

Apuntes de Fundamentos de Control EL-4113

Versión 3.0

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)

Universidad de Chile



Roberto Cárdenas Dobson

Profesor Titular del Departamento de Ing. Eléctrica UCH

Página Web Personal

Índice general

Índice	38
--------	----

I INTRODUCCIÓN A ESTE APUNTE	39
------------------------------	----

1. Apunte del Curso EL-4113	40
-----------------------------	----

1.1. Objetivos	40
----------------	----

1.1.1. Conocimientos Previos	41
------------------------------	----

1.2. Clasificación de los Sistemas de Control	42
---	----

1.3. Sistema SISO	43
-------------------	----

1.3.1. Sistema SISO a lazo abierto	43
------------------------------------	----

1.3.2. Sistema SISO a lazo cerrado	45
------------------------------------	----

1.4. Bibliografía Recomendada y Recursos Disponibles.	47
---	----

1.5. Agradecimientos	49
----------------------	----

II SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN Y SU	
----------------------------------	--

IMPORTANCIA EN EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL 50

2. Sistema de Segundo Orden 51

2.1. Introducción 51

2.1.1. Fórmulas del Sistema de Segundo Orden 56

2.2. Sistema de Segundo Orden No-Ideal con un Cero Extra 60

2.2.1. Influencia de los Ceros en la Amplificación de Señales de Alta Frecuencia 62

2.2.2. Influencia de los Ceros en un Sistema de Control a Lazo Cerrado 64

2.3. Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra 66

2.3.1. Respuesta en el Tiempo de un Sistema de Primer Orden . . . 67

2.3.2. Respuesta del Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra . 68

2.4. Polos Dominantes 70

2.4.1. Análisis Visual de los Polos de un Sistema 71

III LUGAR DE LA RAÍZ O MÉTODO DE EVANS 73

3. El Método del Lugar Geométrico de las Raíces o *Root Locus* 74

3.1. Introducción 74

3.2. Fundamentos del Método de Lugar de la Raíz o Método de Evans . . .	77
3.2.1. Condiciones de Módulo y Ángulo Propuestas por Evans	78
3.2.2. Ejemplo de Aplicación de las condiciones de Módulo y Ángulo . . .	80
3.2.3. Puntos que no Pertenecen al Lugar de la Raíz	83
3.3. Algunas de las Reglas mas Importantes del Lugar de la Raíz	85
3.3.0.1. Reglas del Lugar de la Raíces	86
3.3.1. Criterio de Estabilidad de Routh–Hurwitz	90
3.3.2. Ejemplo de Aplicación del Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz	93
3.3.3. Ejemplo. Aplicando el Criterio de Routh Hourwitz Para Encontrar la Ganancia Crítica	94
3.3.4. Puntos de Arranque y de Llegada (<i>Breakaway y Break-in Points</i>)	98
3.3.5. Un ejemplo del Cálculo de los Puntos de Arranque y de Llegada	100
3.3.6. Ángulos de Partida y de Llegada a Polos/Ceros Complejos . . .	102
3.3.7. Un ejemplo del Cálculo de los Ángulos de Partida de Polos Complejos	104
3.3.8. Algunos de los Lugares de la Raíces mas Comunes	106
3.4. Ceros de Lazo Cerrado	106
3.5. Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos	110

3.6. Funciones de Sensibilidad	111
--	-----

IV PRINCIPIO DEL MODELO INTERNO Y CALCULO DE ERRORES EN ESTADO ESTACIONARIO 115

4. Errores en estado estacionario 116

4.1. Introducción	116
-----------------------------	-----

4.2. Principio del Modelo Interno	118
---	-----

4.3. Cálculo de Errores en Estado Estacionario Utilizando el Teorema del Valor Final de Laplace.	122
--	-----

4.3.1. Coeficientes de Error de Posición, Velocidad y Aceleración . .	125
---	-----

V KINDERGARTEN DE DISEÑO DE CONTROLADORES 127

5. Diseño Básico de Controladores 128

5.1. Introducción	128
-----------------------------	-----

5.2. Diseño de Controladores Proporcional Integral o PI	132
---	-----

5.3. Compensación por cancelación	135
---	-----

5.3.1. Efectos de la Cancelación Imperfecta de Polos y Ceros	136
--	-----

5.3.2. Compensación por Cancelación de una Planta de Mayor Orden	139
--	-----

5.4. Compensación tipo Butterworth	141
5.5. Compensación tipo IP	145
5.6. Compensación en el lazo de realimentación	148
5.6.1. Comentarios Acerca de los Distintos Métodos Discutidos Anteriormente	151

VI DISEÑO DE COMPENSADORES I 153

6. Diseño de Compensadores I	154
6.1. Controladores <i>Tradicionales</i>	154
6.1.1. Controlador PID	155
6.1.2. Comentarios Acerca del Diseño Realizado	160
6.2. Compensación en Cascada	161
6.3. Redes en atraso-adelanto	164
6.3.1. Red en Adelanto	164
6.3.2. Red en Atraso	165
6.3.3. Método de la Bisectriz	165
6.3.4. Diseño de un Compensador en Adelanto Utilizando el Método de la Bisectriz	168
6.4. Un Simple Ejemplo de Aplicación de Redes en Atraso-Adelanto	169

6.4.0.1. Mallas de Segundo Orden	173
--	-----

VII DISEÑO SIN COMPUTADOR 175

7. Diseño de Compensadores Utilizando Gráficos y Calculadora 176

7.1. Introducción	176
-----------------------------	-----

7.2. Primer Control 2020	177
------------------------------------	-----

7.2.1. Primera Pregunta	177
-----------------------------------	-----

7.2.1.1. Resolución 1.	178
--------------------------------	-----

7.2.1.2. Resolución 2.	180
--------------------------------	-----

7.2.2. Segunda Pregunta	181
-----------------------------------	-----

7.2.2.1. Resolución 1.	183
--------------------------------	-----

7.2.2.2. Resolución 2	184
---------------------------------	-----

7.2.2.3. Resolución 3	186
---------------------------------	-----

7.2.2.4. Resolución 4	188
---------------------------------	-----

7.2.3. Ejemplo de Compensación Utilizando el método de la Bisectriz	191
---	-----

7.2.3.1. Resolución 5	191
---------------------------------	-----

7.3. Primer Control 2016	195
------------------------------------	-----

7.3.1. Primera Pregunta	195
-----------------------------------	-----

7.3.1.1.	Resolución 1.	196
7.3.1.2.	Resolución 2	197
7.3.1.3.	Resolución 3	200
7.3.2.	Segunda Pregunta	202
7.3.2.1.	Resolución 1	203
7.3.2.2.	Resolución 2	206
7.3.2.3.	Resolución 3	208
7.4.	Primer Control 2021	210
7.4.1.	Primera pregunta	211
7.4.1.1.	Resolución 1.	212
7.4.1.2.	Resolución 2.	213
7.4.1.3.	Utilizando Routh-Hurwitz	216
7.4.1.4.	Resolución 3	217
7.4.2.	Segunda pregunta	217
7.4.2.1.	Resolución 1.	219
7.4.2.2.	Resolución 2.	221
7.4.2.3.	Resolución 3.	222
7.4.2.4.	Resolución 4.	222

7.4.2.5. Resolución 5.	223
--------------------------------	-----

VIII DISEÑO DE COMPENSADORES II 226

8. Algunos Tópicos Adicionales de Diseño de Compensadores 227

8.1. Anti-windup	227
----------------------------	-----

8.1.1. Límites del Actuador	227
---------------------------------------	-----

8.1.2. Desempeño sin Considerar Anti-Winding Up	230
---	-----

8.1.3. Desempeño Considerando un Método de Anti-WindUp para Controladores Tipo PI	233
--	-----

8.2. Un Esquema de Anti-WindUp más General	236
--	-----

8.2.0.1. Implementación del Antiwinding-Up para un Controlador PI	239
--	-----

8.2.1. Ejemplo de Aplicación Para un PID con un Polo Extra	240
--	-----

8.2.2. Consideraciones de Ruido en Sistemas con Alta Frecuencia Natural	242
--	-----

8.3. Lazos de Control Anidados	243
--	-----

8.3.1. Ejemplo. Metodología de Diseño del Sistema de Control de una Máquina de Corriente Continua	245
--	-----

8.3.2. Diseño del Lazo Externo de la Máquina de Continua	248
--	-----

8.3.3.	Diseño del Lazo Interno de la Máquina de Continua	251
8.3.4.	Comentarios Acerca de la Diferencia de Velocidades Entre Lazo Interno y Externo	252
8.4.	Retardos de Transporte	253
8.4.1.	Aproximación del retardo utilizando Padé	255
8.4.2.	Errores en la Aproximación de Padé	257
8.4.3.	Ejemplo de Diseño de Sistemas de Control Considerando Retardos	260
8.4.3.1.	Diseño Utilizando una Aproximación de Padé de Tercer Orden	264
8.5.	Compensación Feedforward o Prealimentación	266
8.5.1.	Sistema de Control de un Filtro LC Considerando/Sin Considerar Prealimentación	267
8.5.2.	Resultados sin Incluir Prealimentación	270
8.5.3.	Resultados con Prealimentación	272
8.5.4.	¿Qué Efectos Produce la Prealimentación?	274
8.6.	Internal Model Control	276

IX DISEÑO DE COMPENSADORES UTILIZANDO

MATLAB 279

9. Ejercicios Adicionales 280

9.1. Problema dos, Examen 2021	280
9.1.0.1. Resolución 1	281
9.1.0.2. Resolución 2	282
9.1.0.3. Resolución 3	285
9.1.1. ¿Funcionará?	286
9.1.1.1. Verificando la operación inestable	289
9.2. Control de una Máquina de Corriente Continua Incluyendo Anti-Windup	290
9.2.0.1. Diseño del Controlador del Lazo Interno	292
9.2.0.2. Diseño del Controlador del Lazo Externo	293
9.2.0.3. Diseño del Algoritmo Antiwind-up Para Ambos Lazos	295
9.3. Validación del Diseño Utilizando Simulación	296
9.3.0.1. Seguimiento de Referencia de Velocidad y Corriente .	297
9.3.1. Control de un Sistema con Entrada Sinusoidal	299
9.3.1.1. Control Utilizando un Controlador PI	300
9.3.1.2. Control Utilizando un Controlador Resonante	302
9.3.1.3. Ejercicio Propuesto	305

X INTRODUCCION AL DOMINIO DIGITAL O Z 307

10. Conceptos de Control Digital 308

10.1. Introducción 308

10.1.0.1. Muestreador o Conversor A/D 310

10.1.0.2. Retenedor de Orden Cero o Zero Order Hold (ZoH) 314

10.1.0.3. Respuesta de frecuencia del ZoH 318

10.1.0.4. Implementación del ZoH Utilizando Conversores D/A 319

10.2. Breve Repaso de la Transformada z 321

10.2.0.1. Ejemplo 1. Transformada z de un Escalón Unitario . 322

10.2.0.2. Ejemplo 2. Transformada z de una Rampa Unitaria . 323

10.2.0.3. Transformada z de un sistema de control digital SISO 325

10.2.0.4. Transformada z de una Planta de Primer Orden y un Retenedor de Orden Cero 327

10.2.0.5. Errores en Estado Estacionario 329

10.3. Teorema del Muestreo de Nyquist-Shannon 331

10.3.1. Transformada de Fourier de una Señal Muestreada 332

10.3.2. Efectos del *Aliasing* en un Sistema de Control Digital 334

10.3.2.1. Consideraciones en la Selección de la Frecuencia de Muestreo	337
10.3.2.2. Influencia de la Respuesta de Frecuencia de la Planta en la Selección de la Frecuencia de Muestreo	338
10.3.3. Filtro <i>Antialiasing</i>	339
10.4. El Plano z y la Transformación de s a z	342
10.4.1. Transformación del <i>Locus</i> de coeficiente de Amortiguamiento Constante	343
10.4.2. Transformación del <i>Locus</i> de Frecuencia Natural Constante	344
10.5. Transformando de z a s	345
10.5.0.1. Transformando el Semiplano Izquierdo del Círculo Unitario del Plano z	348
XI DISEÑO APROXIMADO DE CONTROLADORES EN EL DOMINIO Z	351
11. Diseño Utilizando la Transformada de Tustin	352
11.1. Introducción	352
11.1.1. Transformada Bilineal o de Tustin	353
11.2. Diseño de Controladores Digitales Utilizando Métodos de Diseño en Tiempo Continuo	354

11.2.1. Ejemplo de Diseño Utilizando la Transformada de Tustin . . .	355
11.2.2. Diseño por Tustin Considerando una Menor Frecuencia de Muestreo	359
11.3. Exactitud de los Diseños Realizados Utilizando la Transformada de Tustin	361
11.3.1. Desventajas de Utilizar Altas frecuencias de Muestreo	364
11.3.1.1. Ejemplo del Pasado	365
11.3.2. Comentarios Relacionados con el diseño Utilizando Tustin . . .	366
11.4. Diseño considerando el retardo de transporte producido por el muestreador	367
11.4.1. Diseño por Tustin del Sistema de Control Discreto Considerando $\omega_s = 5\omega_n$	371
11.4.2. ¿Podemos encontrar los valores reales de ζ y ω_n de los diseños discutidos en esta sección?	373
11.4.2.1. Diseño utilizando $\omega_s = 30\omega_n$	374
11.4.2.2. Diseño utilizando $\omega_s = 10\omega_n$	375
11.4.2.3. Diseño utilizando $\omega_s = 10\omega_n$ y considerando el retardo del ZoH en el diseño analógico.	377
11.4.2.4. Diseño utilizando $\omega_s = 5\omega_n$ sin considerar el retardo del ZoH en el diseño analógico.	378

11.4.2.5. Diseño utilizando $\omega_s = 5\omega_n$ Considerando el Retardo del ZoH en el Diseño Analógico.	379
11.4.2.6. Ventajas de utilizar Altas frecuencias de Muestreo . .	379

XII DISEÑO EXACTO DE CONTROLADORES EN EL DOMINIO Z 381

12.Diseño Utilizando Lugar de la Raíz en el Plano z	382
12.1. Lugar de la Raíz en z	382
12.1.1. Condiciones de Módulo y Ángulo	384
12.1.2. Redes de Atraso y Adelanto en el plano z	386
12.1.2.1. Malla en Adelanto en el plano z	386
12.1.2.2. Malla en Atraso en el plano z	387
12.1.3. Representación de Retardos en z	387
12.1.4. Algoritmos Anti-windup en z	389
12.1.4.1. Versión en z del Algoritmo de Anti-Windup para Controladores Bipropios Presentado en la Sección 8.2	389
12.1.4.2. Implementación del algoritmo de la Fig. 12.5 para el caso de un PI Digital	390
12.1.5. Implementación de un Algoritmo de Anti-WindUp por Programa	391

12.1.6. Método de Routh-Hurwitz Aplicado al Plano z	393
12.1.6.1. Ejemplo de Aplicación de Routh-Hurwitz al Plano z	395
12.1.7. Ejemplo de compensación en el Plano z Utilizando el Método de Evans	399
12.1.8. Problema del Primer Examen 2021	403
12.1.8.1. Resolución primera parte	404
12.1.8.2. Resolución segunda parte	406
12.1.8.3. Resolución Tercera parte	407
12.1.9. Primer Problema Segundo Control 2021	409
12.1.9.1. Resolución Primera Parte	410
12.1.9.2. Resolución de la segunda parte	413
12.1.9.3. Resolución Tercera Parte	415
12.1.9.4. Resolución Cuarta Parte	416

