los ciclos de trabajo también pueden ser representados en función del índice de modulación ( $m$ ). Por simplicidad (1.7) se repite a continuación:

$$m = 2 \frac{V_m}{E} \quad (3.16)$$

Donde  $V_m$  es el valor máximo de la componente fundamental de la señal a sintetizar (valor fase a neutro ficticio). Utilizando (3.15),(3.16) en (3.12),(3.13), los ciclos de trabajo  $\delta_1$  y  $\delta_2$  se calculan como:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} m \operatorname{sen}(\pi/3 - \theta) \\ \delta_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} m \operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}\tag{3.17}$$

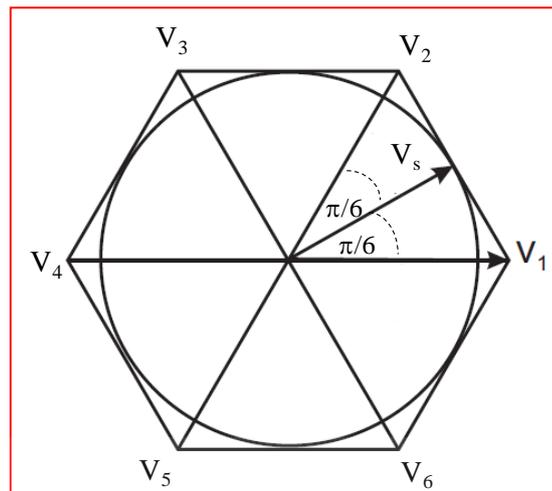
Donde  $m$  es el índice de modulación calculado de acuerdo a (3.16). Las ecuaciones fueron derivadas considerando la Fig. 3.3, sintetizando un vector de voltaje que se encuentra en el sector 1, sin embargo pueden ser generalizadas para sintetizar un voltaje que se encuentre en cualquiera de los seis sectores. En este caso el ángulo  $\theta$  se define como el ángulo entre  $\underline{v}_s$  y el primer vector del sector a considerar, asumiendo rotación del vector en sentido contrario a los punteros del reloj.

### 3.3 Otras Consideraciones.

El máximo valor de  $V_m$  que se puede modular sin producir distorsión de baja frecuencia, corresponde al radio del círculo circunscrito en el hexágono formado por los seis vectores [16]. Esto se muestra en la Fig. 3.6. Utilizando esta figura, el máximo vector  $V_m$  puede ser calculado como:

$$E \cos(\pi/6) = V_s^{\max} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} E = \frac{3}{2} V_m^{\max} \Rightarrow m_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tag{3.18}$$

Por lo tanto, al igual que en el caso del PWM convencional con inyección de armónicos de secuencia cero, el valor máximo del índice de modulación alcanzado con SVM (sin distorsión de baja frecuencia) es de  $m = 2/\sqrt{3}$  equivalente a  $m=1.1547$  aproximadamente.



$$E \cos(\pi/6) = V_s^{\max} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} E = \frac{3}{2} V_m^{\max} \Rightarrow m_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$m_{\max} \approx 1.1547$$

Fig. 3. 6. Círculo de radio  $V_s$  circunscrito en el hexágono formado por los seis vectores.

### 3.4 Implementación de PWM con Patrón Simétrico Doble.

Al efectuar el cálculo de los ciclos de trabajo, se obtienen los tiempos totales de los vectores cero y vectores activos de acuerdo a:

$$T_0 = \delta_0 T_s \quad T_1 = \delta_1 T_s \quad T_2 = \delta_2 T_s \quad (3.19)$$

La forma habitual de implementar PWM es ordenar los vectores de acuerdo a un patrón simétrico doble [2]. Por ejemplo para el sector 1, un patrón adecuado es el que se muestra en la Fig. 3.7 y corresponde a  $V_7 V_2 V_1 V_8 V_8 V_1 V_2 V_7$ .

El patrón de la Fig. 3.7 podría implementarse como  $V_8 V_1 V_2 V_7 V_7 V_2 V_1 V_8$ . Es decir utilizar como primer vector cero  $V_8$  en lugar de  $V_2$ . Esto se discute en la última sección donde se analiza cómo eliminar armónicos pares.

|          |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $V_{a0}$ | E/2             | E/2             | E/2             | -E/2            | -E/2            | E/2             | E/2             | E/2             |
| $V_{b0}$ | E/2             | E/2             | -E/2            | -E/2            | -E/2            | -E/2            | E/2             | E/2             |
| $V_{c0}$ | E/2             | -E/2            | -E/2            | -E/2            | -E/2            | -E/2            | -E/2            | E/2             |
| Vector   | $V_7$           | $V_2$           | $V_1$           | $V_8$           | $V_8$           | $V_1$           | $V_2$           | $V_7$           |
| Time     | $\frac{T_0}{4}$ | $\frac{T_2}{2}$ | $\frac{T_1}{2}$ | $\frac{T_0}{4}$ | $\frac{T_0}{4}$ | $\frac{T_1}{2}$ | $\frac{T_2}{2}$ | $\frac{T_0}{4}$ |

$\longleftarrow$   $T_s/2$        $T_s/2$   $\longrightarrow$

- El patrón mostrado tiene baja distorsión armónica por el denominado efecto 'Espejo'.
- Tiene bajas pérdidas debido a que sólo un switch cambia de estado cuando se cambia de vector

Fig. 3.7. Ejemplo de un PWM simétrico doble.

