Roberto Cárdenas Dobson
Departamento de Ing. Eléctrica
Universidad de Chile

# EL 4004
# Fundamentos de Control de Sistemas

## Controladores en Variables de Estado

Diapositivas basadas en las realizadas por la Prof. Constanza Ahumada y el prof. Greg Asher
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

# Contenido

# Controlabilidad

- Un sistema es controlable si existe una ley de control $u(t)$ que puede llevar un estado del sistema $x(t)$ a un estado deseado $x = r(t)$.
- Completamente controlable: todos los estados son controlables.
- Estados controlables: algunos estados son controlables.

- Para determinar si un sistema es controlable, basta con la matriz de controlabilidad:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

  - La matriz es cuadrada para sistemas con una entrada.
  - Si el rango de la matriz es menor que el orden del sistema, es no controlable.
  - El número de modos no controlables son $n - rango(C)$

# Obtención Forma Canónica de Control

- Para el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Se desea encontrar la transformación tal que $x_c = Tx$
- Luego:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_c &= TAT^{-1}x_c + TBu \\ y &= CT^{-1}x_c + Du \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u \\ y &= C_c x_c + Du \end{aligned}$$

- La forma canónica de control se utiliza en sistemas SISO para el diseño de los sistemas de control. El sistema debe ser controlable para poder aplicar la metodología.

# Obtención Forma Canónica Controlable

- Si $\lambda_i$ son los valores propios de $\mathrm{A}$, la ecuación característica es:

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)=0$$
$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

- A partir de $s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n$, se obtiene:

$$A_c=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix},B_c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

# Obtención Forma Canónica Controlable

Determinación de la matriz de transformación $x_c = Tx$

- Se sabe:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$
$$\mathcal{C}_c = [B_c \quad A_cB_c \quad A_c^2B_c \quad \dots \quad A_c^{n-1}B_c]$$
$$\mathcal{C}_c = [TB \;\; TAT^{-1}TB \;\; (TAT^{-1})^2TB \quad \dots (TAT^{-1})^{n-1}TB]$$

- Luego:

$$T^{-1}\mathcal{C}_c = [B \quad AB \quad T^{-1}(TAT^{-1})^2TB \;\dots\; A^{n-1}B] = \mathcal{C}$$

- Por lo que:

$$T^{-1}\mathcal{C}_c = \mathcal{C}$$
$$\Rightarrow T^{-1} = \mathcal{C}\mathcal{C}_c^{-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow T = \mathcal{C}_c\mathcal{C}^{-1}}$$

# Obtención Forma Canónica Controlable

Pasos para la obtención de la Forma Canónica Controlable:

