Roberto Cárdenas Dobson
Departamento de Ing. Eléctrica
Universidad de Chile

EL 4004
Fundamentos de Control de Sistemas
Control en Espacio de Estado

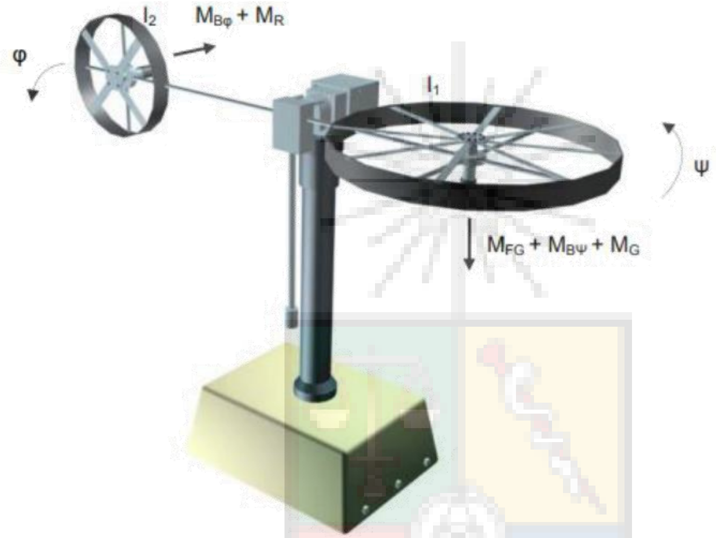
Diapositivas basadas en las realizadas por la prof.: Dra. Constanza Ahumada y el prof. Greg Asher
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

Contenido

Variables de Estado

- Número de entradas /salidas
  - SISO
  - SIMO
  - MISO
  - MIMO
- Lazo Control
  - Abierto
  - Cerrado
  - Otros
- Linealidad
  - Lineal
  - No-lineal
- Tiempo
  - Continuo
  - Discreto
- Dependencia del Tiempo
  - Dinámico (depende)
  - Estático (no depende)

Variables de Estado



Voltaje V_1
Voltaje V_2

Ángulo ϕ
Velocidad $\dot{\phi}$
Ángulo ψ
Velocidad $\dot{\psi}$

- Ecuaciones de Estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Con:

- $x(t)$: Variable de Estado
- A, B, C, D: Matrices. Pueden variantes o invariantes en el tiempo.

Variables de Estado – Función Transferencia

- Ecuaciones de Estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Aplicando Laplace se tiene:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Función de Transición de estado: $\phi(s) = (sI - A)^{-1}$

Variables de Estado – Función Transferencia

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- Si $X(0) = 0$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$
$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Nótese que $(C(sI - A)^{-1}B + D)$ es la función de transferencia. Si es MIMO, y el sistema es lineal, se puede aplicar superposición

Variables de Estado – Función Transferencia

- Solución de Ecuación de Estado:

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$\Downarrow$

Función de Transición de estado en el tiempo

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = e^{At}$$

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

- Polos del sistema se obtienen a partir del polinomio característico:

$$\det(sI-A) = 0$$

Variables de Estado – Ecuaciones Diferenciales

- Para un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

- Se definen los estados:

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)$$

Variables de Estado – Ecuaciones Diferenciales

- De las ecuaciones anteriores se construye el siguiente sistema:

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = x_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d}{dt}x_n(t) = -a_0x_1(t) - \cdots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + u(t)$$

- Con lo que se llega a:

Forma canónica controlable

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Funciones Matlab/Octave: ss2tf(), tf2ss()

Variables de Estado – Ejemplo 1

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}} \longrightarrow Y(s)$$

G(s)

- Se tiene:

$$(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)Y(s) = U(s)$$

- En el dominio del tiempo:

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

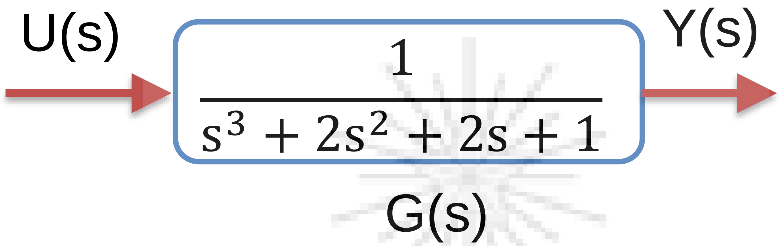
- Se definen los estados:

$$\dot{x}_1 = \dddot{y} = -2\ddot{y} - 2\dot{y} - y + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$\dot{x}_3 = x_2$$

- Con lo que:

$$x = \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \\ y \end{bmatrix}$$

Variables de Estado – Ejemplo 1



- Se definen los estados:

$$\dot{x}_1 = \dddot{y} = -2\ddot{y} - 2\dot{y} - y + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$\dot{x}_3 = x_2$$