Nótese en la Fig. 3.7 que en cada conmutación de vectores, por ejemplo de  $V_7$  a  $V_2$ , solo un switch IGBT cambia de estado (ver Fig. 3.2 y Tabla 3.1). Por ese motivo el patrón simétrico doble mostrado en la Fig. 3.7 cumple con dos objetivos. Minimizar las pérdidas por switching en el conversor y mejorar el espectro de la onda sintetizada al utilizar un "espejo" del primer semiperíodo de  $T_s$  en la segunda mitad (ver Fig. 3.7).

### 3.5 Algunos resultados de simulación.

Utilizando un modelo en Matlab y Simulink (o PLECS) se han obtenidos algunos resultados de simulación del algoritmo SVM. Para esto se utiliza  $V_m=100V$ ,  $f_e=30Hz$ ,  $E=600V$ . Un filtro de segundo orden (Butterworth) con frecuencia de corte de 900Hz, se utiliza para eliminar los armónicos de alto orden de las señales sintetizadas por el modulador vectorial. La frecuencia de switching es de 4kHz. Fig. 3.8 muestra algunos resultados obtenidos con el algoritmo de modulación implementado.

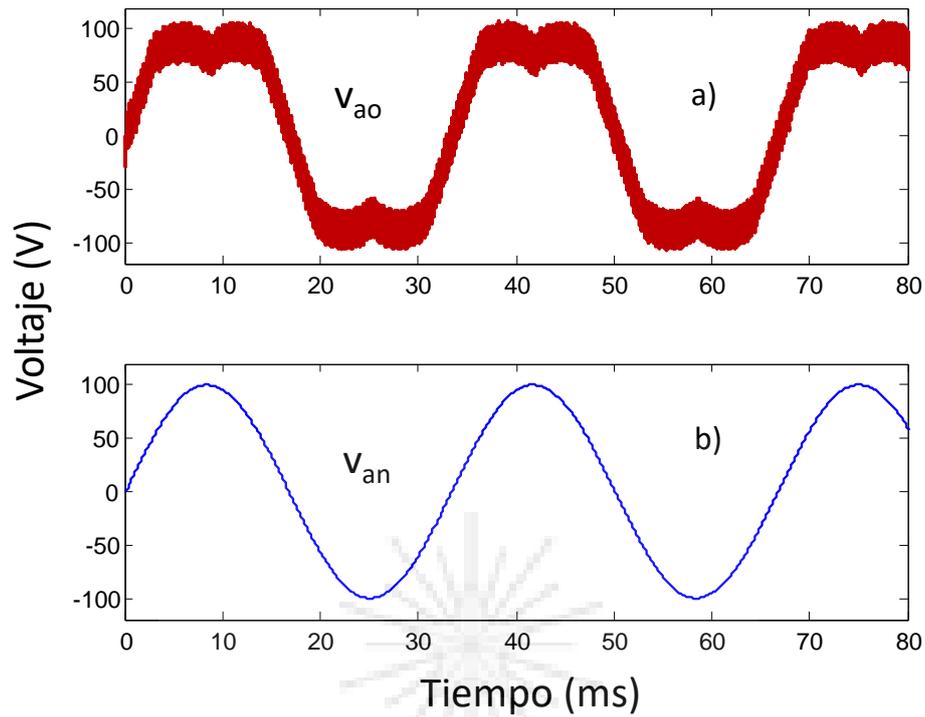


Fig. 3.8 Modulación vectorial a) Salida fase neutro ficticio correspondiente a la fase a. b) Referencia de la fase a.

La salida fase-NF correspondiente a la fase *a* se muestra en la Fig. 3.8a. Nótese que los armónicos de secuencia cero ya se encuentran incluidos en la tensión de salida. La tensión de referencia en la fase *a* se muestra en la Fig. 3.8b. Esta tensión no incluye armónicos de secuencia cero los cuales son agregados en forma automática por el algoritmo SVM.

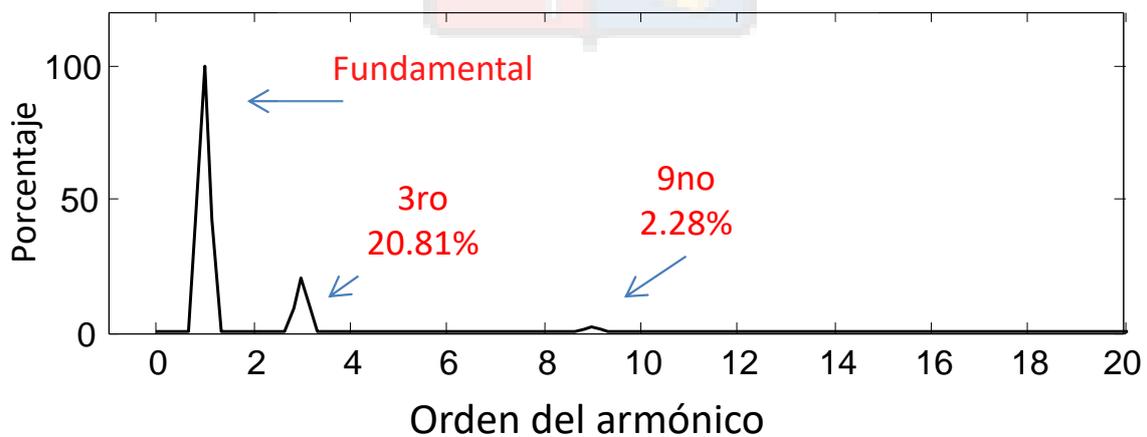


Fig. 3.9 Estimación espectral correspondiente a la tensión fase neutro ficticio del modulador SVM.