Determinar $\mathcal{C}$ a partir de $A$ y $B$

Encontrar la ecuación característica de $A$

Escribir $A_c$ y $B_c$

Determinar $\mathcal{C}_c$

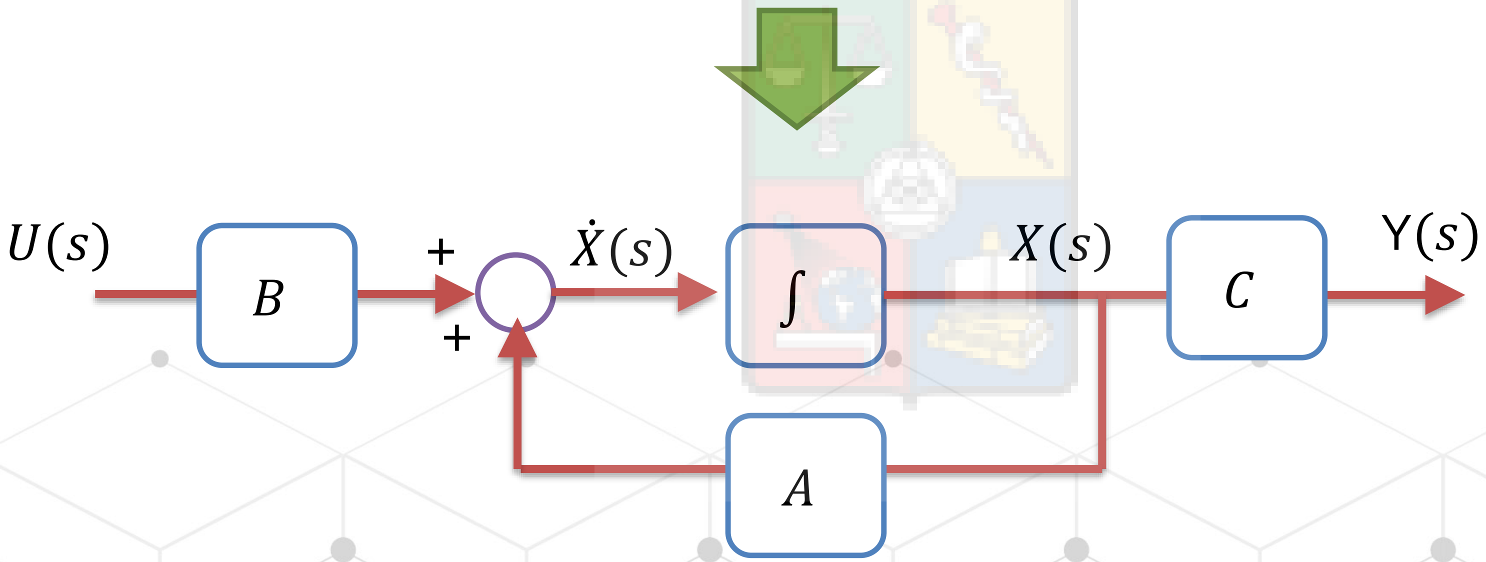
Calcular $T = \mathcal{C}_c\mathcal{C}^{-1}$

Revisar $B_c = TB$

# Controlador con Seguimiento de Referencia

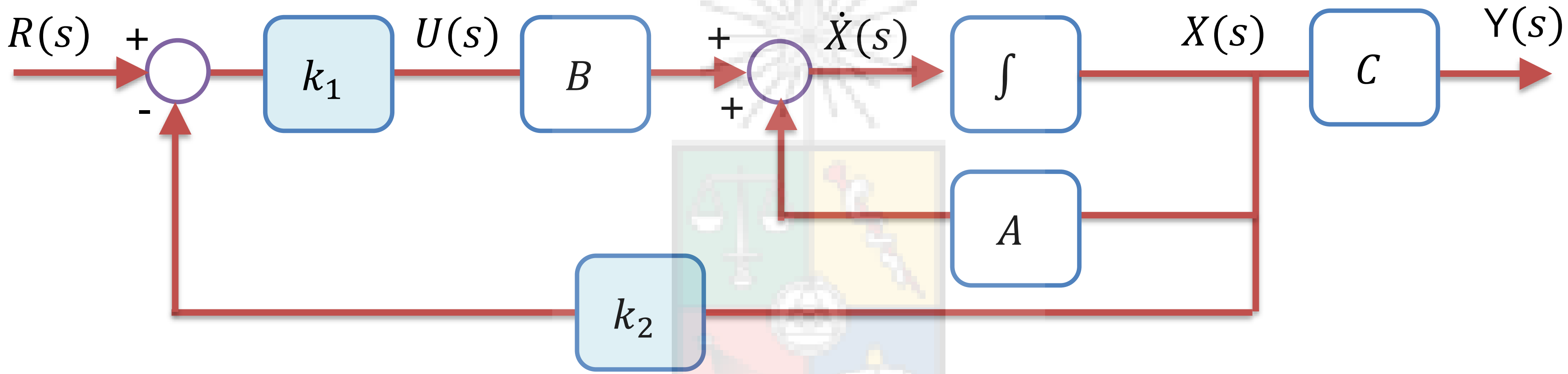
- Representación de diagrama de sistema en variables de estado.

$$\dot{X}(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s)$$



# Controlador con Seguimiento de Referencia

- Realimentación de estados




$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\\ u &= k_1(r - k_2 x)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(k_1 r - k_1 k_2 x)\\ y &= Cx\end{aligned}$$

$$k_1 k_2 = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bk_1 r\\ y &= Cx\end{aligned}}$$