Índice de figuras

1.1. Clasificación de los Sistemas de Control. En este apunte se estudiarán los sistemas tipo SISO, lineales e invariantes en el tiempo (Figura tomada de las diapositivas de la Prof. Constanza Ahumada).	42
1.2. Sistema SISO operando a lazo abierto.	44
1.3. Ejemplo de un sistema a lazo abierto. Un semáforo regulando el tráfico.	45
1.4. Estructura típica de un sistema de control a lazo cerrado.	46
1.5. Como se muestra en esta figura, los polos de lazo cerrado pueden ser inestables a pesar de que todos los polos de lazo abierto sean estables.	47
2.1. Representación de un polo complejo. Por simplicidad, se muestra solo uno de los polos. La distancia desde el origen al polo es la frecuencia natural ω_n	53
2.2. Respuesta del sistema de segundo orden ideal, considerando distintos coeficientes de amortiguamiento y entrada escalón unitario en la ecuación (2.1).	54

2.3. Respuesta de sistemas de segundo orden ideal considerando $\zeta = 0.5$ y frecuencias naturales de $\omega_n = 4\text{rads/seg}$ (izquierda) y $\omega_n = 8\text{rads/seg}$ (derecha) respectivamente. Ambos sistemas tienen la misma forma de onda de respuesta, pero el sistema que tiene el doble de frecuencia natural es el doble de rápido y alcanza el mismo punto en la mitad del tiempo. La mayor velocidad de respuesta corresponde a los polos que se encuentran mas alejado del origen del plano s	56
2.4. Parámetros comúnmente utilizados para caracterizar la respuesta de un sistema de segundo orden ideal. La entrada utilizada en (2.1) es un escalón unitario.	57
2.5. Sistema de segundo orden con un cero extra, ver (2.9).	61
2.6. Transformada de Fourier de un escalón. La magnitud de $G(\omega)$ es mayor en las frecuencias bajas o corriente continua. Sin embargo, existen componentes de alta frecuencia que son amplificadas por los ceros de una función de transferencia.	63
2.7. Respuesta en el tiempo de sistemas de segundo orden más un cero, considerando dos posiciones del cero, $a/(\zeta\omega_n) = 10$ y $a/(\zeta\omega_n) = 1$. . .	65
2.8. Respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden. (figura tomada de las diapositivas de la profesora Constanza Ahumada)	67
2.9. Representación en el plano complejo de un sistema de segundo orden no-ideal con un polo extra en el denominador. Ver (2.16).	68
2.10. Sistema con varios polos situados a distintas distancias del origen . .	72

3.1. Lazo de Control SISO. (a) Componentes típicos de un lazo de control SISO con elementos que se encuentran en el lazo directo y en el lazo de realimentación. (b) representación comúnmente utilizada. Todo el lazo directo es usualmente denominado $G(s)$ y todo el lazo de realimentación es $H(s)$	75
3.2. Calculo de la condición de módulo en forma gráfica.	80
3.3. Cálculo de la condición de ángulo en forma gráfica.	82
3.4. <i>The Spirule</i> . La Herramienta de diseño de controladores y construcción del <i>Lugar de las Raíces</i> , fabricada por la compañía de Walter Evans .	83
3.5. Punto fuera del lugar de la raíz. Por convención las flechas de la figura muestran la dirección en que se mueven los polos de lazo cerrado a medida que se aumenta la ganancia. No existe ningún valor de la ganancia K que nos permita ubicar un polo de lazo cerrado en el punto "b".	84
3.6. Lugar de la raíz en el eje real para una configuración de polos y ceros. a) Ganancia positiva. b) Ganancia negativa.	87
3.7. Ejemplo de un sistema con cuatro polos y un cero (ver (3.22)). Sistema con ganancia positiva donde dos de los polos se mueven al semiplano derecho si es que se incrementa suficientemente la ganancia.	89
3.8. Ejemplo de un sistema con cuatro polos y sin considerar el cero en (3.22). Sistema con ganancia positiva donde nuevamente dos de los polos se mueven al semiplano derecho si es que se incrementa suficientemente la ganancia.	89
3.9. Controlador proporcional aplicado a una planta que posee un polo inestable.	95

3.10. Lugar de la Raíz correspondiente al sistema de control que se encuentra en la Fig. 3.9. Se puede observar que para ganancias pequeñas, menores a la ganancia crítica, el sistema es inestable.	96
3.11. Diagrama de polos y ceros correspondientes a (3.28), utilizado para aplicar las condiciones de módulo y ángulo. El valor de ω es una incógnita.	97
3.12. Ejemplo de puntos de arranque y puntos de llegada. Por razones de espacio y simplicidad se utilizan los vocablos de habla inglesa. La dirección de aumento de la ganancia K se indica en la figura.	99
3.13. Evolución de la ganancia del sistema en los puntos de arranque y de llegada.	100
3.14. Lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia de la ecuación (3.37). El sistema tiene un punto de arranque en el segmento entre los polos y un punto de llegada en el segmento entre los ceros. Como es convención, la flecha indica la dirección en que aumenta la ganancia.	101
3.15. Ángulos de partida y llegada a ceros y polos complejos de lazo abierto.	102
3.16. Cálculo del ángulo de partida.	103
3.17. Polos y ceros de la función de transferencia a lazo abierto de (3.42)	105
3.18. Lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia a lazo abierto de (3.42). Se asume una ganancia variable en esta función de transferencia.	105
3.19. Ejemplo del lugar de la raíz. Dos polos solamente.	107
3.20. Ejemplo del lugar de la raíz. Dos polo y un cero.	107
3.21. Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos.	110

3.22. Sistema de control considerando ruido y realimentación unitaria. Esta figura es utilizada para definir las funciones de sensibilidad.	112
4.1. Sistema SISO con la definición de error $e(s)$	117
4.2. Soluciones de la ecuación característica. Para un sistema asintóticamente estable, todos los polos de lazo cerrado, es decir las soluciones de $1 + G(s)H(s)$, se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s . Todos esos polos tienen parte real negativa si el sistema es asintóticamente estable.	119
4.3. Cancelación de los errores de estado estacionario utilizando el principio del modelo interno. El principio es muy simple, los polos ubicados en el denominador del controlador, se diseñan para cancelar los polos que producen respuesta forzada en $y^*(s)$	121
5.1. Locus de todos los puntos que producen igual frecuencia natural ω_n en el plano s . No se consideran los puntos ubicados en el semiplano derecho ya que obviamente producen polos inestables.	130
5.2. Locus de todos los puntos que producen igual coeficiente de amortiguamiento ζ . En el plano s este locus es una línea recta.	131
5.3. Locus de todos los puntos que producen igual tiempo de establecimiento.	131
5.4. Aplicación de un controlador PI en una planta de primer orden.	133
5.5. Lugar de la raíz correspondiente a un controlador PI aplicado a una planta de primer orden.	133
5.6. Aplicación de un compensador que considera cancelación del polo de la planta	135
5.7. Lugar de la raíz considerando cancelación.	136

5.8. Lugar de la raíz considerando cancelación imperfecta. El cero del controlador se ubica a la izquierda del polo de la planta.	137
5.9. Lugar de la raíz considerando cancelación imperfecta. El cero del controlador se ubica a la derecha del polo de la planta.	138
5.10. Lugar de la raíz considerando cancelación del polo más lento en un sistema que considera tres polos de lazo abierto y un controlador <i>PI</i>	140
5.11. Lugar de la raíz donde se muestra que en algunos casos cancelación es una mala idea ya que produce un sistema que es inestable para todo valor de ganancia.	142
5.12. Ubicando los polos en una posición similar a la existente en un filtro Butterworth de tercer orden.	143
5.13. Controlador IP para la regulación de una planta de primer orden.	146
5.14. Controlador IP para la regulación de una planta de primer orden. a) digrama equivalente al de la Fig. 5.13. b) representación del sistema IP como el típico lazo de control de una entrada, una salida (SISO)	146
5.15. Sistema de control con parte del compensador en el lazo de realimentación.	148
5.16. Sistema de control incluyendo compensación en el lazo de realimentación.	149
5.17. Lugar de la raíz correspondiente a un sistema de control donde el cero del compensador se coloca en el lazo de realimentación. En la sección cercana a los polos dominantes el lugar de la raíz es similar al que se obtuvo en la Fig. 5.5	150
6.1. Típico lazo de control ya discutido en los capítulos anteriores.	154

6.2. Diagrama de lugar de las raíces correspondiente a un controlador PI siendo utilizado con la planta mostrada en la ecuación (6.5). Se asume realimentación unitaria.	156
6.3. Diagrama de lugar de las raíces correspondiente a un controlador PID siendo utilizado con la planta mostrada en la ecuación (6.5). Se asume realimentación unitaria.	157
6.4. Respuesta de frecuencia del controlador PID ideal mostrado en la ecuación (6.6). Nótese que el ruido de alta frecuencia existente en el sistema de control, podría ser considerablemente amplificado utilizando este compensador.	158
6.5. Respuesta de frecuencia del controlador $PID +$ polo extra mostrado en la ecuación (6.6).	159
6.6. Lugar de la Raíz donde la condición de ángulo no se cumple para el punto de diseño	162
6.7. Implementación típica de una red en adelanto.	164
6.8. Implementación típica de una red en atraso.	165
6.9. Método de la bisectriz, el cual minimiza la separación entre el polo y el cero de una malla en adelanto.	167
6.10. Ángulos utilizados en el método de la bisectriz.a) Valor de los ángulos antes de considerar la malla en adelanto. b) Valor de los ángulos requeridos para calcular la posición del polo y del cero de la malla en adelanto.	169
6.11. Diagrama del lugar de la raíz de la planta mostrada en (6.17) más un compensador que incluye las mallas de atraso y adelanto requeridas para lograr el punto de diseño.	171

6.12. Modelo en Simulink, que permite evaluar el desempeño del compensador mostrado en la ecuación (6.20)	172
6.13. Respuesta en el tiempo correspondiente al Modelo en Simulink de la Fig. 6.12	172
7.1. Sistema de control utilizado en la primera pregunta	177
7.2. Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto mostrada en (7.1)	179
7.3. Sección del lugar de la raíz donde los polos de lazo cerrado no tienen componente imaginaria.	180
7.4. Punto de diseño donde se encuentra el coeficiente de amortiguamiento $\zeta=0.707$. Las flechas verdes indican la dirección de aumento de la ganancia.	181
7.5. Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto (7.3). Las asíntotas verticales están centrada en $s=0.1$	183
7.6. Planta y elementos de compensación utilizados para alcanzar el punto de diseño.	185
7.7. Distancia desde el punto de diseño a los polos y ceros.	186
7.8. Cálculo de la posición del tercer polo, que se produce al ajustar la ganancia con el objetivo de obtener polos dominantes en $-5 \pm j5\omega$	188
7.9. Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.14).	189
7.10. Respuesta de un escalón unitario aplicado al sistema de lazo cerrado compuesto por $G(s)H(s)$ de (7.14) y realimentación unitaria.	189
7.11. Efecto de mover el polo desde $s=-55.1$ a $s=-40$	190

7.12. Aplicación del método de la bisectriz al problema anterior.a) Valor de los ángulos antes de considerar la malla en adelante. b) Valor de los ángulos requeridos para calcular la posición del polo y del cero de la malla en adelante.	192
7.13. Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.19)	193
7.14. Parte del lugar de la raíz de la Fig. 7.13, mostrando principalmente la zona en que se encuentran los polos dominantes. Función de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.19).	194
7.15. Respuesta de un escalón unitario aplicado al sistema de lazo cerrado compuesto por $G(s)H(s)$, de (7.19), y realimentación unitaria.	195
7.16. Sistema de control utilizado en la primera pregunta.	196
7.17. Posibles lugares de la raíces correspondientes a la ecuación (7.20). En ambos casos existen tres raíces, dos de ellas se van hacia el infinito a través de asíntotas ubicadas en $\pm 60^\circ$. La tercera asíntota está en 180°	198
7.18. Diagrama utilizado para aplicar la condición de ángulo y encontrar el punto de cruce al semiplano derecho.	199
7.19. Comprobación de los valores encontrados en el desarrollo de este problema	201
7.20. Filtro LC utilizado para alimentar una carga resistiva. Este filtro es apropiado para alimentar cargas aisladas en micro-redes, ya que posee menor densidad de potencia que otras alternativas.	202
7.21. Sistema de control incluyendo la planta de (7.31) y el filtro de medición.	204
7.22. Punto de diseño y posición de los polos y ceros del sistema de control, incluyendo el controlador propuesto en (7.33).	205

7.23. Lugar de la raíz obtenido al considerar el controlador de (7.44), la planta de (7.39) y el filtro de (7.28). El diagrama muestra solo el sector de los polos dominantes, por lo que no puede apreciar el filtro de (7.28) aunque su influencia en el lugar de la raíz está considerada. En la parte b) de esta figura se muestran las posiciones de los 5 polos de lazo cerrado obtenidos al utilizar $K_c \approx 0.0405$. Los polos dominantes se encuentran bien ubicados en el punto de diseño.	210
7.24. Respuesta a entrada escalón unitario obtenida al considerar el controlador de (7.44), la planta de (7.39) y el filtro de (7.28).	211
7.25. Lazo de control del problema uno, primer control del segundo semestre del 2021.	211
7.26. Lugar de la raíz correspondiente a la ecuación de lazo abierto de (7.46).213	
7.27. Lugar de la raíz correspondiente a la ecuación de lazo abierto de (7.47). Nótese que este lugar de la raíz se ha construido asumiendo ganancia negativa.	214
7.28. Lugar de la raíz correspondiente a la ecuación de lazo abierto de (7.57). El gráfico no está a escala y el lugar de la raíz no parece un círculo perfecto aunque lo es.	219
7.29. Lugar de la raíz correspondiente a (7.57) y locus de tiempo de establecimiento (t_s constante.	221
7.30. Lugar de la raíz correspondiente a una función de lazo abierto compuesta de (7.57) más la malla lag $(s + a)/s$	223

- 8.1. La figura muestra un condensador de $2000\mu F$. Los condensadores de alto valor demandan mucha energía en la carga y descarga, por lo tanto si se requiere cargar el condensador rápidamente, se necesita un actuador de alta potencia. La resistencia en serie con el condensador puede ser externa o intrínseca al condensador no-ideal. 228
- 8.2. Representación de un saturador o limitador habitualmente utilizada en un sistema de control 229
- 8.3. Modelo en Simulink de la planta mostrada en (8.2) controlado utilizando el compensador de (8.3) y realimentación unitaria. El limitador esta ajustado para entregar una salida lineal entre -2 y 2. . 231
- 8.4. Respuesta del sistema de la Fig. 8.3. El primer gráfico muestra la evolución del error. El segundo muestra la salida de la parte proporcional del controlador P, el tercer gráfico muestra la salida del integrador. 231
- 8.5. Salida del actuador y de la variable controlada correspondientes al sistema de la Fig. 8.3. El primer gráfico muestra la salida del actuador. El segundo muestra la salida del lazo de control. 232
- 8.6. Sistema de control correspondiente a la figura 8.3 pero considerando anti-windup. Este modelo es válido para fines de simulación solamente ya que la implementación en un sistema de control real se efectúa a través de código, por ejemplo en lenguaje *C* y usualmente es bastante simple de implementar (menos complicado que lo que parece en la figura). El antiwinding-up mostrado es aplicable principalmente a controladores PI. 233

