Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingenierís Eléctrica
EL-4114-1 – Optimización

Control 1

Pauta P3

Pregunta 3

Responda de manera clara y concisa. La corrección de cada subpregunta será binaria: correcta o incorrecta (sin puntaje intermedio).

a) **(1.2 pto)** Enumere y describa las partes básicas de un problema de optimización. ¿Qué se debe cumplir para que un problema sea definido como un problema de programación lineal?

- **Conjuntos de índices:** Conjuntos que contienen los índices asociados a las variables de decisión del problema de optimización. Por lo general están formados por números naturales.
- **Variables de decisión:** Conjunto de variables que representan las decisiones a ser optimizadas en el modelo.
- **Función objetivo:** función numérica que mide, a través de un conjunto de parámetros y variables de decisión, cuan buena son las decisiones escogidas.
- **Restricciones:** Limitaciones sobre conjunto de decisión que describen el espacio de soluciones factibles.

Para que el problema sea definido como un problema lineal se debe cumplir que la función de costos y las restricciones del problema sean funciones lineales.

b) **(1.2 pto)** Dibuje un poliedro acotado, y uno que contenga una línea. ¿Si este último define la región factible de un problema de optimización, bajo que condiciones existen soluciones óptimas?

En este problema no es necesario escribir las ecuaciones que describen el poliedro, sino que basta con un dibujo explicativo.

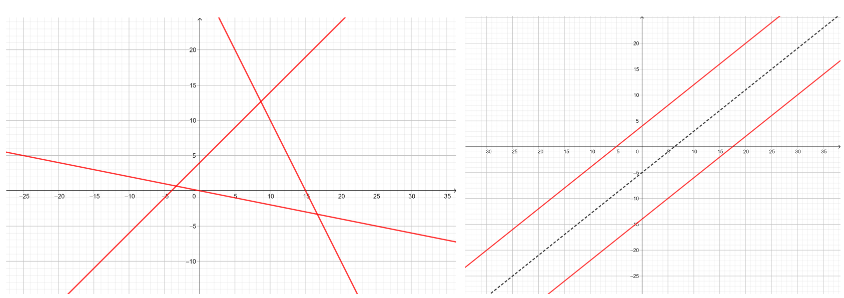

Figura 1: Poliedro acotado (izquierda) y poliedro que contiene una línea (derecha).

En la figura derecha se representa la línea contenida por el poliedro con la recta punteada. Notar que los bordes del conjunto y la recta son paralelos. La condición para que existan soluciones óptimas en un problema de optimización con esta región factible es que el vector de costos $\vec{c}$ sea perpendicular a los bordes del conjunto.

c) **(1.2 pto)** Defina formalmente los conceptos de punto extremo y vértice, y explique su relación.

- **Punto extremo:** Corresponde a un punto perteneciente al poliedro que no puede ser formado por la combinación convexa de otros dos puntos del poliedro.
- **Vértice:** Vector perteneciente al poliedro tal que sea posible encontrar un hiperplano que defina un semiespacio que contenga a todo el poliedro, y que lo intersecte en un solo punto (el vértice).

Ambos conceptos son equivalentes para un poliedro convexo no vacío.

d) **(1.2 pto)** ¿Cómo se puede construir una solución básica para un problema en forma estándar con n variables y m restricciones linealmente independientes? ¿Qué se requiere para que dicha solución sea factible?

El problema en forma estándar con n variables y m restricciones linealmente independientes definen un problema de optimización de la forma:

$$\begin{aligned} \min\ \ & c^T x \\ \text{s.a}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde A está formada por los coeficientes que acompañan las n variables del problema y b es un vector formado por los términos constantes de las restricciones. Además, se define la matriz básica $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ formada por las m columnas linealmente independientes de A.

Una solución básica del problema de optimización se puede construir resolviendo la expresión $x_B = B^{-1}b$ (vector de largo m de variables básicas), y con las $n-m$ variables restantes seteadas a cero. La condición para que esta solución sea factible es que $x_B = B^{-1}b \geq 0$, es decir, todas las componentes básicas son no nulas.

e) **(1.2 pto)** Si una restricción no está activa en el óptimo del problema primal, ¿Cuál es el valor óptimo de la variable dual asociada?

Por holgura complementaria, se debe cumplir que si x y p son las soluciones factibles óptimas del problema primal y dual respectivamente, entonces:

$$p_i \cdot (a_i^{'} x - b_i) = 0, \forall i \tag{1}$$

$$(c_j - p^{'} A_j) \cdot x_j = 0, \forall j \tag{2}$$

Dado que la restricción del problema primal no está activa, entonces $a_i^{'} x - b_i \neq 0$. De esta forma, por la ecuación 1 se debe cumplir que necesariamente $p_i = 0$, por lo que el valor óptimo de la variable dual asociada es cero.