# Controlador con Seguimiento de Referencia

- Dada la función de transferencia en lazo cerrado:

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_1 r$$
$$y = Cx$$

- El problema se reduce a:

Encontrar B tal que se obtengan los valores de $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ deseados.
Para ello, se resuelve:

$$|A - BK - \lambda I| = 0$$

2 soluciones se verán:
- A partir de la Forma Canónica Controlable
- A partir de la Forma Canónica Modal/Diagonal

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- Sistema:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u\\ y &= C_c x_c\end{aligned}$$

- El sistema se pasa a forma canónica controlable. La transformación es:

$$\dot{x}_c = TAT^{-1}x_c + TBu$$
$$y = CT^{-1}x_c$$

- Donde $x_c = Tx$ y $T = \mathcal{C}_c\mathcal{C}^{-1}$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- El sistema en la forma canónica está dado por:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u$$
$$y = C_c x_c$$

Con

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Donde $a_i$ es el coeficiente de $s^{n-i}$ o $\lambda^{n-i}$ de $a(s)$, la ecuación característica de lazo abierto.

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- El diseño de la ley de control viene dado por:

$$u = -K_c x_c = -(k_{c1}\ k_{c2}\ \dots k_{cn}) x_c$$

- La forma canónica controlable en lazo cerrado es:

$$\dot{x}_c = (A_c - B_c K_c) x_c + B_c k_{c1} r$$
$$y = C_c x_c$$

Con:

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (k_{c1}\ k_{c2}\ \dots k_{cn})$$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

$$A_c - B_cK_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} & \cdots & k_{cn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_c - B_cK_c = \begin{bmatrix} -a_1 - k_{c1} & -a_2 - k_{c2} & -a_3 - k_{c3} & \cdots & -a_n - k_{cn} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-a_1 - k_{c1}, -a_2 - k_{c2}, \dots, -a_n - k_{cn}$ son los coeficientes de la ecuación característica en lazo cerrado.

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -a_1 - k_{c1} & -a_2 - k_{c2} & -a_3 - k_{c3} & \dots & -a_n - k_{cn} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomios de la ecuación en lazo cerrado:

$$(s - \lambda_{c1})(s - \lambda_{c2}) \dots (s - \lambda_{cn}) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

- Igualando:

$$\alpha_i = a_i + k_{ci}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{ci} = \alpha_i - a_i}$$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- La matriz de realimentación $K_c$ se ha obtenido en coordinadas canónicas:

$$\mathrm{k_{ci}} = \alpha_\mathrm{i} - \mathrm{a_i}$$

- Para pasar a variables de estado con significado físico:

$$u = -K_c x_c$$
$$x_c = Tx$$

$$u = -K_c T x = -Kx$$

Luego:

$$\boxed{K = K_c T}$$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- Procedimiento:

Dados $A, B, C$ encontrar la ecuación característica de lazo abierto a partir de $|A - BK| = 0$

Seleccionar los polos en lazo cerrado $\lambda_c$ y armar la ecuación característica en lazo cerrado $\alpha(s)$

Calcular $k_{ci}$ (Permite encontrar $K_c$)

Escribir $A_c, B_c$ y encontrar $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_c$

Calcular $T = \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$ y encontrar $K = K_c T$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Considerar:

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{Cx}$$

- Primero se debe transformer el sistema a la forma canónica modal/diagonal.