8.7. Respuesta del sistema de la Fig. 8.6 que considera un esquema básico de anti-windup. El primer gráfico muestra la evolución del error. El segundo muestra la salida de la parte proporcional del controlador P, el tercer gráfico muestra la salida del integrador. Se puede observar las apreciables diferencias existentes con respecto a las respuestas mostradas en la Fig. 8.4.	235
8.8. Respuesta del sistema de la Fig. 8.6 que considera un esquema básico de anti-windup. El primer gráfico muestra la salida del actuador. El segundo muestra la salida del sistema de control. Se puede observar que el tiempo de establecimiento y sobrepaso son substancialmente menores a los valores alcanzados en la Fig. 8.5.	236
8.9. Diagrama de bloques equivalente a la función de transferencia de (8.6)	237
8.10. Implementación del esquema de anti-windup propuesto para controladores con funciones de transferencias que son bipropias.	238
8.11. Implementación del esquema de anti-windup propuesto para el controlador PI con la función de transferencia de (8.8).	239
8.12. Implementación del esquema de anti-windup generalizado para el controlador de (8.10). En amarillo se encuentra todo lo que se implementa en el compensador. El resto corresponde a la planta. La entrada $d(t)$ es una perturbación (d es por disturbance).	241
8.13. Resultados de simulación sin considerar anti-windup para el sistema de control de la Fig. 8.12.	241
8.14. Resultados de simulación considerando el esquema de anti-windup generalizado aplicado al sistema de control mostrado en la Fig. 8.12. .	242

8.15. Efectos de aumentar el ancho de banda del sistema de control y que debido a las limitaciones físicas del sistema no necesariamente se reflejará en mejorar la velocidad de respuesta. Con mayor ancho de banda se aumenta innecesariamente el ruido. En este gráfico la abscisa es la frecuencia de las señales de ruido y la ordenada es la amplitud o ganancia a la salida del sistema SISO.	243
8.16. Sistema de lazos anidados habitualmente utilizado para regular la velocidad y corriente de una máquina eléctrica	245
8.17. Componentes de una máquina de corriente continua. La excitación se asume separada y se muestra en la parte derecha de la figura. La armadura y sus componentes se encuentran en la parte izquierda. . .	245
8.18. Diagrama de control de una máquina de corriente continua utilizando lazos anidados.	247
8.19. Diagrama de control de una máquina de corriente continua asumiendo que el lazo interno es instantáneo	248
8.20. Lugar de la raíz utilizado para diseñar el lazo externo.	249
8.21. Representación del sistema cuando el lazo interno no tiene cero error en estado estacionario.	250
8.22. Lazo interno simplificado, considerando que el lazo externo es muy lento.	251
8.23. Lugar de la raíz utilizado para diseñar el controlador del lazo interno	252
8.24. Respuesta de un sistema compuesto de una planta de primer orden y un retardo de transporte a un escalón unitario. Se puede observar como el retardo de T segundos utilizado en (8.15) afecta la respuesta. Aparte de ese retardo la respuesta no tiene diferencias con respecto a la obtenida con el mismo sistema de primer orden, pero sin retardo. .	254

8.25. Respuesta del sistema considerando $T = 0$ en (8.15). Cómo se mencionó, la forma de la respuesta es idéntica a la obtenida en la Fig. 8.24, pero la respuesta de la planta comienza en el instante en que se aplica la entrada escalón.	254
8.26. Fase exacta y fase de las aproximaciones de Padé de orden 1 a 3. Se considera un retardo de $T=100\text{ms}$	258
8.27. Error de fase de las aproximaciones de Padé de orden 1 a 3. Se considera un retardo de $T=100\text{ms}$. La línea punteada indica un error de cinco grados.	259
8.28. Error de fase de las aproximaciones de Padé de orden 1 a 3 considerando la frecuencia normalizada definida en (8.20). La línea punteada indica un error de cinco grados.	260
8.29. Ejemplo de un sistema simple que considera retardos. El valor del polo de la planta es $a = 20$	261
8.30. Lugar de la raíz correspondiente al sistema mostrado en la Fig. 8.29 y la función de lazo abierto mostrada en (8.22). Nótese que el LGR corresponde a un sistema de ganancia negativa, ya que la aproximación de Padé de primer orden de (8.21), introduce un signo negativo. . . .	262
8.31. Modelo en Simulink del sistema mostrado en la Fig. 8.29 y considerando el controlador de la ecuación (8.23)	263
8.32. Respuesta del sistema mostrado en en la Fig. 8.31 considerando una entrada escalón unitaria.	263
8.33. Lugar de la raíz considerando que la aproximación de Padé de primer orden en (8.22) es reemplazado por una aproximación de tercer orden.	264
8.34. Filtro LC utilizado para alimentar una carga resistiva.	267

8.35. Sistema de control de la corriente y voltaje en un filtro LC considerando una estructura de dos lazos y regulando el voltaje en la carga.	268
8.36. Sistema implementado en Matlab y Simulink para simular el desempeño del sistema de control de la Fig. 8.35 considerando un impacto de carga.	269
8.37. Visión ampliada del diagrama de bloques de la Fig. 8.36 que se utiliza para producir un cambio tipo escalón en la carga R	270
8.38. Resultados obtenidos al simular el sistema de la Fig. 8.36 considerando un impacto de carga y sin considerar prealimentación. a) desempeño del sistema de control considerando todo el período de operación. b) visión ampliada del desempeño cuando se produce el impacto de carga.	271
8.39. Sistema implementado en Matlab y Simulink para simular el desempeño del sistema de control de la Fig. 8.35 considerando un impacto de carga y prealimentación.	272
8.40. Resultados obtenidos al simular el sistema de la Fig. 8.39 considerando un impacto de carga y aplicar prealimentación. a) Desempeño del sistema de control considerando todo el período de operación. b) Visión ampliada del desempeño cuando se produce el impacto de carga.	273
8.41. Simplificación del diagrama de bloques de la Fig. 8.39 utilizada para analizar matemáticamente la prealimentación	274
8.42. Sistema de control basado en IMC.	276
9.1. Sistema de lazos anidados, examen 2021, segundo semestre	280
9.2. Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto de (9.1).	282

9.3. Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto de (9.2) más un controlador PI.	283
9.4. Efecto de reducir la ganancia en el lugar de la raíz del lazo externo. . .	285
9.5. Sistemas de control de lazos anidados utilizando los controladores ya encontrados en la Sección 9.1.	287
9.6. Respuesta del sistema de control con lazos anidados.(a) entrada y salida del lazo externo de control. (b) entrada y salida del lazo interno.	288
9.7. Respuesta del sistema de control con lazos anidados y una variación tipo rampa (con pendiente negativa) en la ganancia proporcional del lazo interno.(a) Entrada y salida del lazo externo de control.(b) Entrada y salida del lazo interno.(c) valor de la ganancia proporcional del controlador; su valor inicial es $K = 20.83$ y su valor final es $K = 6.6$.	290
9.8. Componentes de una máquina de corriente continua. La excitación se asume separada y se muestra en la parte derecha de la figura. La armadura y sus componentes se encuentran en la parte izquierda. . .	291
9.9. Diagrama de bloques del lazo interno, incluyendo retardo en el actuador.	292
9.10. Lugar de la Raíz correspondiente al diagrama de bloques de la Fig. 9.9	293
9.11. Diagrama de bloques del lazo externo.	294
9.12. Lugar de la raíz correspondiente al controlador externo.	294
9.13. controladores de los lazos externo e interno implementados considerando anti-windinding up. a) Controlador del lazo interno, ecuación (9.11). b) Controlador del lazo externo, ecuación (9.12). . . .	295
9.14. Sistema de control del lazo interno y externo implementado utilizando simulink. Los bloques PI externo y PI interno son utilizados para implementar los controladores mostrados en la Figs. 9.13(a) y 9.13(b) respectivamente.	296

9.15. Seguimiento de la referencia de velocidad y corriente. Gráfico superior; velocidad rotacional y su referencia. Gráfico inferior; corriente de armadura y su referencia.	297
9.16. Voltaje E entregado por el actuador a la armadura (gráfico superior), y error de seguimiento de la corriente de armadura (gráfico inferior). .	298
9.17. Sistema de control considerando referencia sinusoidal de 50Hz.	300
9.18. Lugar de la raíz para diseñar el sistema de control considerando un PI y la planta de (9.13)	301
9.19. Resultados de simulación considerando la planta de (9.13) y el controlador PI de (9.14).a) Entrada de referencia de 50Hz y su correspondiente salida del sistema de control. b) Error de seguimiento de la referencia.	302
9.20. Lugar de la raíz obtenido al considerar el controlador de (9.16) y la planta de (9.13)	303
9.21. Diagrama de control implementado en Simulink para verificar el desempeño del controlador mostrado en la ecuación (9.16).	305
9.22. Resultados de simulación considerando la planta de (9.13) y el controlador resonante de (9.16).(a) Entrada de referencia de 50Hz y la correspondiente salida del sistema de control. (b) Error de seguimiento de la referencia.	306
10.1. Ejemplo de implementación de un sistema de control digital.	309
10.2. Efecto de muestrear una señal analógica.	310
10.3. Efecto de muestrear una señal analógica.	311
10.4. Tareas de control típicas que se deben efectuar en cada período de muestreo.	312

10.5. Figura tomada de este Sitio Web . En rojo la señal analógica, en azul la señal discretizada y en verde el error entre la representación digital y el valor analógico.	313
10.6. El error de representación del conversor A/D se puede representar como una señal $\epsilon(t)$ cuyo valor máximo es habitualmente la mitad de la resolución del conversor o $Q/2$. Para más información ver <i>Sistemas de control de tiempo discreto</i> de Katsuhiko Ogata.	314
10.7. El retento de orden cero es un interfaz entre la parte digital y la parte analógica de un sistema de control digital. Físicamente el <i>ZoH</i> es habitualmente implementado utilizando un conversor digital análogo.	315
10.8. Representación gráfica de la operación matemática efectuada en la ecuación (10.1). a) Escalón unitario. b) Escalón unitario desplazado en T segundos. c) resta de a)- b).	315
10.9. Efectos del retenedor de orden cero. A la izquierda se encuentra la salida del sistema de control digital que entrega un tren de pulsos de amplitud variable. Al medio se encuentra el efecto del <i>ZoH</i> que mantiene constante las señales entre muestras. Finalmente, a la derecha, se encuentra la señal de salida que se entrega a la parte analógica del sistema de control	316
10.10 Una señal sinusoidal analógica comparada con la que se obtiene al discretizar y reconstruir la misma señal utilizando un <i>ZoH</i>	317
10.11 Espectro de frecuencia producido por el retenedor de orden cero. La sección marcada como <i>filtro ideal</i> , corresponde a la respuesta de frecuencia de un dispositivo ideal.	319
10.12 Sumador utilizado en la implementación de un conversor D/A	320
10.13 Representación gráfica de las ecuaciones (10.7) y (10.8).	321

10.14 Transformada z de un (pequeño) conjunto de funciones elementales. Una tabla con más funciones se encuentra en Tabla de Laplace a z o en otros sitios de la Web.	324
10.15 Diferencias en la representación en el plano z de un sistema de dos bloques en el plano s donde existe/no existe un multiplicador que los separa	325
10.16 Sistema típico de control digital incluyendo el retenedor de orden cero, y filtros.	326
10.17 Control SISO digital que considera realimentación unitaria.	327
10.18 Representación exacta en el plano z del sistema de control mostrado en la Fig. 10.17. Recuerde que esta representación en z describe el comportamiento del sistema en los instantes de muestreo (ver Fig. 10.13) y no entre muestras.	328
10.19 Sistema de control SISO en el plano z . El lazo directo es $G(z)$ y el lazo de realimentación es $H(z)$	329
10.20 Señal analógica y su correspondiente señal muestreada	332
10.21 La señal analógica o de espectro continuo se muestra en la parte superior. El espectro de la señal muestreada se encuentra en la parte inferior de la figura, en este caso se utiliza una frecuencia de muestreo apropiada y no existe <i>aliasing</i>	333
10.22 Superposición o alising de dos espectros de frecuencias consecutivos. .	334
10.23 La parte superior muestra la señal sinusoidal de frecuencia ω_0 y la parte inferior muestra la señal muestreada.	335

10.24	Muestreo de una señal compuesta de una sinusoidal más una componente de corriente continua. Nótese que en este caso al procesador ingresan dos componentes continuas. Una que existe y otra que es artificialmente creada por <i>aliasing</i>	335
10.25	Muestreo de una señal sinusoidal utilizando la mínima frecuencia f_s especificada por el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon.	336
10.26	Procesamiento efectuado al interior del procesador digital	338
10.27	Salida del retenedor de orden cero mostrado en Fig. 10.10.	339
10.28	Salida del retenedor de orden cero mostrado en Fig. 10.27, la cual es aplicada a la planta del sistema de control digital. Nótese que la salida no es una sinusoidal ideal; por lo tanto, al aplicar la transformada de Fourier a la señal de salida del retenedor de orden cero, se obtiene una fundamental más un conjunto de armónicos. Estos armónicos son parcialmente eliminados por la planta $G_p(s)$ la cual habitualmente tiene una característica de pasa-bajo.	340
10.29	Sistema de control considerando un filtro <i>anti-aliasing</i> . Este filtro es habitualmente analógico ya que se deben eliminar los componentes de alta frecuencia antes del muestreo de la señal.	341
10.30	Respuesta de frecuencia de un filtro analógico de cuarto orden tipo Butterworth. Las frecuencias útiles deben encontrarse en la zona del pasabanda	341
10.31	Diagrama de Argand de cuatro dimensiones, dos para el dominio (plano s) y dos para el recorrido (plano z).	342
10.32	Transformación de un <i>locus</i> de coeficiente de amortiguamiento constante desde s a z	344
10.33	Transformación de un <i>locus</i> de frecuencia natural constante desde s a z	345

10.34 Punto de diseño para una determinada frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento.	346
10.35 Transformación de un polo de lazo cerrado en z a su equivalente en el plano s	347
10.36 Polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo del círculo unitario.	349
11.1. Sistema de control con realimentación unitaria	355
11.2. Versión SIMULINK del sistema de control con realimentación unitaria. Se utiliza un controlador PI digital, pero por supuestos otros diseños son posibles.	357
11.3. Respuesta del sistema de control correspondiente al sistema de la Fig. 11.2, considerando el controlador discretizado de (11.9) que utiliza Tustin y $\omega_s = 30\omega_n$. Esta respuesta se ha comparado con la obtenida al simular el controlador analógico de (11.6) en el sistema de la Fig. 11.1	358
11.4. Vista ampliada de la respuesta del sistema de control de Fig. 11.3.	359
11.5. Respuesta del sistema de control utilizando una frecuencia de muestreo $\omega_s = 10\omega_n$	360
11.6. Sistema de control incluyendo el retardo de transporte producido por el retenedor de orden cero.	367
11.7. Lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia de (11.11) y un controlador PI.	368
11.8. Comparación de los desempeños alcanzados por el controlador analógico de (11.12) y el diseño discretizado de (11.13) que se obtuvo considerando $\omega_s = 10\omega_n$	369