Fig. 3.9 muestra la estimación espectral de la tensión de salida fase-NF. En este caso se obtienen resultados muy similares a los mostrados previamente en la Fig. 1.20. Los dos métodos SVM y PWM convencional con inyección de armónicos de secuencia cero deberían entregar resultados idénticos [2]. Las pequeñas diferencias se deben a la aplicación del filtro de segundo orden a la tensión  $v_{ao}$  y también a problemas de resolución numérica.

Las tensiones línea-línea de referencia son prácticamente iguales a las tensiones línea-línea a la salida. Existe una diferencia muy menor que se produce por los retardos introducidos en la implementación digital. Como se discute en la literatura técnica, un “*sample and hold*” de orden cero produce un retardo de transporte de aproximadamente  $\frac{1}{2}$  muestra entre la señal de entrada y salida del retentor. Métodos de modulación con compensación de fase se discuten en la literatura [2].

La Fig. 3.10 muestra las tensiones de salida línea-línea. En Fig. 3.10a se encuentra la salida del modulador la cual es una perfecta sinusoidal porque todos los armónicos de orden cero han sido eliminados. La Fig. 3.10b muestra la tensión línea a línea de referencia y la Fig. 3.10c muestra el error entre referencia y salida. Este error alcanza valores máximos de aproximadamente 5V lo cual equivale a aproximadamente 2.8% del valor máximo de la tensión línea a línea. En la mayor parte de las aplicaciones este pequeño error introducido por el modulador vectorial (o cualquier otro método de modulación que sea implementado digitalmente) es compensado por los controladores de corriente.

La Fig. 3.11 muestra la estimación espectral obtenida con el voltaje línea a línea a la salida del modulador. Los armónicos de secuencia cero han sido eliminado y la mayor parte de la distorsión armónica es producida por los armónicos con órdenes múltiplos de  $(f_{sw}/f_e)$ .

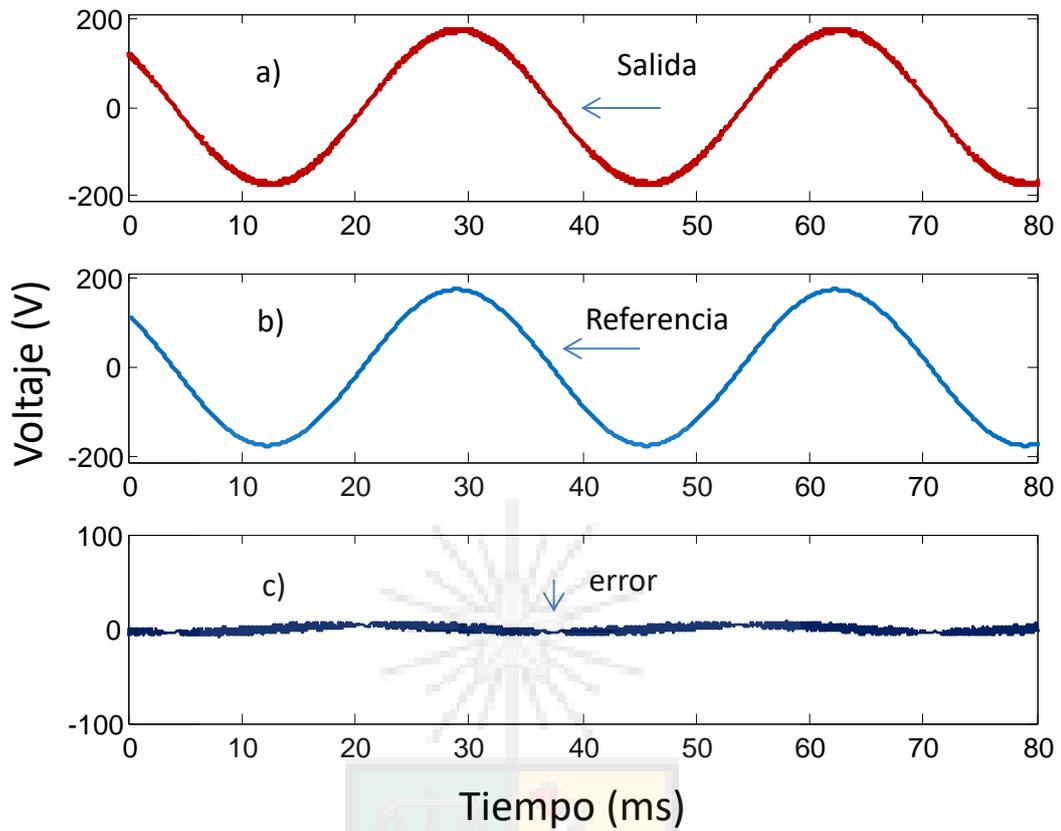


Fig. 3.10. Voltaje línea a línea. a) Salida del modulador. b) Señal de referencia. c) Error entre la salida y la referencia.

