Control 2

Profesora: Ángela Flores
Auxiliares: Pablo Apablaza, Alonso Martinez
Ayudantes: Catalina Gaete, Diego Gonzalez, Felipe Keim, Luis Ramírez.

Pregunta III (10/30)

a.- (6 puntos) Resolver el siguiente problema utilizando el algoritmo de Branch & Bound.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \\
& x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1,2\}
\end{aligned}
$$

Indicaciones:

- Utilice la formulación clásica del algoritmo Branch & Bound. Es decir, calcule la cota inferior como la relajación lineal del subproblema respectivo **(4 subproblemas: 1 puntos por resolver cada uno y 0.25 puntos por ramificación (2 ramificaciones))**.
- Para cada subproblema, calcular la cota superior U **(0.25 puntos por calcular la cota luego de resolver cada subproblema)**.
- Al finalizar, concluya sobre la condición de termino que aplicó y la razón por la que la solución encontrada es óptima **(0.5 puntos)**.
- Se recomienda resolver de forma gráfica los problemas lineales que surjan con la implementación del algoritmo.

A pesar que es posible resolver los problemas lineales del algoritmo Branch & Bound utilizando Simplex, es más rápido y simple utilizar el método gráfico. De cualquier forma, no se descontará puntaje a los alumnos que resuelvan el problema utilizando Simplex.

Para comenzar con el algoritmo de Branch & Bound, se inicializa los valores de la cota inferior y superior $L = -\infty$ y $U = +\infty$ respectivamente. En la figura 1 se presenta el conjunto factible del problema relajado linealmente y su óptimo. Se observa que el mínimo se alcanza en $x = (3, 6.5)$ y corresponde a $z = -38.5$.

Dado que se tiene una solución no entera en la segunda componente, se elige x_2 para particionar el conjunto factible. Además, no es posible actualizar la cota superior ($U = +\infty$) por esta misma razón.

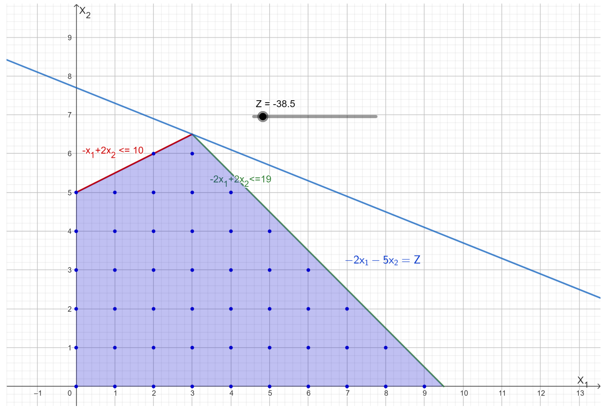


Figura 1: Representación gráfica para problema original con relajación lineal.

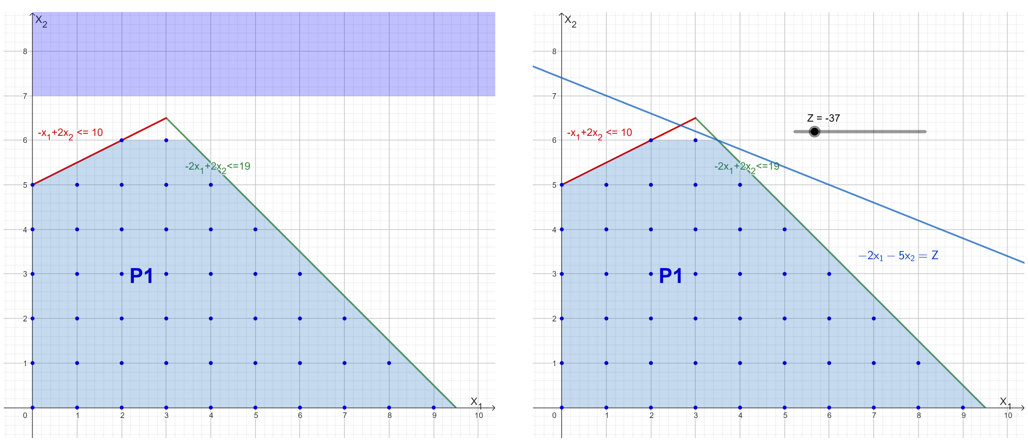
Los subproblemas resultantes (relajando linealmente) corresponden a:

$$\begin{aligned} P_1 = \min \quad & -2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P_2 = \min \quad & -2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_2 \geq 7 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \end{aligned} \tag{2}$$

Resolviendo la relajación lineal P_1 (ver figura 2.b), se obtiene el valor óptimo de este problema es $x^* = (3.5, 6)$ con un valor de la función objetivo igual a $z_{P1} = -37$. Aún así, dado que todavía no se tiene una solución x^* entera, no es posible actualizar la cota superior ($U = +\infty$).