11.9. Comparación de los desempeños alcanzados por los controladores discretos obtenidos desde (11.6) y (11.12) para $\omega_s = 10\omega_n$.	370
11.10 Comparación de los desempeños alcanzados por los controladores obtenidos considerando $\omega_s = 5\omega_n$.	372
11.11 Representación exacta en el plano z del sistema de control mostrado en la Fig. 10.17	374
12.1. Sistema de control SISO en el plano z . El lazo directo es $G(z)$ y el lazo de realimentación es $H(z)$.	383
12.2. Malla en adelante en el plano z .	386
12.3. Malla en atraso en el plano z .	387
12.4. Representación del retardo de una muestra z^{-1} .	388
12.5. Implementación del algoritmo de anti-windup mostrado en la ecuación (12.11)	390
12.6. Implementación del algoritmo de anti-windup para el PI digital de la ecuación (12.13).	391
12.7. Algoritmo de anti-windup que utiliza una rutina de control implementada en un programa.	392
12.8. Lugar de la raíz correspondiente al sistema de la ecuación (12.26) más un controlador PI digital. La línea de coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.8$ más la curva de frecuencia natural $\omega_n = 30\text{rad/seg.}$ se muestran en la figura.	396
12.9. Lugar de la raíz correspondiente al sistema de la ecuación (12.26) más un controlador PI digital. Para $k_p < 0.589$ existen polos fuera del círculo unitario en el lado derecho de la figura. Para $k > 20.61$ existe un polo que sale del círculo unitario por la izquierda de la figura.	398

12.10	Sistema de control SISO en el plano z con realimentación unitaria. . .	399
12.11	Diseño en el plano z utilizando la condición de módulo y ángulo. El cero del $PI(z)$ debe ser ubicado para cumplir con la condición ángulo en el punto de diseño.	400
12.12	Lugar de la raíz en el plano z correspondiente al sistema discutido en esta sección.	402
12.13	Respuesta del sistema de control considerando una entrada escalón unitario. Este es un sistema en z , por eso la salida de la planta también es escalonada.	403
12.14	Sistema de control en que la planta tiene tres retardos.	403
12.15	Lugar de la raíz correspondiente al sistema de control de la Fig. 12.14.	405
12.16	Punto de diseño en s donde se desea obtener $\zeta = 0.707$	406
12.17	Lugar de la raíz mostrando la posición de los tres polos cuando los polos dominantes tienen un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.707$	408
12.18	Diagrama de control digital en z correspondiente al segundo control de 2021.	409
12.19	Planteamiento del problema requerido para calcular la posición del cero del PI digital.	412
12.20	Lugar de la raíz considerando que se aumenta la ganancia y uno de los polos queda con un polo que tiene un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.12$	413
12.21	Diagrama utilizado para el cálculo de la posición de σ_z	414
12.22	Diagrama utilizado para el cálculo de la posición del cero del controlador PI digital	415
12.23	Lugar de la raíz mostrando las tres asíntotas.	417

Capítulo I

INTRODUCCIÓN A ESTE APUNTE



Apunte del Curso EL-4113

1.1. Objetivos

Este apunte ha sido desarrollado para cubrir la primera parte del curso de Fundamentos de Control EL-4113. No incluye aún tópicos relacionados con control digital utilizando la transformada z , tampoco métodos de diseño utilizando la transformada de Fourier ($j\omega$). La última versión del programa de Fundamentos de Control se encuentra en este [sitio Web](#).

La primera versión de este trabajo fue realizada en el año 2003 cuando me desempeñaba como profesor en la Universidad de Magallanes. Fue ligeramente revisado durante el breve período en que ejercí como profesor en la Universidad de Santiago (USACH) y ésta es su última versión.

Los apuntes están basados en la experiencia personal del autor en el área de control de máquinas y electrónica de potencia, con un buen número de implementaciones experimentales y proyectos de investigación realizados en esta área. Por ese motivo los ejemplos que se realizan corresponden habitualmente a aplicaciones con máquinas eléctricas, filtros LC , filtros LCL , lazos anidados y otras topologías habitualmente utilizadas en mi área de investigación. Además de la experiencia personal del autor, los tópicos relacionados con el diseño de compensadores son parcialmente basados en los contenidos de los cursos de control automático de la Universidad de Nottingham (Inglaterra), realizados para los alumnos de postgrado.

Hago mención a mi área de investigación, debido a que no existen métodos únicos para el diseño de compensadores y es distinto diseñar controladores para un sistema lento, con constante de tiempo de horas (por ejemplo reacciones químicas), que para sistemas eléctricos que tienen constantes de tiempo bastante más rápidas, donde se tiende a privilegiar el uso de controladores más simples, con pocas multiplicaciones y divisiones a realizar en los procesadores digitales. Las metodologías de diseño siempre están influenciadas por el área de trabajo del diseñador. En este caso el contenido del apunte está influenciado por mi experiencia en electrónica de potencia y accionamientos.

1.1.1. Conocimientos Previos

En general los alumnos y alumnas de este curso deberían dominar los siguientes tópicos.

- Se asume que herramientas como Matlab y Simulink se conocen con un nivel de competencia medio o bajo. En la mayor parte de los cursos normales de esta asignatura (no los realizados durante la pandemia), se llevan a cabo algunas clases utilizando computadores, explicando como utilizar herramientas existentes en el *control toolbox* de Matlab. Información acerca de la herramientas SISO Tool de Matlab se encuentra en esta [página Web](#) de la Universidad de Oviedo. Mas información acerca del diseño de sistemas de control utilizando Matlab se encuentra disponible en esta [dirección](#) de la Universidad Politécnica de Valencia España. Adicionalmente Mathwork tiene recursos [en línea](#) con ejemplos e información disponible.
- Se asume que todos dominan herramientas matemáticas como la transformada de Laplace (s), transformada z y la transformada de Fourier ($j\omega$).
- Se asumen conocimiento adecuados de dispositivos mecánicos y eléctricos. Por ejemplo, el funcionamiento de máquinas eléctricas, amplificadores operacionales y circuitos eléctricos y electrónicos.

En este curso, una máquina eléctrica o circuito electrónico, se analiza como una planta; dispositivos como convertidores basados en electrónica de potencia, son actuadores que entregan energía a un sistema. En general no se discute mas allá de lo necesario los detalles constructivos ni la teoría de funcionamiento de estos equipos ya que este es un curso de fundamentos de control, no de máquinas ni de electrónica. Sin embargo, entender bien como funciona una planta, más allá de la función de transferencia, es una ventaja al momento de diseñar un compensador.

- Se asume un buen dominio de variables de estado, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

1.2. Clasificación de los Sistemas de Control



Figura 1.1: Clasificación de los Sistemas de Control. En este apunte se estudiarán los sistemas tipo SISO, lineales e invariantes en el tiempo (Figura tomada de las diapositivas de la Prof. Constanza Ahumada).

En la Fig. 1.1 se muestra una clasificación de los sistemas de control. El acrónimo MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) se utiliza para los sistemas que tiene múltiples entradas y múltiples salidas. El acrónimo SISO (Single-Input Single-Output) se utiliza para aquellos sistemas que tienen una entrada y una salida. Entre los sistemas MIMOs y los SISOs existen variantes que se muestran en la Fig. 1.1.

El contenido del apunte discute metodologías para diseño de controladores SISO (Single- Input Single-Output), principalmente basadas en el Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), también llamado Root-Locus o método de Evans. Se asume tiempo continuo y los sistemas son lineales; es decir se puede aplicar superposición.

1.3. Sistema SISO

En esta sección se realiza una breve introducción a las características y componentes de un sistema SISO operando a lazo abierto y a lazo cerrado.

1.3.1. Sistema SISO a lazo abierto

La Fig. 1.2 muestra un sistema SISO a lazo abierto; la señal $R(s)$ es la referencia a la que se quiere operar la salida. Existe un actuador que habitualmente efectúa la conexión entre una señal de baja potencia (en la entrada) y una señal de alta potencia (a la salida); por ejemplo, la referencia puede ser una señal de baja intensidad obtenida a la salida de un conversor Digital/Análogo . El actuador puede ser un conversor de potencia que efectúa la interfaz entre esta señal de baja intensidad y la entrada de un motor con una potencia de varias centenas de kilowatts.

La variable manipulada es la variable de entrada a la planta. Por ejemplo, en el caso del motor la variable manipulada podría ser la corriente de estator (entre otras opciones). Finalmente se encuentra la variable controlada, que para el caso de una

máquina es habitualmente la velocidad rotacional. Para el caso de una habitación la variable controlada podría ser la temperatura o nivel de luminosidad.

El sistema SISO, a pesar de su nombre, tiene mas de una entrada en la Fig. 1.2; una de ellas es la referencia $R(s)$ y la otra corresponde a las perturbaciones que habitualmente afectan a la planta. En forma ideal una perturbación es una señal que no depende del sistema de control; por ejemplo en un sistema de calefacción la apertura de una ventana se podría considerar como una perturbación.

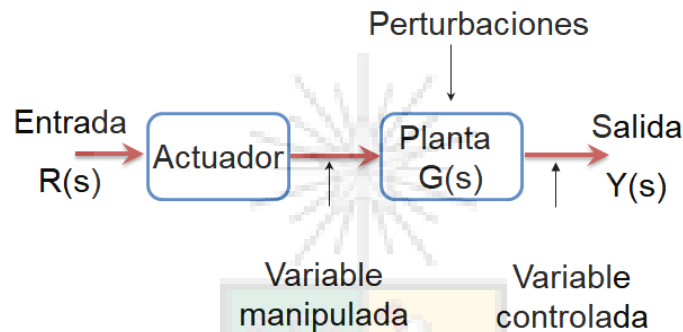


Figura 1.2: Sistema SISO operando a lazo abierto.

La existencia de perturbaciones es una de las razones por la que existen los sistemas de control a lazo cerrado. En un sistema de calefacción a lazo abierto, el usuario puede regular la temperatura a 20°C y dejar ésta bien regulada al comienzo del día. Sin embargo, sin intervención del usuario no es posible que el sistema pueda compensar perturbaciones, como por ejemplo la apertura de una ventana que eventualmente reduciría la temperatura de la sala. En un sistema fotovoltaico una típica perturbación corresponde al paso de una nube que reduce bruscamente la captura de energía. Cuando el sistema está a lazo abierto no se pueden compensar las perturbaciones.

Otro ejemplo de un sistema de lazo abierto es el típico semáforo utilizado para regular el tráfico (ver Fig. 1.3). Los tiempos en que permanece encendida la luz verde o roja, no guardan necesariamente relación con la congestión vehicular existente en

el cruce de calles.

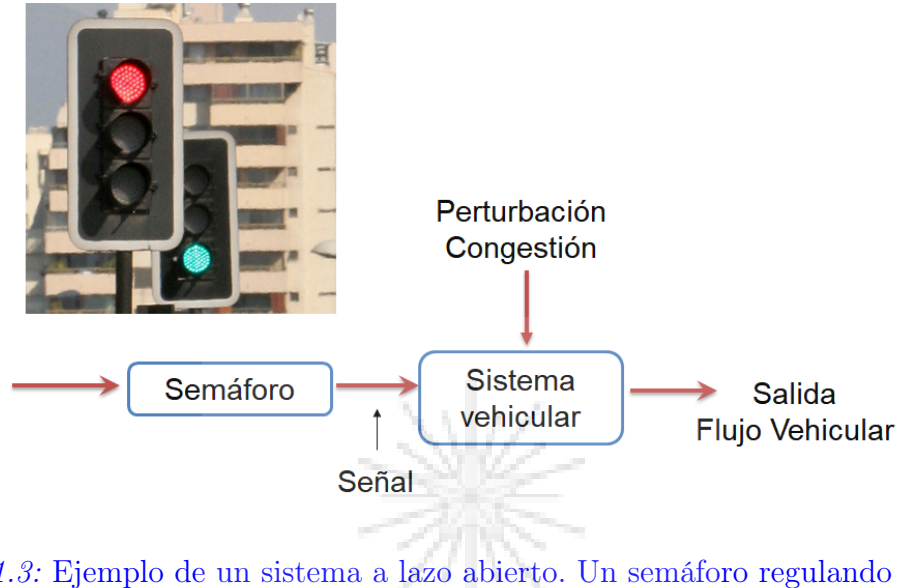


Figura 1.3: Ejemplo de un sistema a lazo abierto. Un semáforo regulando el tráfico.

1.3.2. Sistema SISO a lazo cerrado

La Fig. 1.4 muestra un sistema de control a lazo cerrado. Para regular la salida, se mide ésta utilizando transductores adecuados y un sistema de acondicionamiento de señales que habitualmente amplifica y filtra la señal de salida del transductor, transmitiendo ésta al sistema de control.

Al cerrar el lazo SISO de la Fig. 1.4, se tiene una entrada adicional compuesta por el ruido de medición. La magnitud y componentes de frecuencia de este ruido dependen del diseño del sistema de medición; en general, sensores de baja calidad habitualmente llevan a un mal desempeño del sistema de control de lazo cerrado. Recuerde la máxima GIGO (*Garbage In, Garbage Out*) utilizado frecuentemente en informática y también válida en control automático. Si los transductores son malos tenemos algo de *garbage* ingresando al sistema de control.

En un sistema de medición correctamente implementado, el ruido se puede

atenuar adecuadamente, pero nunca eliminar completamente. El sistema de control debe estar diseñado para evitar la propagación y amplificación innecesaria del ruido.

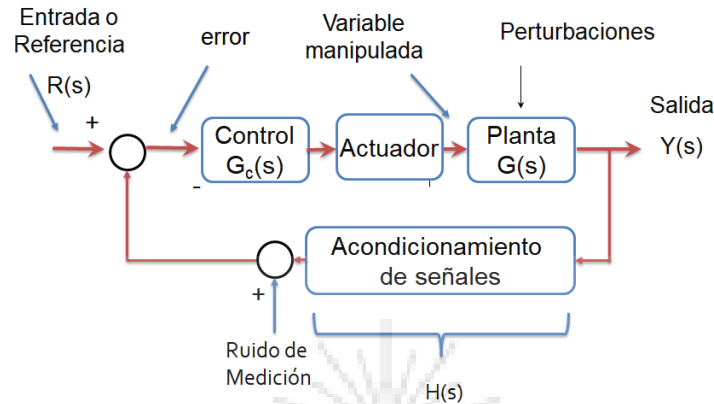


Figura 1.4: Estructura típica de un sistema de control a lazo cerrado.

