Control 2

Pauta P2

Pregunta II (10/30)

a) (6.5 puntos) Una nueva empresa de telecomunicaciones, *Optitel*, está iniciando sus operaciones en la ciudad de Santiago. La empresa quiere ofrecer servicio de internet utilizando fibra óptica, por lo que debe planificar cómo construir sus redes, tal que puedan entregar cobertura a todas las comunas de la ciudad, satisfaciendo la demanda y minimizando los costos de inversión.

La empresa tiene en consideración un conjunto de centros de datos $\mathcal{J}$ que podrían ser instalados. El costo de instalar cada centro de datos es de C^p [$]. Además, se asume que cada centro de datos j, con $j \in \mathcal{J}$, puede abastecer a múltiples comunas de la ciudad. Asimismo, cada centro de datos j puede abastecer a lo más F_j servidores.

Se define $\mathcal{I}$ como el conjunto de comunas en la ciudad. Cada comuna i, con $i \in \mathcal{I}$, tiene D_i servidores, los cuales deben ser abastecidos por un único centro de datos j. Para poder abastecer a los servidores en la comuna i desde el centro de datos j se requiere que exista una conexión entre ambos. El costo de conectar los servidores de la comuna i con el centro de datos j es de $C_{i,j}$ [$].

Formule el problema de optimización lineal entera que le permita decidir a la empresa cuáles centros de datos debe construir y las conexiones requeridas, de tal modo de minimizar los costos, satisfaciendo la demanda de abastecimiento de los servidores de todas las comunas.

R:

- **Conjuntos de índices:**
  - $\mathcal{J}$: conjunto de centros de datos que pueden ser instalados.
  - $\mathcal{I}$: conjunto de comunas de la ciudad.
- **Variables de decisión:**
  Se define la variable de decisión binaria $x_{i,j}$ para representar si un centro de datos j, con $j \in \mathcal{J}$, abastece la comuna i, con $i \in \mathcal{I}$.

  $$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si la comuna } i \text{ se conecta al centro de datos } j. \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

  Y se define la variable y_j para definir si se construye el centro de datos j dentro del conjunto posible de centros $\mathcal{J}$.

  $$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si se instala el centro de datos } j. \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

- **Restricciones:**
  - En primer lugar se debe satisfacer la demanda, es decir, todas las comunas de la ciudad deben estar conectadas a un único centro de datos:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} x_{i,j} = 1, \forall i \in \mathcal{I}$$

  - Por otro lado, se dice que cada centro de datos j puede abastecer a lo más F_j servidores, y cada comuna i tiene D_i servidores. Así, la restricción queda:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} x_{i,j} \cdot D_i \leq F_j, \forall j \in \mathcal{J}$$

  - Finalmente, para que exista una conexión entre un centro de datos j y una comuna i ($x_{i,j} = 1$), el centro de datos j debe estar instalado ($y_j = 1$). Luego:

$$x_{i,j} \leq y_j, \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}$$

- **Función objetivo:**
  La función objetivo a minimizar corresponde al costo de inversión del proyecto, la que cuenta con dos componentes: el costo de instalación de los centros de datos y el costo de conectar cada comuna con su respectivo centro de datos. La función se presenta a continuación:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} x_{i,j} \cdot C_{i,j} + \sum_{j \in \mathcal{J}} y_j \cdot C^p$$

En base a todas las componentes anteriores se define el modelo final:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} x_{i,j} \cdot C_{i,j} + \sum_{j \in \mathcal{J}} y_j \cdot C^p \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} x_{i,j} = 1, \forall i \in \mathcal{I} \\
& \sum_{i \in \mathcal{I}} x_{i,j} \cdot D_i \leq F_j, \forall j \in \mathcal{J} \\
& x_{i,j} \leq y_j, \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J} \\
& x_{i,j}, y_j \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

b) (3.5 puntos) Sea $f(x)$ una función continua lineal por tramos. Formule el problema de optimización entero (IP) que permite obtener el óptimo de $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & x \in [0, 0.8] \\ -0.75x + 3 & \text{si } x \in [0.8, 2] \\ 1.5x - 1.5 & \text{si } x \in [2, 6] \end{cases}$$

R:

Se grafica la función $f(x)$:

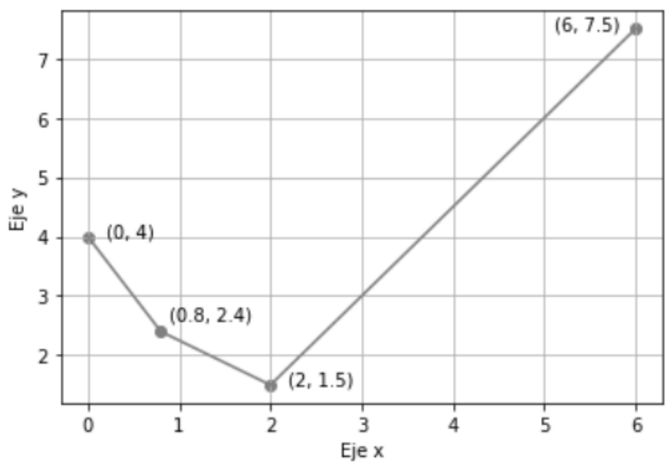

Figura 1: Gráfico $f(x)$

Se identifican los puntos asociados a los vértices de la función en la tabla:

Tabla 1: Vértices de la función.

a_i	$f(a_i)$
0	4
0,8	2,4
2	1,5
6	7,5

La forma general de formular un problema de optimización de una función lineal por tramos es:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot f(a_i) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \\
& \lambda_1 \leq y_1 \\
& \lambda_i \leq y_{i-1} + y_i, \forall j \in 1, ..., k-1 \\
& \lambda_k \geq y_{k-1} \\
& \sum_{i=1}^{k-1} y_i = 1 \\
& \lambda_i \geq 0 \\
& y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Y en particular para la función estudiada, el problema de optimización queda:

$$
\begin{aligned}
\min \; & 4\lambda_1 + 2{,}4\lambda_2 + 1{,}5\lambda_3 + 7{,}5\lambda_4 \\
\text{s.a} \; & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
& \lambda_1 \leq y_1 \\
& \lambda_2 \leq y_1 + y_2 \\
& \lambda_3 \leq y_2 + y_3 \\
& \lambda_4 \geq y_3 \\
& y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
& \lambda_i \geq 0, \forall i \in 1, 2, 3, 4 \\
& y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in 1, 2, 3
\end{aligned}
$$