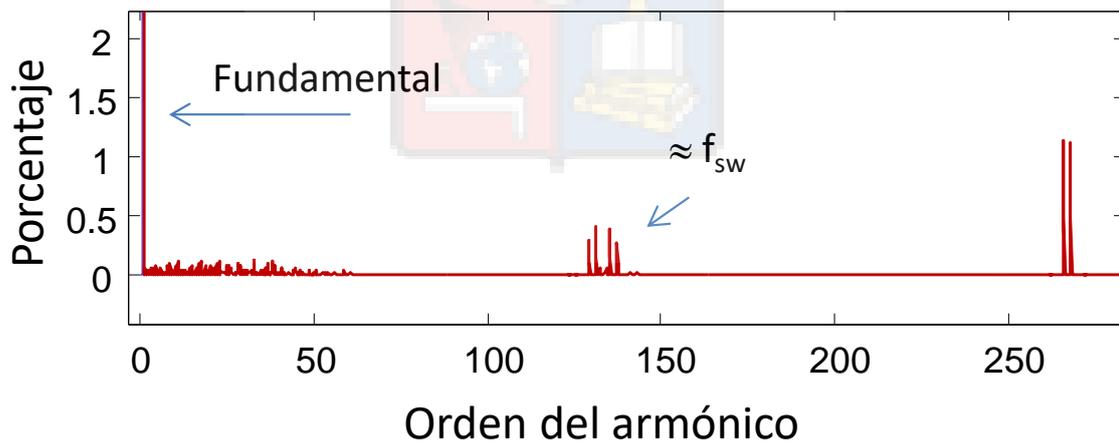


Fig. 3.11. Estimación espectral del voltaje línea a línea obtenido a la salida del modulador vectorial.

### 3.6 Eliminación de Armónicos Pares.

Como se mostró anteriormente en la Fig. 3.7, el patrón espejo comienza con uno de los vectores cero y finaliza con el mismo vector cero. Si se mantiene el mismo vector cero inicial en todo el hexágono, es posible de demostrar que el vector giratorio de voltaje puede dar una vuelta completa al hexágono efectuando solo un cambio de estado, en un interruptor, al efectuar la transición de un vector a otro.

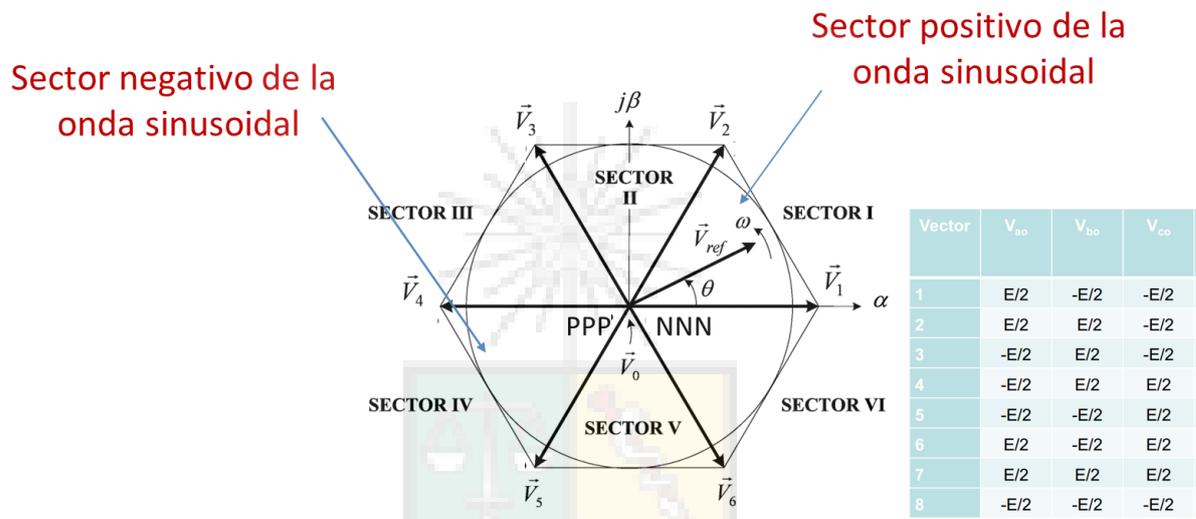


Fig. 3.12 Sectores utilizados en el SVM de un convertidor fuente de voltaje de dos niveles.

En la figura 3.12 se muestra el sector I y el sector que se encuentra desfasado 180 grados, que corresponde al sector IV. Si se utiliza el mismo vector nulo al comienzo del sector I y del sector IV se generan tensiones línea a línea (las que ve la máquina) que son asimétricas con respecto al eje de las abscisas. Como se discutió anteriormente en este curso, al existir asimetrías entre el semiciclo positivo y el negativo de una onda se generan armónicos pares.

La Fig. 3.13 muestra la aplicación del vector cero (NNN) al inicio de las secuencias utilizadas en los sectores I y IV. Nótese que NNN significa que los vectores ( $V_{a0}$ ,  $V_{b0}$ ,  $V_{c0}$ ) asumen los valores  $(-E/2, -E/2, -E/2)$ , por lo tanto el voltaje entre líneas  $V_{ab}$  se obtiene como  $-E/2 - (-E/2)$  y es cero al inicio de la secuencia. En el sector I se utilizan los vectores  $V_1$  y  $V_2$ , mientras que en