La típica estructura SISO de lazo cerrado tiene una función de transferencia, denominado $H(s)$, que realimenta la salida hacia el sumador. Utilizando álgebra de bloques y aplicando superposición (recuerde que el sistema es lineal), es posible encontrar la función de transferencia equivalente entre $R(s)$ e $Y(s)$ como:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)G_c(s) \cdot [R(s) - H(s)Y(s)] \\ \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

A la función de transferencia mostrada en la ecuación (1.1) se le denomina función de lazo cerrado. De los cursos previos a esta asignatura, se conoce que los polos de una función de transferencia determinan la estabilidad de un sistema. En el ámbito eléctrico comúnmente se conocen las funciones de transferencia y los polos de cada uno de los elementos existentes en el sistema de la Fig. 1.4. Más aún es muy factible que cada una de los componentes del lazo sea estable y funcione adecuadamente por sí solo. Sin embargo, al cerrar el lazo el sistema podría funcionar muy mal e incluso ser inestable, con polos de (1.1) que se encuentran en el semiplano derecho. Esto se

muestra gráficamente en la Fig. 1.5.

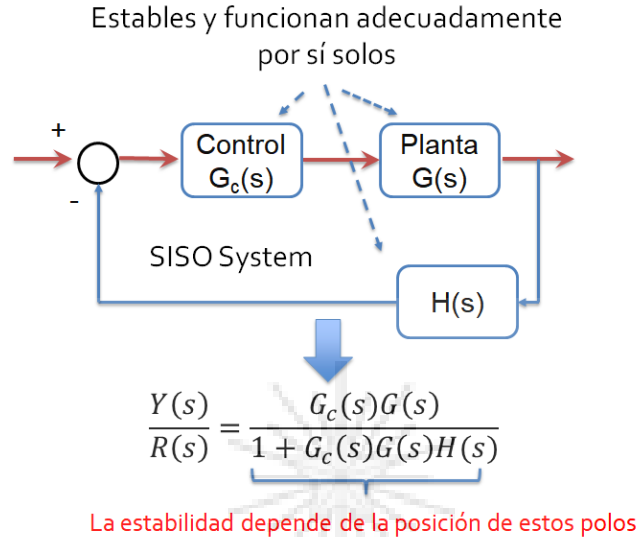


Figura 1.5: Como se muestra en esta figura, los polos de lazo cerrado pueden ser inestables a pesar de que todos los polos de lazo abierto sean estables.

La posición de los polos de lazo cerrado depende de la solución de la ecuación $1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0$ en (1.1). A esta ecuación se le denomina *ecuación característica*. Proponer varios métodos para diseñar el controlador $G_c(s)$, de forma que los polos de lazo cerrado queden bien ubicados y el sistema de control SISO funcionando de acuerdo a ciertas especificaciones de diseño es lo que se discute en la mayor parte de este apunte.

1.4. Bibliografía Recomendada y Recursos Disponibles.

El **programa del curso** tiene una bibliografía recomendada. Además de ésta, existen otros recursos disponibles, parte de los cuales se detallan a continuación:

- El Massachusetts Institute of Technology (MIT) tiene disponible muchos de sus cursos en línea. Yo he utilizado en este apunte algunos ejemplos y material disponible del curso **Principles of Automatic Control**. Bastante más básico, pero aún así útil, es el material del curso **Dynamics and control II**.

Localmente pueden bajar todo el material de *Principles of Automatic Control* [aquí](#).

- Los apuntes y las clases de la Prof. Doris Saez, están disponibles [aquí](#).
- Un profesor de la Universidad de Tehran, tiene recursos bibliográficos disponibles en su [página web personal](#). Todo en idioma inglés.
- En el programa no está considerado uno de mis libros favoritos de control, *Linear Control System Analysis and Design With Matlab-5 Edition (2003)*, John J. D'Azzo, Constantine H. Houpis and Stuart N. Sheldon. Es algo antiguo, pero las bases del control SISO están ahí.
- Versiones en línea de este curso, efectuadas durante la pandemia por miembros del grupo de control del Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE) de la U de Chile, se encuentran disponibles [aquí](#) y en [este lugar](#). Debe tenerse en cuenta que durante la pandemia se entregaron contenidos mínimos.
- *El Control Toolbox Getting Started Guide* se encuentra disponible en [este enlace](#). Recuerden que el DIE ha adquirido licencia multiusuarios de Matlab, Simulink y el Control-Toolbox. Deben contactar a la encargada de computación e informática para usarlas.

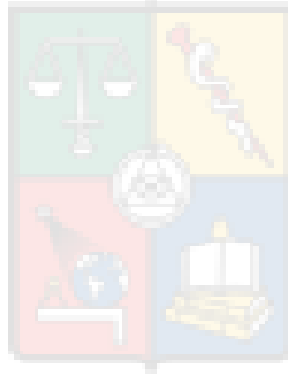
Las posibles versiones futuras de este apunte pueden ser descargadas desde un enlace que en la página web del autor en la sección [apuntes](#).

1.5. Agradecimientos

Se agradece la ayuda de Alan Rojas Montt, alumno de la carrera de Ingeniería Civil Electrónica, Universidad de Tarapacá y de Luciano Vidal Núñez, alumno del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Chile, quienes revisaron los primeros nueve capítulos, corrigieron la ortografía y redacción y depuraron errores.

Los tres últimos capítulos han sido revisados por los profesores auxiliares (versión 2022 del curso de fundamentos), Benjamín Moreno Vásquez y Joaquín Zepeda Valero. Extiendo mi agradecimientos a ellos también.

Jesús Roberto Cárdenas Dobson
(Original 2003 - Revisado 2021/2022)



Capítulo II

SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN Y SU IMPORTANCIA EN EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL



Sistema de Segundo Orden

2.1. Introducción

Entender el sistema de segundo orden es importante para el diseño de controladores ya que cualquier función de transferencia propia puede ser expandida, utilizando fracciones parciales, en múltiples sistemas de orden dos, o sistemas de orden dos más sistemas de orden uno.

La función de transferencia de un sistema de segundo orden **ideal** es la que se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.1)$$

Donde al término ω_n se le denomina frecuencia natural y ζ es el coeficiente de amortiguamiento. Si se consideran polos complejos conjugados, el coeficiente de amortiguamiento debe cumplir con la relación $0 < \zeta < 1$. Nótese que en la literatura el coeficiente de amortiguamiento es también denotado como ξ . En este apunte utilizaremos la notación ζ .

Utilizando la transformada inversa de Laplace, y considerando una entrada escalón $y(s)$ en (2.1) se obtiene la expresión para la respuesta en el tiempo $y(t)$ mostrada en (2.2):

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left[\omega_n \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \right) t + \theta \right] \quad (2.2)$$

Donde el término $\zeta \omega_n$ es la parte real de los polos complejos, $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la parte imaginaria y θ es un ángulo de fase arbitrario (que no es importante para lo que se discute en esta sección). Al término $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ también se le denomina frecuencia natural amortiguada u ω_d en la literatura.

En (2.2), existen dos términos que se utilizan para regular la forma y la velocidad de respuesta del sistema de segundo orden. Estos factores son la frecuencia natural ω_n , que se asocia con la velocidad de respuesta, y el coeficiente de amortiguamiento ζ que modifica la forma de la onda de la respuesta. Ambos términos no están completamente desacoplados, ya que al modificar ζ también se afecta la velocidad de respuesta. Sin embargo, como discutiremos mas adelante, se puede considerar que estos términos se encuentran suficientemente desacoplados para fines de diseño.

En la Fig. 2.1 se muestra la representación en el plano complejo de un sistema de segundo orden. Por simplicidad, solo uno de los polos complejos se muestra en esta figura. Sin embargo, debe tenerse presente que en los sistemas físicos cada polo debe ir acompañado de sus conjugado. De lo contrario, al efectuar la transformada inversa de Laplace a la salida $y(s)$ de un sistema de control, la respuesta en el tiempo dependería de términos imaginarios.

En la Fig. 2.1 el coeficiente de amortiguamiento ζ queda definido como el coseno del ángulo entre el eje σ y el vector frecuencia natural ω_n . La frecuencia natural

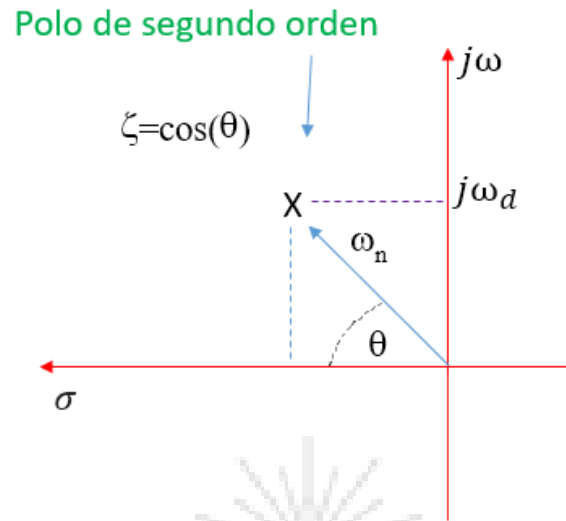


Figura 2.1: Representación de un polo complejo. Por simplicidad, se muestra solo uno de los polos. La distancia desde el origen al polo es la frecuencia natural ω_n .

amortiguada ω_d es la proyección del polo en el eje $j\omega$. Cuando el coeficiente de amortiguamiento es cero, los polos complejos no tienen parte real y cuando el coeficiente de amortiguamiento es uno, los polos complejos son puramente reales. La Fig. 2.2 muestra la respuesta en el tiempo del sistema de segundo orden; si el coeficiente de amortiguamiento es cero o cercano a cero el sistema es altamente oscilatorio con una respuesta poco adecuada para ser utilizada en un sistema de control. Piense que si ese tipo de respuesta se produce al controlar, por ejemplo, una máquina eléctrica, todo el eje mecánico estaría sometido a oscilaciones y esfuerzos que podrían producir daños físicos a algunos componentes que se encuentran en el lazo de control, por ejemplo poleas, cajas de engranajes, aspas, etc. Por supuesto los mismos problemas suceden en otros tipos de procesos cuando la respuesta es muy sub-amortiguada.

Si el coeficiente de amortiguamiento es cercano a uno la respuesta es sobreamortiguada y con un tiempo de subida lento, pero sin *overshoots*, es decir la

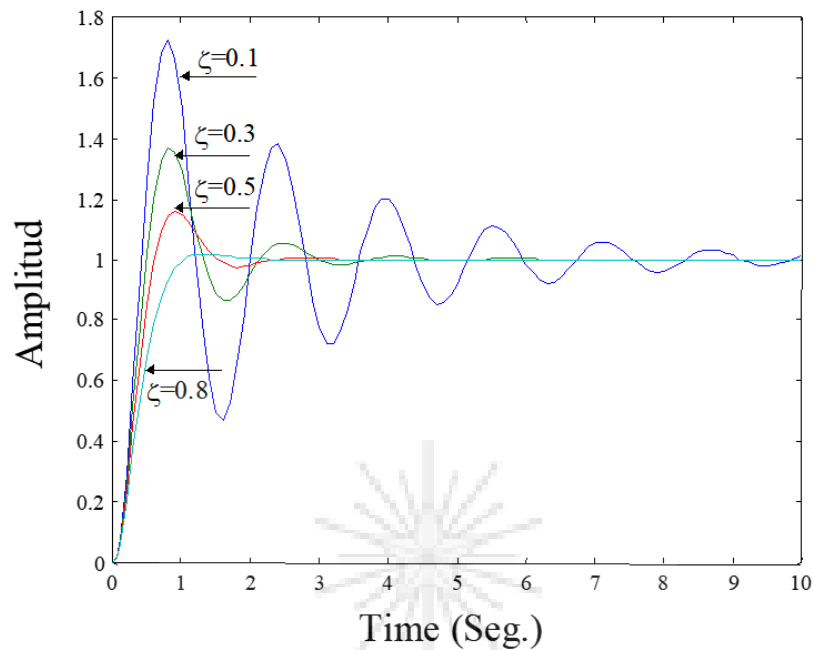


Figura 2.2: Respuesta del sistema de segundo orden ideal, considerando distintos coeficientes de amortiguamiento y entrada escalón unitario en la ecuación (2.1).

salida no sobrepasa a la entrada unitaria. Esto también se considera poco apropiado en algunos sistemas de control, como por ejemplo control de corriente en máquinas y convertidores basados en electrónica de potencia donde habitualmente se utilizan valores cercanos a $\zeta \approx [0.707 - 0.8]$. Sin embargo, en algunos sistemas como por ejemplo control de la posición de un ascensor podría ser una respuesta muy deseable. Imaginen por un momento un ascensor o una correa transportadora que oscile en torno a la respuesta antes de converger a ella en t_s segundos.

En general y como regla de diseño o **receta**, se deberían evitar los sistemas con $\zeta < 0.4$, aunque esto cambia de sistema a sistema (y por supuesto esta regla puede tener excepciones). Un buen criterio de diseño es utilizar un coeficiente de amortiguamiento de aproximadamente 0.707, lo que significa que el ángulo θ de la

Fig. 2.1 es cercano a los 45° . En estas condiciones el sistema es más robusto a las variaciones en los parámetros de la planta o actuador que podrían mover el polo de posición y afectar el diseño. Además cuando $\zeta=0.707$ y se está analizando un sistema de segundo orden ideal, la frecuencia natural es igual al ancho de banda del sistema y es mas simple analizar con Bode un diseño realizado con lugar de la raíz.

De la discusión anterior se puede concluir que el sistema de segundo orden tiene dos parámetros de diseño que se asumen desacoplados entre ellos. La frecuencia natural, que está relacionada con la velocidad de la respuesta, y el coeficiente de amortiguamiento que está relacionado con la forma de onda de la respuesta. Esto es típico en el diseño de sistemas de control tipo SISO (single input single output) que utilizan dos grados de libertad en el diseño. Lo mismo se tiene por ejemplo al diseñar utilizando los diagramas de Bode. En este caso y como se discutirá en el futuro, los parámetros de diseño son el margen de fase (MF) y el ancho de banda (o frecuencia de cruce a lazo abierto).

Para mostrar la dependencia con respecto a ω_n , la Fig. 2.3 muestra la influencia de la frecuencia natural manteniendo el mismo coeficiente de amortiguamiento y considerando como entrada un escalón unitario (sistema de segundo orden ideal). La figura de la izquierda muestra la respuesta obtenida para $\omega_n = 4\text{rads/seg}$ mientras que la figura de la derecha muestra la respuesta obtenida para $\omega_n = 8\text{rads/seg}$. Esta última figura muestra una respuesta que es el doble de rápida que la otra. Recuerde que estos resultados se han obtenido para un sistema de segundo orden ideal, es decir un sistema con solo dos polos complejos conjugados.