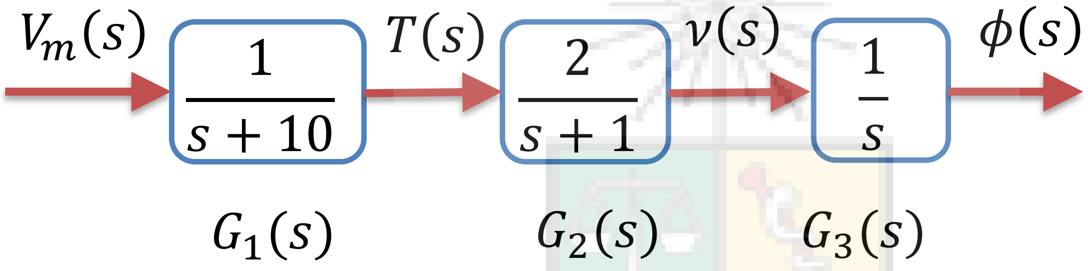
- Luego:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio Propuesto 2

- Encontrar la representación en variables de estado de:



Formas Canónicas

- Sistema en Variables de Estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- **La representación de un sistema en variables de estado no es única.**
- Para pasar de una representación a otra se utilizan matrices de transformación T.
- Modelos Clásicos:
  - Sentido Físico $\Rightarrow$ Por ejemplo control de la máquina DC
  - Forma Canónica Controlable
  - Forma Canónica Observable
  - Forma Canónica Diagonal (Jordan)

Formas Canónicas - Transformaciones

Sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Consideremos transformar la representación en variables de estado en otra representación en variables de estado:

$$T \text{ tal que } \tilde{x} = Tx \text{ y } x = T^{-1}\tilde{x}$$

- Luego:

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow T^{-1}\dot{\tilde{x}} = AT^{-1}\tilde{x} + Bu$$
$$y = Cx + Du \Rightarrow y = CT^{-1}\tilde{x} + Du$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = TAT^{-1}\tilde{x} + TBu$$
$$y = CT^{-1}\tilde{x} + Du$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x} + Du$$

Formas Canónicas - Transformaciones

- Relación con Función de Transferencia:

$$\tilde{G}(s) = \tilde{C}\left(sI - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$$
$$= CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D$$
$$= CT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB + D$$
$$= CT^{-1}(T(sI - A)T^{-1})^{-1}TB + D$$
$$= CT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB + D$$
$$= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$

La ecuación característica y la función de transferencia son indiferente a la representación en variable de estado que se encuentre el Sistema.
¿Qué significa esto en términos de estabilidad?

Forma Canónica Controlable

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_{n-1}S^{n-1} + b_{n-2}S^{n-2} + \ldots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

La forma canónica de control se utiliza también como se muestra en la diapositiva 11. Ambas son aceptables

Forma Canónica Observable

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}$$

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \\ \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D=0$$

Forma Canónica Diagonal

- Los vectores propios por la derecha son: $\vec{v} = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}]$

$$A\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}\lambda_1, \qquad A\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2}\lambda_2, \qquad \dots, \qquad A\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_n}\lambda_n$$

- Luego: $A\vec{v} = A[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}] = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A\vec{v} = \vec{v}\Lambda$$

$$\Rightarrow \Lambda = \vec{v}^{-1}A\vec{v} \Leftrightarrow \tilde{A} = TAT^{-1}$$

- Los vectores propios no son únicos.
- Problemas:
  - Valores propios repetidos $\Rightarrow \vec{v}$ no es invertible
  - Valores propios complejos $\Rightarrow \vec{v}$ complejo

Controlabilidad

- Se considera el sistema en forma canónica modal en el que todos los modos pueden ser modificados por la entrada.

$$\dot{y} = \Lambda y + Qu$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

Es controlable

- Para la siguiente matriz el primer estado no es afectado por la entrada:

$$\dot{y} = \Lambda y + Qu$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

No es controlable

Controlabilidad - Ejemplo

- Para raíces repetidas (Jordan):

Controllable:

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

Uncontrollable:

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

- Para raíces complejas:

Controllable:

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \underline{u}$$

Uncontrollable:

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

Controlabilidad

- Un sistema es controlable si existe una ley de control $u(t)$ que puede llevar un estado del sistema $x(t)$ a un estado deseado $x = r(t)$.
- Completamente controlable: todos los estados son controlables.
- Estados controlables: algunos estados son controlables.

- Para determinar si un sistema es controlable, basta con la matriz de controlabilidad:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

  - La matriz es cuadrada para sistemas con una entrada.
  - Si el rango de la matriz es menor que el orden del sistema, es no controlable.
  - El número de modos no controlables son $n - rango(C)$

  - ¿Qué sucede si un estado no es controlable?. Si el estado es no controlable pero es estable, podríamos estar en problemas si la dinámica es muy lenta.
  - Si el estado no es controlable y su función de transferencia es inestable, entonces definitivamente estamos en problemas