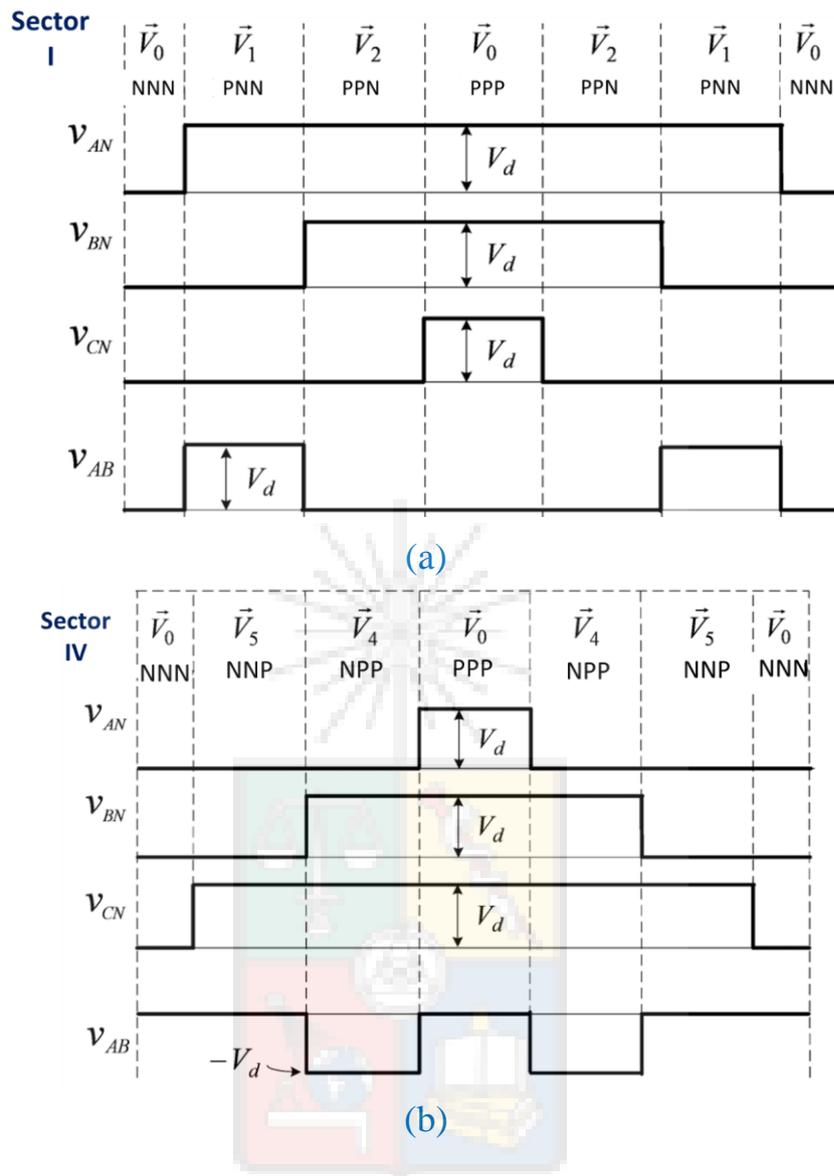


Fig. 3.13 Patrón simétrico espejo en los sectores I y IV comenzando en ambos con el vector cero  $V_0$  donde  $(V_{a0}, V_{b0}, V_{c0}) = (-E/2, -E/2, -E/2)$ . Este vector es abreviado como NNN en ambas figuras.

el sector IV se utilizan los vectores  $V_4$  y  $V_5$ . Por supuesto en ambos sectores se utilizan vectores nulos.

Analizando los términos correspondientes a  $V_{a0}-V_{b0}$  en las figuras 3.13a y 3.13b es posible obtener el voltaje  $V_{ab}$  aplicado a la carga en los sectores I y IV. Como se muestra en la Fig. 14, las tensiones instantáneas generadas a la salida del PWM son asimétricas. Por lo tanto, a pesar

de que ambas generan la misma fundamental (desfasada 180 grados), también generan armónicos pares.

Los armónicos pares no tienen necesariamente una connotación negativa. Si el inversor se encuentra, por ejemplo, alimentando una máquina de inducción, probablemente podrá funcionar adecuadamente con armónicos pares de baja intensidad. Sin embargo, es irregular alimentar la red eléctrica, donde están todos los usuarios conectados, con armónicos fuera de norma.

Por ejemplo si se utiliza un inversor para conectar un sistema eólico que suministra energía eléctrica a la red, se deben seguir las normas eléctricas que regulan el THD en cada país. Adicionalmente algunos estándares, como el IEC 61000 (Europeo) y el IEEE 519, colocan límites muy exigentes a los armónicos pares y por lo tanto se deben considerar métodos de modulación que los eliminen o compensen.

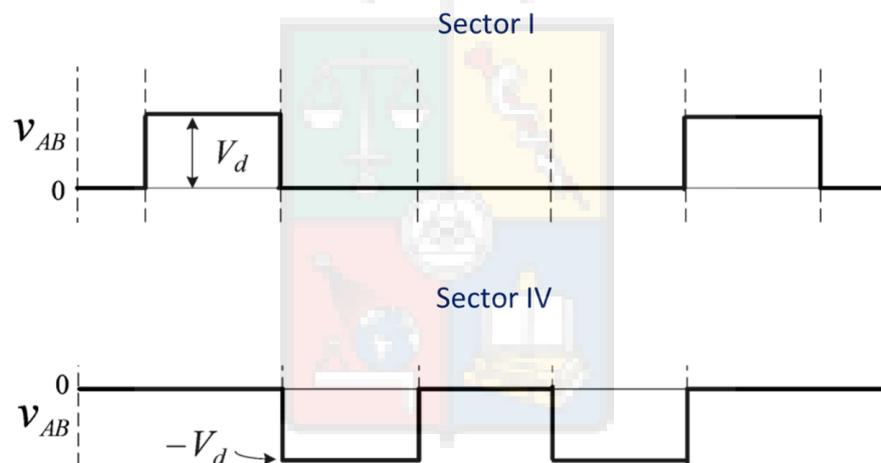


Fig. 3.14. Tensiones de línea  $V_{ab}$  producidas en los sectores I y IV al considerar el vector nulo  $V_8$  al inicio del patrón simétrico doble.