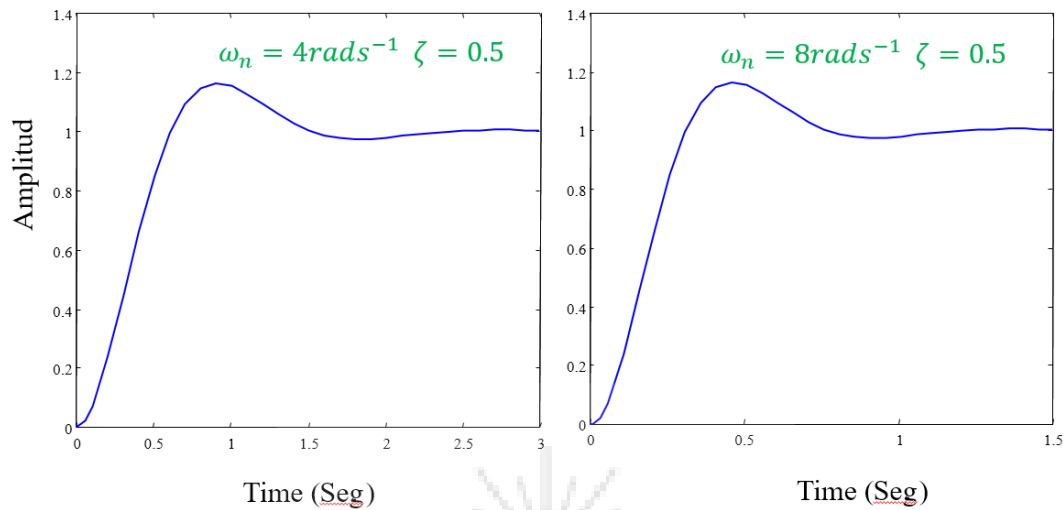


Figura 2.3: Respuesta de sistemas de segundo orden ideal considerando $\zeta = 0.5$ y frecuencias naturales de $\omega_n = 4\text{rads/seg}$ (izquierda) y $\omega_n = 8\text{rads/seg}$ (derecha) respectivamente. Ambos sistemas tienen la misma forma de onda de respuesta, pero el sistema que tiene el doble de frecuencia natural es el doble de rápido y alcanza el mismo punto en la mitad del tiempo. La mayor velocidad de respuesta corresponde a los polos que se encuentran mas alejado del origen del plano s .

2.1.1. Fórmulas del Sistema de Segundo Orden

Existen algunas fórmulas asociadas con el sistema de segundo orden y que son utilizadas al diseñar sistemas de control. La deducción de estas formulas se encuentran en casi todos los libros de control, por ejemplo:

- Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, “Modern Control System”.
- John J. D’Azzo and Constantine H. Houpis, “Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern”.

La figura utilizada para definir parámetros como tiempo de establecimiento, tiempo

de subida, máximo peak y otros del sistema de segundo orden **ideal** es la 2.4. En esta figura se considera una entrada escalón unitario en (2.1), es decir la respuesta en el tiempo descrita por (2.2).

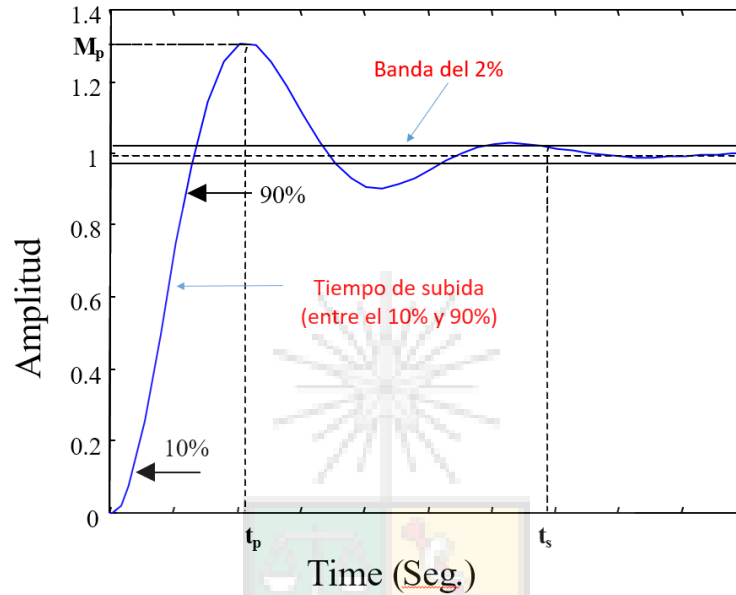


Figura 2.4: Parámetros comúnmente utilizados para caracterizar la respuesta de un sistema de segundo orden ideal. La entrada utilizada en (2.1) es un escalón unitario.

Utilizando la Fig. 2.4, se definen las siguientes formulas del sistema de segundo orden.

1. El porcentaje de sobrepaso, sobre oscilación u *overshoot*. Es el porcentaje sobre el valor del escalón unitario que alcanza la salida $y(t)$ de (2.2). Las fórmulas para calcular el sobrepaso son:

$$M_p \approx 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (2.3)$$

esto entrega el overshoot en por unidad. Alternativamente se puede usar la

ecuación que entrega el valor de overshoot en porcentaje.

$$M_p \% \approx 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (2.4)$$

Utilizando estas ecuaciones podemos demostrar fácilmente que para sistemas con $\zeta = 1$, no existe overshoot. Si se diseña un controlador para un sistema que no permite que se alcancen valores por encima de la referencia, entonces los polos deberían ser reales. Esto también se puede concluir haciendo $\theta = 0$ (equivalente a $\zeta = 1$) en la Fig. 2.1.

2. El tiempo de establecimiento o settling time (habitualmente abreviado como t_s), es una medida de la velocidad del sistema. Este parámetro mide el tiempo en que la respuesta queda acotada a una cierta banda de amplitud (ver Fig 2.4). Para un sistema de segundo orden ideal, el tiempo en que se alcanza la banda del 2 % es:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (2.5)$$

En la literatura también se utiliza, en algunas aplicaciones, la banda del 5 %. El tiempo de establecimiento para esa banda, se calcula como:

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (2.6)$$

El tiempo de establecimiento depende del coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural. Sin embargo, al diseñar sistemas de control, habitualmente el tiempo de establecimiento se modifica utilizando principalmente la frecuencia natural ya que cambios en el coeficiente de amortiguamiento pueden producir formas de onda no deseables en la respuesta del sistema (ver Fig. 2.2).

3. El tiempo antes de alcanzar el máximo peak (t_p). Este es el tiempo en que se produce la máxima amplitud en la salida. Se calcula como:

$$t_p \approx \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.7)$$

4. El tiempo de subida (rise time o T_r) es el tiempo que toma la respuesta para subir desde el 10 % al 90 % de la amplitud del escalón de entrada. El tiempo de subida para un sistema de segundo orden ideal es aproximado por la siguiente expresión;

$$T_r \approx \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} \quad 0.3 \leq \zeta \leq 0.8 \quad (2.8)$$

El tiempo de subida, al igual que el de establecimiento, es afectado por el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural.

Habitualmente los alumnos tienen la duda de cual parámetro utilizar para medir la velocidad de un sistema. El tiempo de establecimiento, es una medida de cuasi estado estacionario; cuando ya la parte transiente del sistema de segundo orden en (2.2) casi ha desaparecido. El tiempo de subida mide de otra forma la velocidad de respuesta, mostrando que tan rápido llega el sistema de control **cerca** de la referencia.

¿Cuál de los indicadores deberíamos utilizar?. En mi experiencia en el área de control de máquinas, el tiempo de subida es mas importante al controlar corrientes, y la mayor parte de los lazos de control de corriente se diseñan con un $\zeta \approx [0.7 - 0.8]$. En otros casos, especialmente en aquellos casos en que overshoots no son deseables, se utiliza el tiempo de establecimiento para medir la velocidad de respuesta.

Complementando las fórmulas de overshoots discutidas anteriormente en las ecuaciones (2.3) y (2.4), la Tabla 2.1 muestra el porcentaje de overshoot en un sistema de segundo orden, con respecto a la variación del coeficiente de amortiguamiento ζ .

ζ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
P.O %	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

Tabla 2.1: Relación entre overshoot y coeficiente de amortiguamiento en un sistema de segundo orden ideal. P.O es la abreviación frecuentemente utilizada (en inglés) para Percentage of Overshoot

Los valores de sobrepaso pueden variar considerablemente en presencia de ceros en la función de transferencia, es decir cuando el sistema deja de ser de segundo orden ideal y contiene un cero en el numerador. Esto se discute en la próxima sección.

2.2. Sistema de Segundo Orden No-Ideal con un Cero Extra

En las páginas anteriores se han analizado los conceptos relacionados con el sistema de segundo orden ideal. En esta sección y la subsiguiente se discutirán dos tipos de sistemas, éstos son; el sistema de segundo orden con un polo extra y el sistema de segundo orden con un cero extra. Se analizará la influencia que tiene la posición del polo o cero extra en la velocidad y forma de onda de la respuesta.

La función de transferencia, considerando un cero extra, es mostrada en la ecuación (2.9).

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2/a(s+a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2.9)$$

¿Por qué existe un término ω_n^2/a en el numerador de (2.9)? Cuando se aplica un escalón unitario a una función de transferencia en el plano s , la respuesta en estado estacionario se calcula efectuando el límite cuando s tiende a cero. Es decir cuando el escalón unitario se ha transformado en corriente continua (utilizando Fourier, esto significa que s es $\approx j0$). Por este motivo se utiliza el término ω_n^2/a para normalizar a 1 la respuesta en estado estacionario del sistema representado por (2.9).

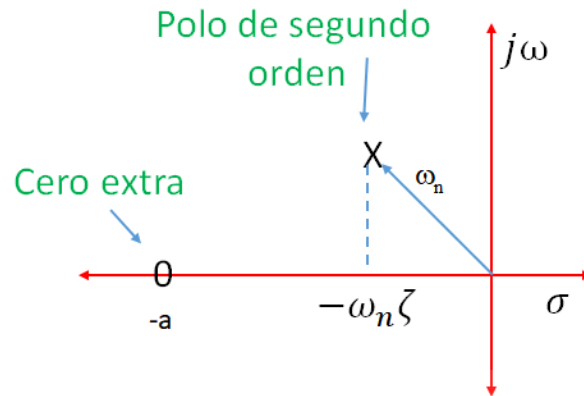


Figura 2.5: Sistema de segundo orden con un cero extra, ver (2.9).

El sistema de polos complejos más el cero se muestra en la Fig. 2.5. Efectuando simulación se analiza el efecto del cero extra considerando variación en la posición a . La Tabla 2.2 muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un cero extra. Para fines de simulación los polos complejos se consideran con una frecuencia natural de $\omega_n = 1$ y $\zeta = 0.45$.

$a / (\zeta\omega_n)$	Porcentaje de sobrepaso	Tiempo de establecimiento	Tiempo de peak
10	21.1	8.13	3.28
5	23.10	8.0	3.0
1	89.90	10.1	2.2
0.5	210.0	10.3	1.5
0.1	1220	15.79	1.3

Tabla 2.2: Relación entre overshoot y coeficiente de amortiguamiento en un sistema de segundo orden no-ideal que considera un cero en el numerador.

De la Tabla 2.2 se puede concluir que cuando la posición a del cero es 10 veces la posición de la parte real $\zeta\omega_n$ de los polos complejos conjugados, entonces el efecto de tener un cero extra es casi despreciable y la respuesta es virtualmente la de un sistema de segundo orden ideal (ver Tabla 2.1). Sin embargo, cuando el cero se acerca

a $\zeta\omega_n$, el efecto en el overshoot es considerable.

Como se menciona varias veces en este punto, el considerar que el efecto del cero desaparece cuando éste se encuentra diez veces más allá de los polos dominantes, es una recomendación. En algunos casos se pueden utilizar valores menores como 7 o incluso cinco veces. Esto se discute también en la sub-sección 2.3.2.

2.2.1. Influencia de los Ceros en la Amplificación de Señales de Alta Frecuencia

El cero $(s + a)$ en el dominio de s es equivalente a la siguiente expresión en el dominio del tiempo:

$$(s + a)u(s) \rightarrow \frac{du(t)}{dt} + au(t) \quad (2.10)$$

Un escalón tiene componentes de alta frecuencia en su flanco de subida y estos afectan la respuesta del sistema. Si aplica la transformada de Fourier a un escalón se obtiene la respuesta que se muestra en la Fig. 2.6.

Asumiendo que se representa un componente de alta frecuencia del escalón como $A_m \sin(\omega_e t)$ y se aplica este componente al término derivador de (2.10) se obtiene,

$$\frac{dA_m \sin(\omega_e t)}{dt} = A_m \omega_e \cos(\omega_e t) \quad (2.11)$$

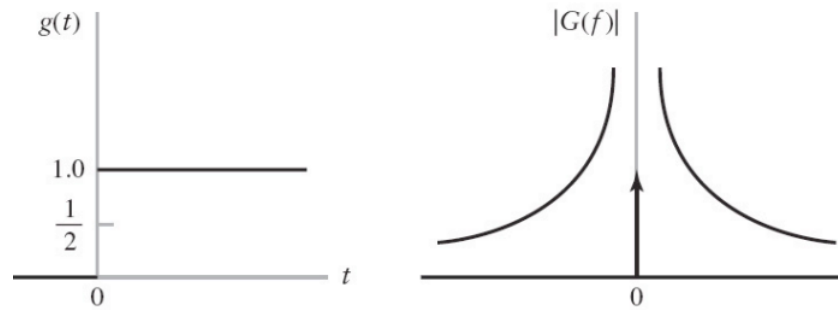


Figura 2.6: Transformada de Fourier de un escalón. La magnitud de $G(\omega)$ es mayor en las frecuencias bajas o corriente continua. Sin embargo, existen componentes de alta frecuencia que son amplificadas por los ceros de una función de transferencia.

La ecuación (2.11) muestra uno de los efectos "desagradables" que producen los ceros. Estos amplifican los componentes de alta frecuencia de una señal; se puede observar que la entrada al sistema es A_m y la salida es $A_m\omega_e$. Por lo tanto, si ω_e es una componente de alta frecuencia, por ejemplo en el orden de los kHz , el efecto amplificador del cero es considerable. Por este motivo todos los que trabajamos en sistemas de control evitamos o somos muy cuidadosos al implementar derivadores (d/dt en un procesador digital). Si es inevitable utilizar un derivador, éste debería ir acompañado de polos que actúen como filtro de los posibles componentes de alta frecuencia que existen en la señal. Por ejemplo los polos de la ecuación (2.9), tienen un efecto filtrante cuando el cero del numerador se encuentra suficientemente alejado de los polos dominantes.

Debe tenerse en cuenta que los valores mostrados en las Tablas 2.1 y 2.2 han sido obtenidos utilizando MATLAB y SIMULINK y por lo tanto no son exactos sino que son dependientes de valores como por ejemplo mínimo y máximo paso de integración, resolución utilizada, método de integración empleado, etc. Sin embargo, aunque no son exactos, los resultados mostrados permiten analizar tendencias y

obtener conclusiones acerca de la influencia de los ceros y polos en la respuesta del sistema.

2.2.2. Influencia de los Ceros en un Sistema de Control a Lazo Cerrado

La influencia de los ceros en un sistema de control es a veces ignorada o no completamente entendida. Los ceros en una función de lazo cerrado no afectan la estabilidad de ésta, pero tienen una influencia significativa especialmente en el *overshoot* (también afectan el tiempo de establecimiento). Cuando el cero de (2.9) se encuentra suficientemente alejado de la parte real de los polos complejos conjugados, la respuesta es casi idéntica a la obtenida con un sistema de segundo orden ideal. Sin embargo, cuando el cero se acerca a los polos complejos, el sobrepaso de la respuesta aumenta significativamente y éste puede ser varias veces superior a la respuesta de un sistema de segundo orden ideal. La Fig. 2.7 muestra la respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden más un cero, considerando dos posiciones para el cero. Se puede observar que a pesar de aumentar el sobrepaso, el tiempo de subida es significativamente menor cuando $a/(\zeta\omega_n) = 1$, es decir cuando el cero se encuentra cerca de los polos dominante y cerca del origen.