Por otra parte, se realiza el mismo procedimiento para P_2. Sin embargo, al agregar la restricción $x_2 \geq 7$ no existe intersección entre esta restricción y el conjunto original del problema, como se puede apreciar en la figura 2.a. Por lo tanto, no es un problema factible (*el nodo se corta por infactible*).



(a) Conjuntos de P_1 y P_2.

(b) Resolución gráfica P_1.

Figura 2: Conjunto P_1 y P_2 y su resolución.

Siguiendo con el algoritmo. P_1 no satisface la restricción de variables enteras, por lo que se efectúa una nueva ramificación respecto a la variable x_1, que tiene el valor 3.5, generándose dos nuevos problemas:

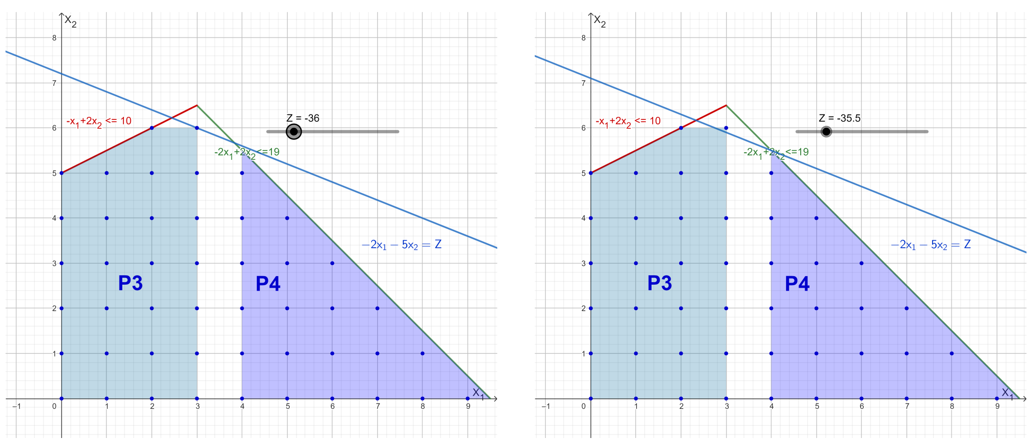
- P_3: Problema resultante en agregar $x_1 \leq 3$ a P_1.
- P_4: Problema resultante en agregar $x_1 \geq 4$ a P_1.

$$
\begin{aligned}
P_3 = \min \quad & -2x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
P_4 = \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

En la figura 3.a, se tiene que en la resolución de P_3 el valor óptimo es el punto $x^* = (3,6)$ dejando un valor de la función objetivo igual a $z_{P3} = -36$, de modo que se actualiza el valor del limite superior $U = -36$, y se poda este nodo por la integridad de las variables (x_1 y x_2 son enteros).

Ahora bien, considerando P_4 (ver figura 3.b), se llega al siguiente resultado $x^* = (4, 5.5)$ y la función objetivo $z_{P4} = -35.5$, pero ya que $Z_{P4} \geq U$, este nodo se poda por cota.



(a) Resolución gráfica de P_3.

(b) Resolución gráfica de P_4.

Figura 3: Conjuntos P_3 - P_4 y resolución gráfica respectiva.

Finalmente, el único sub-conjunto activo es P_3, por lo que se actualiza el valor de $L = -36$, dejando como óptimo del problema original $x^* = (3,6)$ con un valor de la función objetivo igual a -36.