Si en el sector I se inicializa el patrón espejo con el vector cero (NNN) se logra simetría en la tensión  $V_{ab}$  cuando en el sector IV se inicializa la secuencia con el vector (PPP). Esto se muestra en la Fig. 3.15. Al inicializar con el vector PPP en el sector IV la onda de tensión  $V_{ab}$  es simétrica con respecto a la que se obtiene al inicializar con el vector NNN el sector I.

Por lo tanto, tal como se concluye de la Figura 3.16, al cambiar los vectores iniciales se logra simetría “espejo” con respecto al eje de las abscisas. Sin embargo, esto significa que aumenta la frecuencia de switching de los interruptores, los cuales cambian desde el estado NNN al estado PPP en algunos sectores del hexágono.

El patrón sugerido para eliminar los armónicos pares en las tres tensiones línea a línea, se muestra en la Figura 3.17. Cada uno de los seis sectores de 60 grados se divide en dos

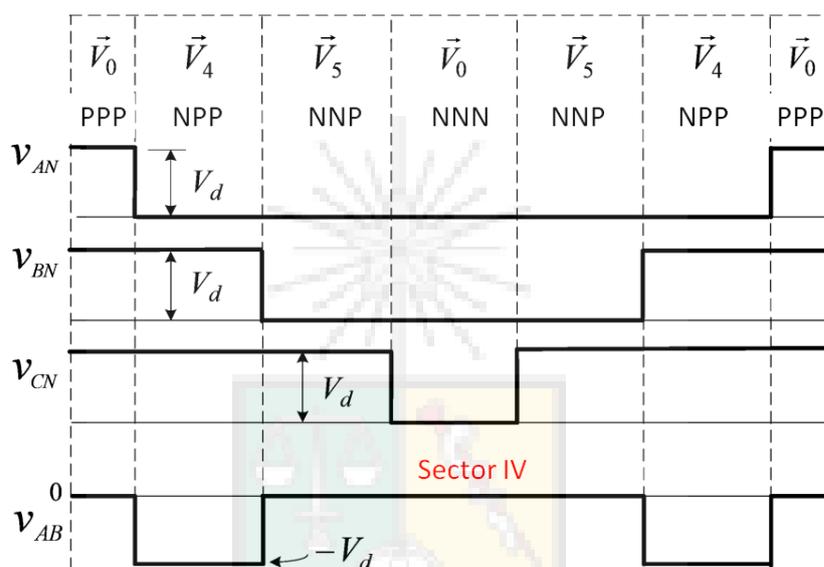


Fig. 3.15. Tensión de línea  $V_{ab}$  producida en el sector V al considerar el vector nulo  $V_7$  al inicio del patrón simétrico doble.

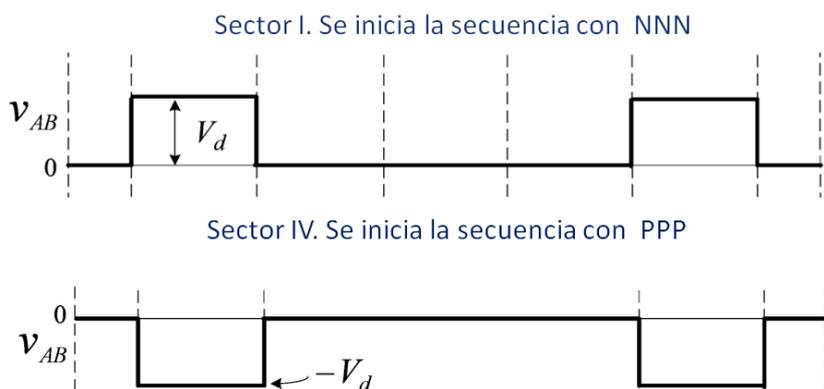


Fig. 3.16. Tensiones con simetría en el eje de las abscisas obtenidas al cambiar el vector nulo inicial en el PWM simétrico espejo utilizado en los sectores I y IV.