La influencia de los ceros en la respuesta en el tiempo, es mejor entendida si consideramos la siguiente función en el dominio de Laplace (función de transferencia sin ceros):

$$y(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^N (s + p_i)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots \dots \dots \frac{A_N}{s + p_N} \quad (2.12)$$

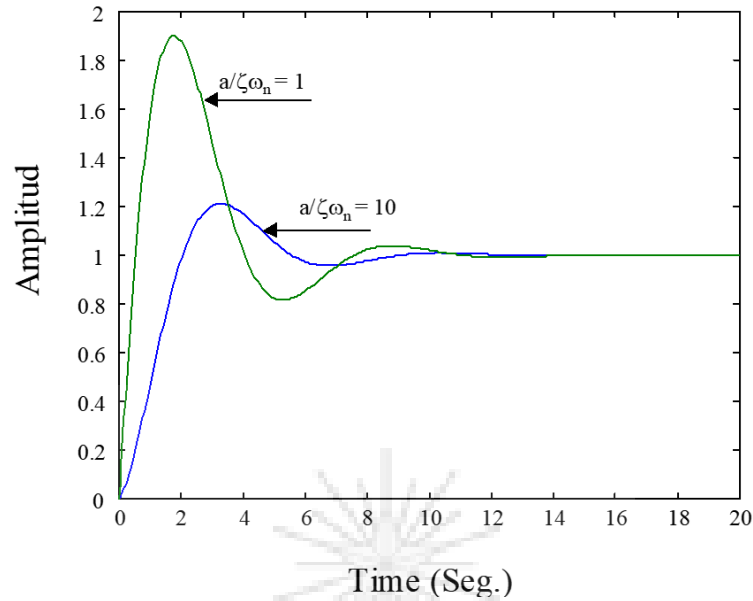


Figura 2.7: Respuesta en el tiempo de sistemas de segundo orden más un cero, considerando dos posiciones del cero, $a/(\zeta\omega_n) = 10$ y $a/(\zeta\omega_n) = 1$.

La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (2.12) obteniéndose:

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \dots \dots \dots A_N e^{-p_N t} \quad (2.13)$$

Donde los polos p_i pueden ser reales o complejos conjugados. Suponiendo ahora que la función de transferencia en (2.12) incluye ceros, se tiene:

$$y(s) = \frac{k \prod_{j=1}^M (s + z_j)}{\prod_{i=1}^N (s + p_i)} = \frac{A_{z1}}{s + p_1} + \frac{A_{z2}}{s + p_2} + \dots \dots \dots \frac{A_{zN}}{s + p_N} \quad (2.14)$$

Donde $M \leq N$ por ser (2.14) una función de transferencia propia. Ambas expansiones utilizan los polos en el denominador, por lo tanto (2.14) tiene la misma forma que (2.12). La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (2.14) obteniéndose:

$$y(t) = A_{z1}e^{-p_1t} + A_{z2}e^{-p_2t} + \dots A_{zN}e^{-p_Nt} \quad (2.15)$$

Matemáticamente, ¿cuál es la diferencia entre (2.15) y (2.13)? La diferencia está en que los coeficientes son distintos, es decir $A_1 \neq A_{z1}, \dots A_2 \neq A_{z2}, \dots A_N \neq A_{zN}$. Los coeficientes A_i o A_{zi} que resultan de la expansión en fracciones parciales son diferentes en (2.15) debido a los ceros; los términos e^{-pt} son los mismos en ambos casos. Por ese motivo la estabilidad del sistema no es comprometida por los ceros ya que si los polos están ubicados en el semiplano izquierdo, la respuesta natural tiende asintóticamente a cero independiente del valor de A_i o A_{zi} que acompañen esos términos. Sin embargo, recuerde que los ceros podrían en algunos casos producir respuestas inadecuadas; por ejemplo, debido a sobrepasos excesivos o debido a una mayor amplificación del ruido de alta frecuencia en la medición.

2.3. Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra

La función de transferencia considerando un polo extra es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2 a}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a)} \quad (2.16)$$

Nótese que el término $\omega_n^2 a$ se utiliza para llevar la salida de (2.16) al valor 1 en estado estacionario cuando la entrada es un escalón unitario. Esto es similar a lo discutido para (2.9) en la sección anterior.

Antes de analizar (2.16), se analizará la respuesta de un polo de primer orden.

2.3.1. Respuesta en el Tiempo de un Sistema de Primer Orden

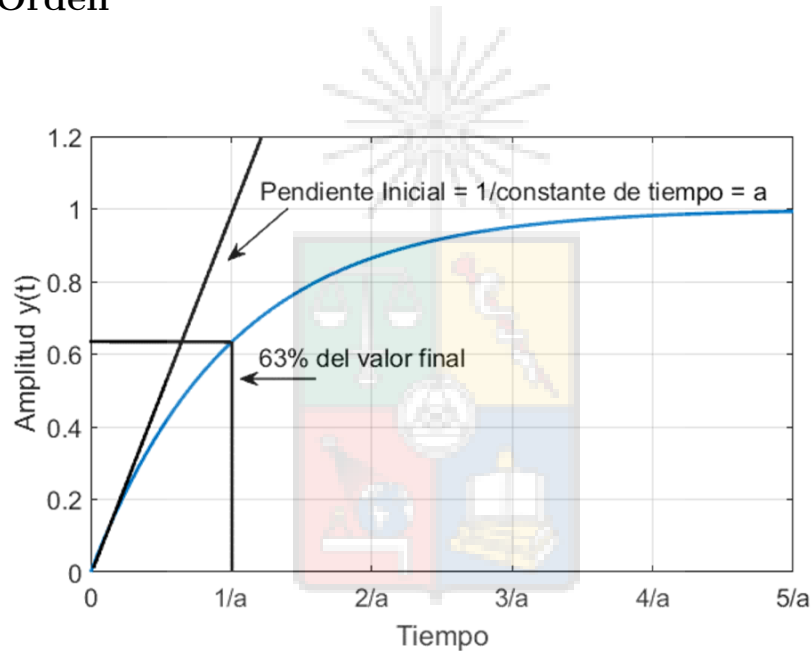


Figura 2.8: Respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden. (figura tomada de las diapositivas de la profesora Constanza Ahumada)

Para entender mejor la respuesta de un sistema de segundo orden con un polo extra, se utiliza la ecuación (2.17) que muestra la respuesta a una entrada tipo escalón de una función de primer orden ideal:

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{s + a} \rightarrow f(t) = 1 - e^{-at} \quad (2.17)$$

la respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden se muestra en la Fig. 2.8. La constante de tiempo de la ecuación (2.17) se define como $\tau = 1/a$. Para $t \approx 3\tau$ la respuesta transiente del polo de primer orden ha sido reducida en un $\approx 95\%$. Se asume que la respuesta transiente ha desaparecido cuando $t \approx 5\tau$ ya que el término $e^{-5} \approx 0.0067$ o 0.6% . Nótese que la respuesta del sistema de primer orden no tiene sobrepaso.

2.3.2. Respuesta del Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra

La figura 2.9 muestra la representación en el plano complejo de la ecuación (2.16). La Tabla 2.3 muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un polo extra, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.45$. Es decir, la parte real de los polos complejos conjugados es calculada como $\zeta\omega_n = 0.45$.

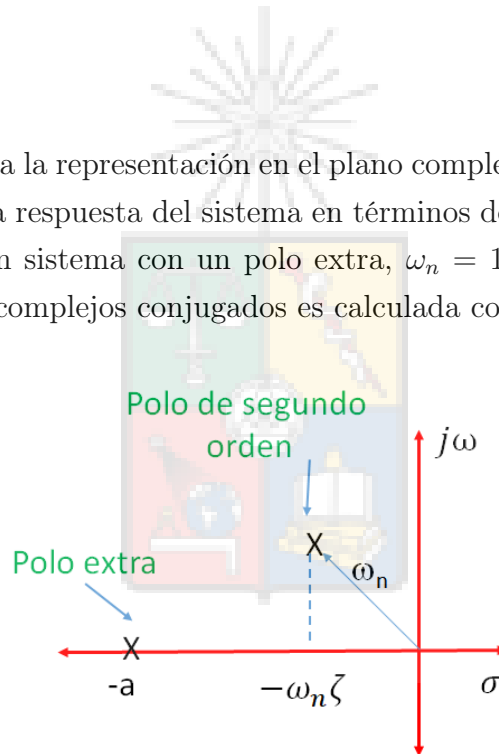


Figura 2.9: Representación en el plano complejo de un sistema de segundo orden no-ideal con un polo extra en el denominador. Ver (2.16).

Los resultados mostrados en la Tabla 2.3 nos permite concluir que cuando el polo extra se encuentra suficientemente alejado del término $\zeta\omega_n$, la dinámica del sistema

Valor de a	$a / (\zeta\omega_n)$	Porcentaje de sobrepaso	Tiempo de establecimiento
0.444	0.98	0.0	9.63
0.666	1.48	3.9	9.30
1.111	2.31	12.3	8.81
2.500	5.56	18.6	8.67
20.0	44.44	20.5	8.37
∞	∞	20.5	8.24(*)

Tabla 2.3: Relación entre overshoot y coeficiente de amortiguamiento en un sistema de segundo orden no-ideal que considera un polo extra en el denominador. El * es para indicar que los valores son virtualmente iguales a los obtenidos en un sistema de segundo ideal.

de segundo orden con un polo extra es similar al sistema de segundo orden ideal de (2.1). Como regla casi general, nuevamente se puede asumir que cuando $a \geq 10\zeta\omega_n$ (un orden de magnitud), la dinámica del sistema de segundo orden con un elemento extra (ya sea polo o cero) es virtualmente idéntica a la dinámica del sistema de segundo orden ideal.

Para los resultados mostrados en la Tabla 2.3, se puede observar que cuando el polo extra se acerca al origen, la dinámica se comienza a acercar a la de un sistema de primer orden que no tiene overshoots y produce un tiempo de subida mas alto.

Recuerde. El utilizar un orden de magnitud para considerar que la influencia de un cero o un poco extra es despreciable es algo relativo. En algunos libros o papers se mencionan valores menores, por ejemplo que es suficiente que el cero/polo extra este ubicado 5 veces más allá de la posición de los polos dominantes para que su efecto sea despreciable. Lo mismo sucede con el diseño de lazos anidados que será discutido en la Sección 8.3. Estas son lo que yo llamo *recetas*, no reglas fijas e inmutables sino que sugerencias que funcionan bien la mayor parte de las veces en que éstas se aplican.

2.4. Polos Dominantes

En muchas aplicaciones es posible encontrar sistemas que tienen alto orden y que no pueden representarse fácilmente como un sistema de segundo orden o un sistema de segundo orden con un polo o cero extra. Sin embargo, una función de transferencia (propia) de cualquier orden contiene un conjunto de polos de segundo orden y polos de primer orden.

Si existen muchos polos de cualquier tipo, ¿Se puede considerar algunos de ellos más importantes que los otros?. Como diseñadores, ¿debemos enfocarnos más en algunos polos en desmedro de otros?

La respuesta es sí, al menos en la mayor parte de los casos. Es el diseñador el que debe identificar aquellos polos que son dominantes en la respuesta y concentrarse (pero no exclusivamente) en ellos. Por ejemplo para (2.18) se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo que se muestra a la derecha de la ecuación.

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{3}{s+5} - \frac{3}{s+50} \rightarrow y(t) = 1 - 3e^{-5t} - 3e^{-50t} \quad (2.18)$$

El término $1/s$ produce la respuesta forzada o permanente y existen dos polos que producen respuestas transitorias que asintóticamente tienden a cero. Es fácil concluir que en este caso el término e^{-5t} produce la respuesta dominante. Asumiendo que el valor de la exponencial es despreciable después de 3 veces la constante de tiempo, entonces la respuesta del polo ubicado en 50 (que tiene un $\tau = 0.02$ seg.) desaparece después de solo 60 milisegundos mientras la respuesta en el tiempo del polo ubicado en 5 ($\tau = 0.2$ seg.) afecta al sistema por 600 milisegundos. Es decir el polo cercano al origen tiene influencia durante un tiempo considerablemente mayor.

En el diagrama de polos y ceros (a lazo cerrado), habitualmente los polos que se encuentran más cerca del origen son los dominantes. Si los polos que están cercanos al origen tienen un bajo coeficiente de amortiguamiento el sistema tendrá una respuesta oscilatoria e inapropiada por un mayor porcentaje de la respuesta transiente, aunque los polos no dominantes tengan un valor de ζ adecuado. Desafortunadamente el que los polos dominantes estén bien ubicados no significa necesariamente que la respuesta sea la adecuada, ya que los demás polos (aunque no sean dominantes) también tienen influencia en el comportamiento del sistema. Por lo tanto en términos matemáticos se podría señalar que polos dominantes bien ubicados es una condición necesaria pero no siempre suficiente para obtener una respuesta dinámica adecuada.

2.4.1. Análisis Visual de los Polos de un Sistema

La Fig. 2.10 muestra varios polos y también la respuesta de cada polo de acuerdo a su ubicación. En este caso el polo más cercano al origen es el dominante si es que no existen polos inestables. Si es que existen polos inestables (a lazo cerrado) no tiene mayor sentido discutir cual es el dominante porque la respuesta será completamente inapropiada independiente de la posición en que se encuentren los otros polos del semiplano izquierdo; aunque parezca trivial se debe enfatizar que para un sistema con n polos, solo uno de estos debe estar en el semiplano derecho para que el sistema sea inestable.

Existen algunos sistemas en que es difícil distinguir cuál polo(s) real o complejo es dominante. Este es el caso de polos que están ubicados muy cerca uno de otros, o polos que están muy ubicados cerca de ceros de lazo cerrado. En este último caso el polo es casi cancelado por el cero y aunque el polo se encuentre muy cerca del origen puede que su respuesta en el tiempo no tenga mayor influencia en la salida total del sistema. Esto se debe a que el término $A_i e^{-p_i t}$, tiene un coeficiente $A_i \approx 0$.

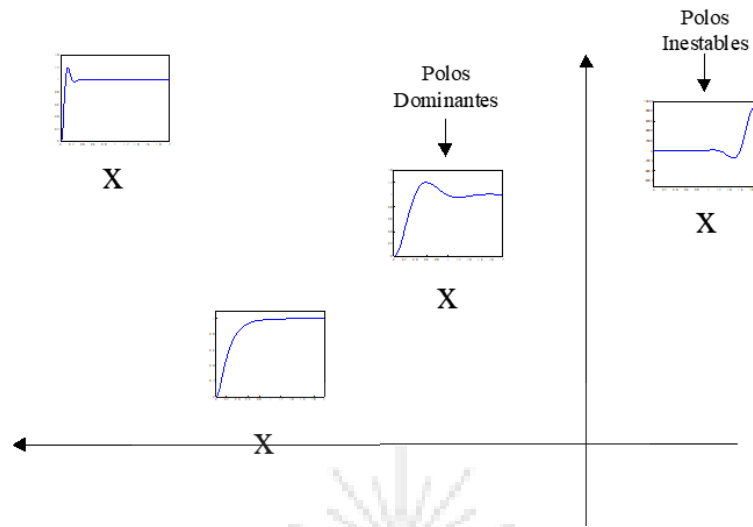


Figura 2.10: Sistema con varios polos situados a distintas distancias del origen

Si un sistema es muy complejo y no puede identificar fácilmente cuales son los polos dominantes esto no es preocupante. Posicione los polos mas cercanos al origen con un coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural adecuada y utilice prueba y error ayudándose con simulación para ubicar otros polos que pudieran tener un efecto adverso en la respuesta. El sistema de segundo orden es solo una guía de diseño y la mayor parte de los diseños requieren de bastante trabajo de simulación, para afinar los diseños y sintonizar controladores.