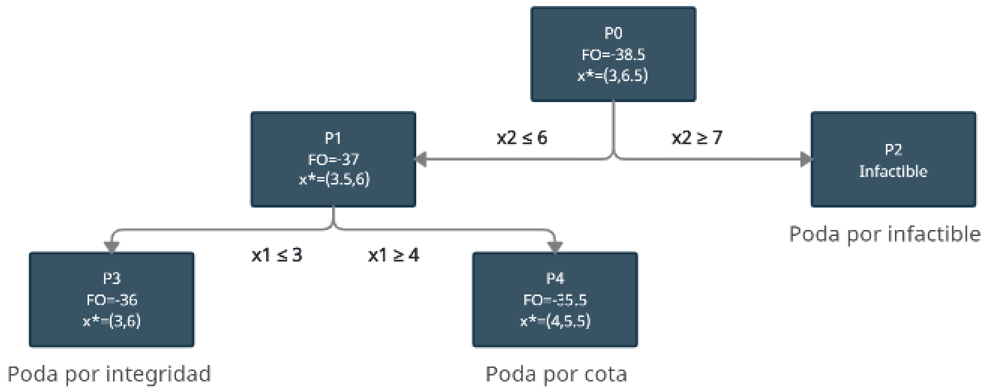


Figura 4: Arbol de enumeración de algoritmo de Branch & Bound.

Respecto a los comentarios sobre la condición de término del problema, existen 2 formas en la que se puede concluir que la solución encontrada es el óptimo del problema discreto original:

- **Gap nulo**: Se puede calcular la cota inferior y superior para mostrar que $U - L = 0$.
- **Comparación:** Luego de resolver todos los subproblemas, la mejor solución **entera** debe ser la solución óptima del problema original.

b.- (4 puntos) Para la relajación lineal del problema anterior, calcule todos los cortes de Gomory que sea posible teniendo en cuenta el Tableau óptimo de la Tabla 1. Adicionalmente, verifique (gráficamente) que se reduce el conjunto factible del problema relajado, pero no del problema discreto original.

Tabla 1: Tableau óptimo.

	x_1	x_2	s_1	s_2
-38,5	0	0	-1,5	-1
3	1	0	0,33	-0,33
6,5	0	1	0,17	0,33

A partir del tableau, se tiene que las variables básicas de la relajación lineal del problema corresponden a x_1 y x_2, y las no básicas a s_1 y s_2. Dado que solo hay una variable básica no entera, $x_2 = 6.5$, solamente se puede construir un corte de Gomory. Este corte se construye con la fila del tableau correspondiente a la variable x_2. De esta forma, utilizando la formulación vista en clases.

$$x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor$$

$$\begin{aligned} x_2 + \lfloor \bar{a}_{23} \rfloor \cdot s_1 + \lfloor \bar{a}_{24} \rfloor \cdot s_2 &\leq 6 \\ x_2 + \lfloor 0,17 \rfloor \cdot s_1 + \lfloor 0,33 \rfloor \cdot s_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

En la figura 5 se comprueba que el corte reduce el conjunto factible del problema relajado, pero no el del problema discreto original ya que sobre $x_2 = 6$ no hay soluciones enteras factibles.

- **1 punto por identificar la variable básica con la que se debe hacer el corte.**
- **1 punto por calcular correctamente el corte de Gomory.**
- **2 puntos por comprobar que el corte no reduce el conjunto factible del problema original.**

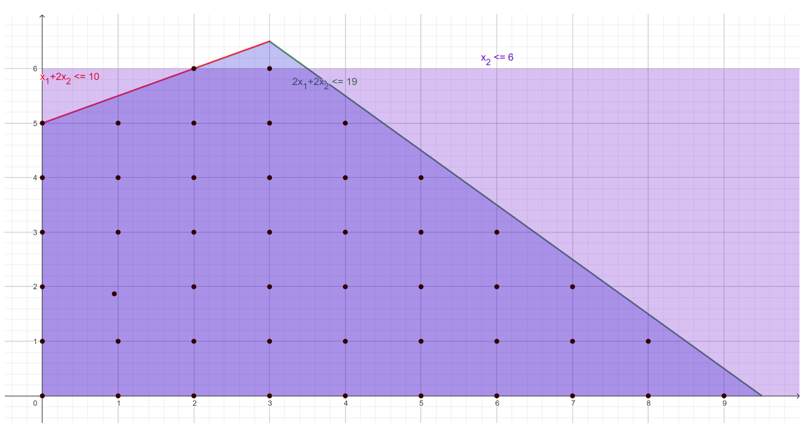


Figura 5: Conjunto factible del problema relajado incorporando el corte de Gomory.