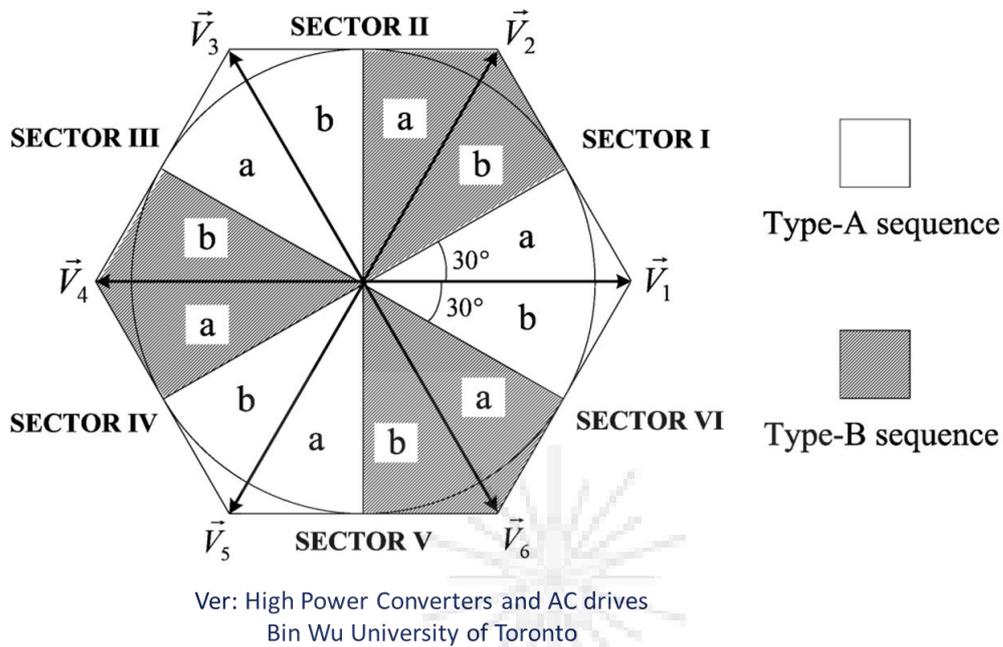


Fig. 3.17 Patrón alternado propuesto para eliminar armónicos pares.

subsectores de 30 grados cada uno. Durante uno de los sectores se comienza la secuencia con un vector nulo y en el otro subsector se cambia de vector nulo inicial. Es decir cada 60 grados todos los interruptores cambian de estado de  $V_7$  a  $V_8$  o viceversa, lo cual aumenta la frecuencia de switching total en  $3f_e$ .

Por lo tanto, la frecuencia de switching total aumenta de desde  $f_{sw}$  a  $f_{sw}+3f_e$ , donde  $f_e$  es la frecuencia de la fundamental siendo sintetizada a la salida del variador de frecuencia y  $f_{sw}$  es el recíproco del período utilizado en modular cada patrón simétrico doble (ver Fig. 3.7).

## Apéndice

Rutina `fft_rcd` que se ha utilizado en este apunte para calcular la estimación espectral. Utiliza una ventana de Hamming. El cálculo del THD se realiza considerando hasta la frecuencia de 2500Hz. Esto es equivalente al armónico 50vo. de una frecuencia de 50Hz.

Falla en algunos casos, por ejemplo, en ciertas condiciones los sub-armónicos pueden producir un incorrecto THD. Pero al suscrito le ha resultado razonablemente exacta.

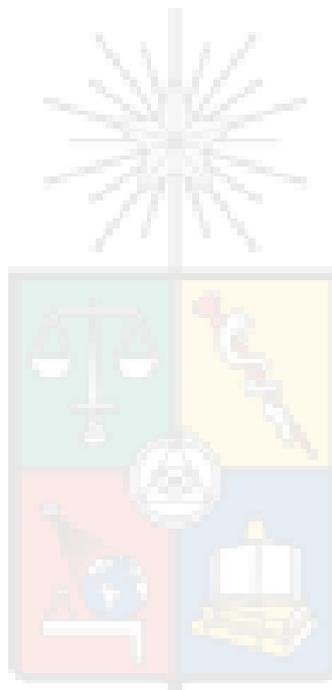
Se omiten los tildes para evitar problemas en Matlab.

```
% Funcion que calcula THD y grafica armonicos
% Se debe ingresar el archivo con los datos y el tiempo de muestreo
% de la forma fft-rcd (arreglo, tiempo de muestreo)
% El THD se calcula considerando solo hasta el armonico 2500Hz.
function THD=fft_new(arreglo, DT) %se pueden utilizar arreglos que sean vectores columnas o
vectores filas
F=1/DT;          %calcula la frecuencia de muestreo
V=arreglo;
N=size(V,1);
figure;
if (N<2)
    N=size(V,2);
else
    V=V';
end;
N=N-1;
FF=0:N;FF=FF/(N*DT);
H=hamming(N+1);
K=abs(fft((V)'.*H));
I=round(550*N*DT)+1; %restringe la fundamental a 550Hz
Fund=max(K(1:I)); % asume que la fundamental tiene la maxima magnitud
Vfund=(0.8890*Fund/(0.24*(N+1)));
plot(K)
pos=find(K==Fund);
I=round(pos(1)); %posicion donde se encuentra la fundamental
fe=(I-1)/(N*DT); %detecta la frecuencia de la fundamental
Total=0;      %
%figure;
zz=floor(F/2); %valor de la frecuencia de muestreo medio
subplot(2,1,1); plot(FF,K);axis([-1 zz 0 Fund*1.1]);zz=floor(zz/fe) % valor del maximo orden de
armonico medible
subplot(2,1,2); plot(FF/fe,K/Fund*100);axis([-1 zz 0 110]); %armonicos por orden.
Max_Armonico=floor(F/(2*fe));
if (Max_Armonico>49)
    Max_Armonico=50;
end;
% calcula el THD considerando los primeros 50 armonicos
```