$$\dot{x}_D = \Lambda x_D + Qu$$

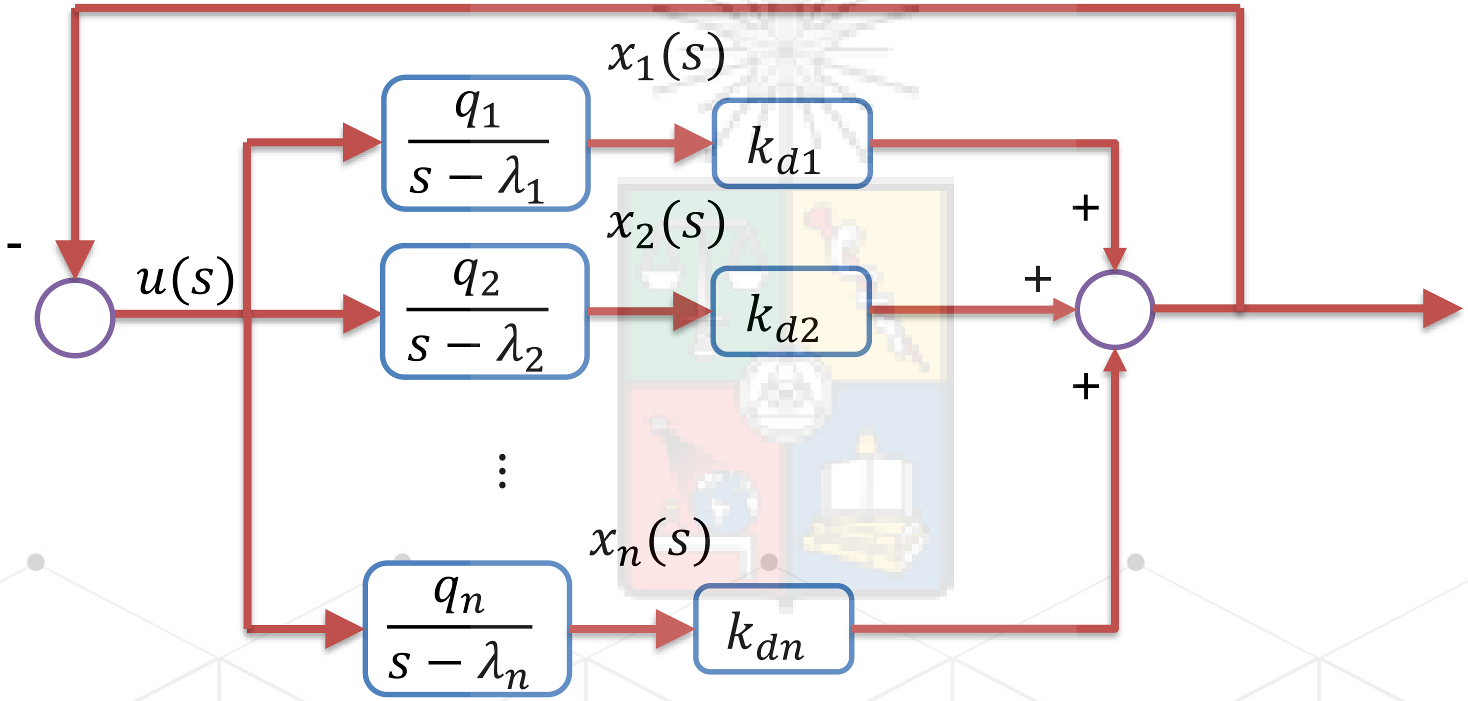
Donde:

$$Q = \vec{v}^{-1}\mathrm{B}$$

$$\dot{x}_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} x_D + \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} u$$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Diagrama de Bloques:




- Ley de Control:

$$u = -K_d x_D = -[k_{d1} \quad k_{d2} \quad \dots \quad k_{dn}]x_D$$

# Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Procedimiento:

Pasar el sistema a la forma modal y escribir ecuación característica en lazo cerrado

↓

Seleccionar los polos en lazo cerrado $\lambda_d$ y encontrar la ecuación característica en lazo cerrado $\alpha(s)$

↓

Calcular $k_{di}$ a partir de las ecuaciones características (Permite encontrar $K_D$)

↓

Encontrar $K = K_D \vec{v}^{-1}$

# Ejercicio Propuesto 4

Para el sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Se desea mantener la referencia del sistema de tal forma que se tengan polos en lazo cerrado ubicados en:

$$s = -1 \pm j1, s_3 = -4$$

Determine el controlador $K$.

# EL 4004
# Fundamentos de Control de Sistemas

## Clase 27

Controladores en Variables de Estado