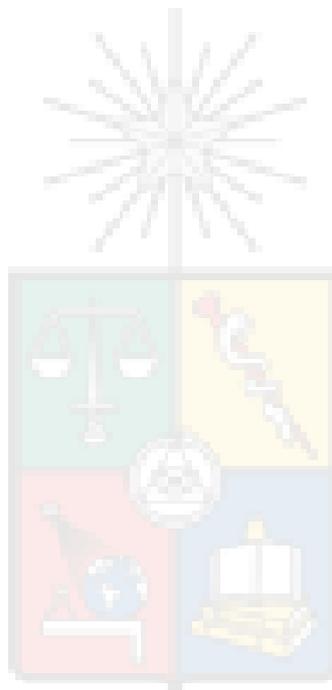
```

DZ=0.2*fe; %fraccion de frecuencia a considerar
TZ=round(DZ*N*DT); %Numero de muestras a borrar
zmax=floor(N/2); % Maximo armonico posible a considerar
zz=round(2500*N*DT)+1; % se consideran solo hasta 2500Hz para el calculo de THD
if (zz>zmax)
    zz=zmax;
end;
PC=K(1:zz)/Fund*100; %arreglos donde se encuentran los armonico en % de la fundamental
ii=1;
sigue=1;
while ((ii<=Max_Armonico)&&(sigue==1))
    Value=max(PC);
    if (Value>0.01)
        L=find(PC==Value);
        POS(ii)=L;VA(ii)=Value;
        Orden(ii)=(L-1)/(N*DT*fe);
        Frecuencia(ii)=(L-1)/(N*DT);
        Valor(ii)=Value;
        mi=L-TZ;ma=L+TZ;
        if(mi<1)
            mi=1;
        end
        for jj=mi:ma
            PC(jj)=0;
        end
        ii=ii+1;
    else
        sigue=0;
    end
end;
[P,L]=sort(POS);
ORD=Orden(L);
FR=Frecuencia(L);
VA=Valor(L);
ma=size(VA,2);
Total=0;
for ii=1:ma
    O=ORD(ii);
    V=VA(ii);
    F=FR(ii);
    if (O~=1)
        Total=Total+V*V; %no debe considerar la fundamental o armonico de orden 1 en el calculo
    end
    str=fprintf('Armonico orden= %6.2f Frecuencia= %7.2f Valor= %3.2f por ciento. \n',O, F,V);
end;
disp(' ')
disp(Vfund)

```



```
THD=sqrt(Total);  
str=fprintf('Distorsion Armonica Total      = %7.2f por ciento.\n', THD);  
str=fprintf('Frecuencia de la fundamental en Hz = %7.2f \n', fe);  
disp('  ')
```



A large, faded version of the University of Chile coat of arms is centered on the page. It features a sunburst at the top, a scale of justice, a book, and a ship within a shield.

## REFERENCIAS

## Referencias

- [1] G. Asher, "Electric Drives." University of Nottingham UK, 1992.
- [2] D. G. Holmes and T. Lipo, "Pulse Width Modulation for Power Converters Principle and Practice," 3rd ed., IEEE Press, 2003.
- [3] H. W. van der Broeck and H.-C. Skudelny, "Analytical analysis of the harmonic effects of a PWM AC drive," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 3, no. 2, pp. 216-223, 1988.
- [4] G. Asher, "Vector control of Induction Machines." University of Nottingham UK, 1992.
- [5] H. W. van der Broeck, H.-C. Skudelny, and G. V. Stanke, "Analysis and realization of a pulsewidth modulator based on voltage space vectors," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 1, pp. 142-150, 1988.
- [6] H. S. Patel and R. G. Hoft, "Generalized Techniques of Harmonic Elimination and Voltage Control in Thyristor Inverters: Part I--Harmonic Elimination," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 9, no. 3, pp. 310-317, 1973.
- [7] P. H. Nayak and R. G. Hoft, "Optimizing the PWM Waveform of a Thyristor Inverter," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 11, no. 5, pp. 526-530, 1975.
- [8] H. S. Patel and R. G. Hoft, "Generalized Techniques of Harmonic Elimination and Voltage Control in Thyristor Inverters: Part II --- Voltage Control Techniques," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 5, pp. 666-673, 1974.
- [9] S. Kouro, P. Lezana, M. Angulo, and J. Rodriguez, "Multicarrier PWM With DC-Link Ripple Feedforward Compensation for Multilevel Inverters," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 23, no. 1, pp. 52-59, 2008.
- [10] Y. Wang, Q. Gao, and X. Cai, "Mixed PWM for Dead-Time Elimination and Compensation in a Grid-Tied Inverter," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 10, pp. 4797-4803, 2011.
- [11] S.-H. Hwang and J.-M. Kim, "Dead Time Compensation Method for Voltage-Fed PWM Inverter," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 1, pp. 1-10, 2010.
- [12] G. Buja and G. Indri, "Improvement of Pulse Width Modulation Techniques," *Archiv für Elektrotechnik*, vol. 57, pp. 281-289, 1975.

- [13] J. A. Houldsworth and D. A. Grant, "The Use of Harmonic Distortion to Increase the Output Voltage of a Three-Phase PWM Inverter," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 20, no. 5, pp. 1224-1228, 1984.
- [14] D. A. Grant, J. A. Houldsworth, and K. N. Lower, "A New High-Quality PWM AC Drive," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 2, pp. 211-216, 1983.
- [15] J. Richardson and O. T. Kukrer, "Implementation of a PWM regular sampling strategy for AC drives," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 6, no. 4, pp. 645-655, 1991.
- [16] S. Diaz, "Control sensorless de un generador sincrónico de imanes permanentes para aplicaciones en turbinas eólicas." Universidad Técnica Federico Santa María, 2010.