El análisis de la Fig. 2.10 realizado anteriormente es similar a efectuar "superposición visual". Dado un conjunto de polos y ceros es posible tener un cierto conocimiento de cual será la respuesta en el tiempo del sistema, a partir de las respuestas de cada polo real y/o polos conjugados.

Capítulo III

LUGAR DE LA RAÍZ O MÉTODO DE EVANS



El Método del Lugar Geométrico de las Raíces o *Root Locus*

3.1. Introducción

La Fig. 3.1(a) muestra los componentes típicos de un sistema SISO (single-input single-output system). La función de transferencia $G_c(s)$ es el controlador o compensador, la planta es $G_p(s)$ y el lazo de realimentación $H(s)$, que transmite la medición al controlador, y habitualmente está compuesto de transductores y sistemas de acondicionamiento de señales. Simplificando la Fig. 3.1(a) se llega a la Fig. 3.1(b), donde a $G(s)$ se le denomina **lazo directo** y a $H(s)$ **lazo de realimentación**.

Utilizando álgebra de bloques es posible encontrar la relación entre la entrada, o referencia y la salida $Y(s)$. La función de transferencia obtenida es:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)(R(s) - H(s)Y(s)) \\ \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

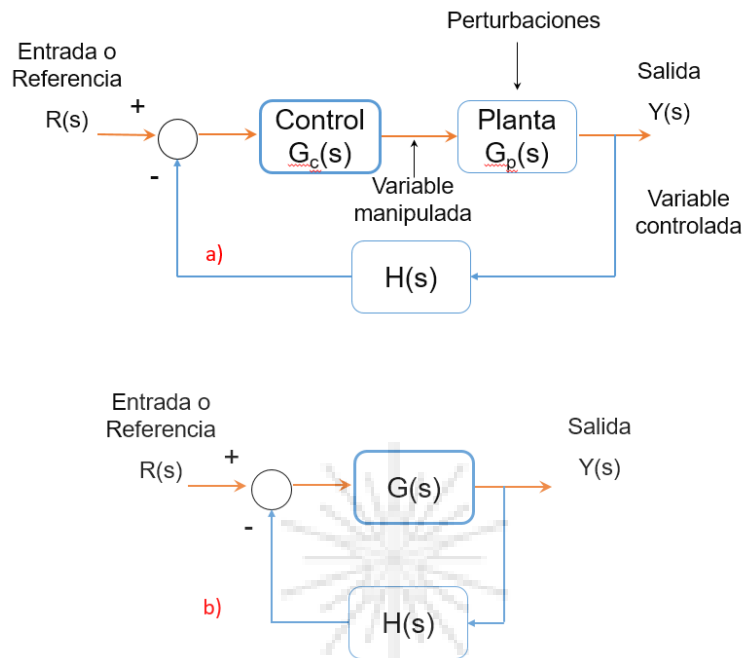


Figura 3.1: Lazo de Control SISO. (a) Componentes típicos de un lazo de control SISO con elementos que se encuentran en el lazo directo y en el lazo de realimentación. (b) representación comúnmente utilizada. Todo el lazo directo es usualmente denominado $G(s)$ y todo el lazo de realimentación es $H(s)$.

La función de lazo cerrado obtenida $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ puede ser analizada utilizando lo discutido en el Capítulo 2 de este apunte, donde se discute el sistema de segundo orden. Como en cualquier función de transferencia propia, los polos de la ecuación (3.1) se pueden descomponer en polos de primer y segundo orden facilitando el análisis de la dinámica y la estabilidad del sistema de control SISO. Sin embargo, para efectuar un análisis de la dinámica del sistema representado por (3.1) se debe primero conocer los polos que se encuentran en el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado [ver parte inferior de la ecuación (3.1)].

Para encontrar los polos de lazo cerrado se debe resolver la ecuación característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.2)$$

Esto, con las herramientas actuales, utilizando programas como MATLAB, SIMULINK o MAPPLE puede parecer simple de realizar. Sin embargo en 1948 cuando Walter Evans propuso el método del Lugar de la Raíz, o en los años 1930s, cuando Hendrik Wade Bode propuso los diagramas de Bode, no era simple ni rápido encontrar las raíces de un polinomio de orden n utilizando una regla de cálculo. Por ese motivo estos brillantes ingenieros propusieron calculadoras gráficas, con la capacidad de resolver (3.2) utilizando gráficos.

El lugar de las raíces por sí solo no es necesariamente una herramienta de diseño de controladores; es una calculadora gráfica que nos permite obtener los **polos de lazo cerrado** a partir de los polos y ceros de lazo abierto. **No cometa el error de pensar que el método del lugar de la raíz está obsoleto en estos tiempos de Matlab, computadores personales y potentes calculadoras programables.** El Lugar de la Raíz se sigue enseñando en todos los cursos introductorios de control automático, y en todo el mundo, ya que permite visualizar rápidamente, por simple inspección de un gráfico, la respuesta dinámica y la evolución de los polos de lazo cerrado de un sistema de control, a medida que se aumenta la ganancia del controlador.

El Root Locus, como lo designó su inventor, sigue siendo uno de los métodos favoritos de análisis y diseño de compensadores SISO y ciertamente uno de los más utilizados en el área de control de máquinas eléctricas y convertidores de potencia.

3.2. Fundamentos del Método de Lugar de la Raíz o Método de Evans

El lugar de la raíz es un método gráfico de encontrar la posición de los polos de lazo cerrado de la función de transferencia:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.3)$$

Para representar la entrada de referencia, en este apunte se utiliza indistintamente $R(s)$ o $y^*(s)$. Encontrar los polos de (3.3) es equivalente a encontrar las soluciones de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$. La función $G(s)H(s)$ puede ser representada como:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^N (s + p_j)} \quad (3.4)$$

Donde K , la ganancia del sistema, es la multiplicación de todas las ganancias del $G(s)$ y $H(s)$ incluyendo la ganancia del controlador o compensador. La función de transferencia de (3.4) debe ser *propia*, es decir el grado del numerador debe ser menor o igual al grado del denominador, $M \leq N$. El término función de transferencia propia se deriva de fracción propia utilizado en matemáticas. Por ejemplo $\frac{3}{2}$ es una fracción, pero no es propiamente una fracción al ser mayor a 1. En cambio $\frac{1}{2}$ si es una fracción propia.

No existen sistemas físicos que tengan funciones de transferencia impropias. Un sistema con una función de transferencia impropia entrega una respuesta que tiende a infinito cuando la frecuencia de entrada tiene a infinito. Esto no sucede en el mundo

real donde todos los sistemas tienen salidas que tienden a cero cuando la frecuencia tiende a ∞ . Utilizando (3.4) en (3.2), se obtiene:

$$K \prod_{i=1}^M (s + z_i) + \prod_{j=1}^N (s + p_j) = 0 \quad (3.5)$$

donde los z_i son los **ceros de lazo abierto** en (3.4)-(3.5) y los p_j son los **polos de lazo abierto**. La solución de la ecuación (3.5) entrega los **polos de lazo cerrado**. Al término K se le denomina también $K_{sistema}$ en este apunte.

Por simple inspección de (3.5) se puede concluir que cuando la ganancia es cero o tiene un valor muy pequeño la posición de los polos de lazo cerrado es la misma que la de los polos de lazo abierto. Cuando la ganancia K tiende a infinito, los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto. **Nunca confunda los polos de lazo abierto con los de lazo cerrado.** Los polos de lazo abierto son los p_j de la ecuación (3.5), los polos de lazo cerrado son las soluciones de la ecuación característica, $1 + G(s)H(s) = 0$.

3.2.1. Condiciones de Módulo y Ángulo Propuestas por Evans

Además de las soluciones triviales obtenidas al analizar los casos $K \rightarrow 0$ y $K \rightarrow \infty$ en (3.5), es posible encontrar soluciones de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$, cuando se cumplen simultáneamente la condición de módulo y la condición de ángulo planteadas por Walter Evans. Las condiciones se expresan en las siguientes ecuaciones:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (3.6)$$

$$\angle[G(s)H(s)] = \pm 180 \pm n360 \quad (3.7)$$

Donde n es un entero. Al conjunto de puntos que satisfacen (3.7), se les denomina **Lugar de la raíz**, cada punto del lugar de la raíz es un potencial polo de lazo cerrado. Para que se transforme en polo de lazo cerrado se debe ajustar adecuadamente la ganancia. La condición de ángulo también se escribe utilizando radianes como $\angle[G(s)H(s)] = \pm\pi \pm 2n\pi$.

La condición de módulo de (3.6) es simple de satisfacer ajustando la ganancia variable del controlador (acción que es muy fácil de realizar). Para un punto $s = \sigma \pm j\omega$ en particular, la ganancia necesaria se puede calcular reemplazando un punto s por sus coordenadas $\sigma \pm j\omega$ y calculando el módulo. El valor necesario de K es el inverso del módulo de $G(s)H(s)$, tal como se muestra en (3.8).

$$|KG(s)H(s)| = K \left| \frac{\prod_1^M (s + z_i)}{\prod_1^N (s + p_j)} \right|_{s=\sigma \pm j\omega} = 1 \Rightarrow K = \left| \frac{\prod_1^N (s + p_j)}{\prod_1^M (s + z_i)} \right|_{s=\sigma \pm j\omega} = 1 \quad (3.8)$$

El mérito de Walter Evans fue proponer un método gráfico para encontrar los polos de lazo cerrado, resolviendo (3.6) y (3.7) utilizando una regla y un transportador.

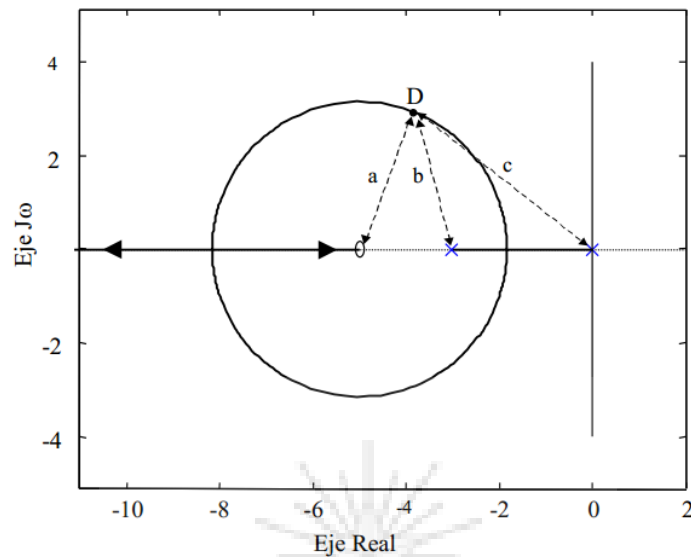


Figura 3.2: Cálculo de la condición de módulo en forma gráfica.

3.2.2. Ejemplo de Aplicación de las condiciones de Módulo y Ángulo

La figura 3.2 muestra el lugar de la raíz de la función de transferencia a lazo abierto de (3.9),

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + 5)}{s(s + 3)} \quad (3.9)$$

y se debe ajustar el valor de la ganancia K para que se cumpla la condición de módulo en el punto D que está ubicado en el lugar de la raíz. Las coordenadas del punto D son $-\sigma + j\omega$ y se asume que σ y $j\omega$ son reales positivos. Reemplazando el

punto D en (3.9) se obtiene:

$$|G(s)H(s)| = \left| K \frac{(s+5)}{s(s+3)} \right| = |K| \frac{\sqrt{(5-\sigma)^2 + \omega^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \sqrt{(3-\sigma)^2 + \omega^2}} = 1 \quad (3.10)$$

Con un poco de manipulación de (3.10), se puede concluir que el valor de K se puede calcular como:

$$K = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \sqrt{(3-\sigma)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(5-\sigma)^2 + \omega^2}} \quad (3.11)$$

Utilizando la figura 3.2 y el término a la derecha de (3.11) se concluye que la ganancia K se puede calcular como:

$$K = \frac{bc}{a} \quad (3.12)$$

Donde los valores de a , b , c se muestran en la figura 3.2. Generalizando este resultado se llega al método utilizado por Evans para el cálculo de la ganancia K (denominada usualmente ganancia del sistema o $K_{sistema}$).

$$K = \frac{\Pi \text{ (distancia del punto a los polos)}}{\Pi \text{ (distancia del punto a los ceros)}} \quad (3.13)$$

Si es que no existen ceros en el sistema se utiliza 1 en el denominador de (3.13).

¿Cómo se calcula la condición de ángulo gráficamente?. Se seguirá utilizando la función de transferencia de (3.9). Para que un punto del plano s , cumpla la condición

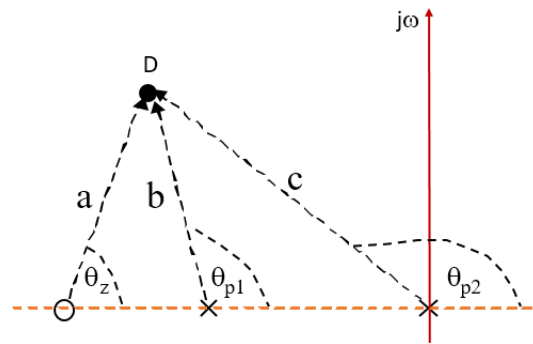


Figura 3.3: Cálculo de la condición de ángulo en forma gráfica.

de ángulo o sea se transforme en "lugar de la raíz", se debe cumplir que:

$$\angle \left(K \frac{(s+5)}{s(s+3)} \right) = \pm 180^\circ \pm n \cdot 360^\circ \quad (3.14)$$

Donde n es un entero. Dado que $+180^\circ = -180^\circ$, se utiliza el símbolo $\pm$ en (3.14); además se cumple que para cualquier ángulo θ se tiene que $\theta = \theta \pm 360^\circ$.

Verificando que se cumpla la condición de ángulo en el punto D ubicado en $-\sigma + j\omega$ (se asume en este ejemplo que σ y ω son reales positivos) se llega a:

$$\angle \left(K \frac{(s+5)}{s(s+3)} \right) = \text{atan}(\omega/(5-\sigma)) - \text{atan}(\omega/(0-\sigma)) - \text{atan}(\omega/(3-\sigma)) = \pm 180^\circ \pm n \cdot 360^\circ \quad (3.15)$$

Utilizando la Fig. 3.3 es relativamente simple concluir que los ángulos pueden ser calculados en forma gráfica utilizando un transportador. Por ejemplo $\theta_z = \text{atan}(\omega/(5-\sigma))$ (ver Fig. 3.3). Generalizando la condición de ángulo se llega a:

$$\Sigma (\text{Angulos de los ceros}) - \Sigma (\text{Angulos de los polos}) = \pm 180^\circ \pm n \cdot 360^\circ = \pm \pi \pm 2n \cdot \pi \quad (3.16)$$

De lo que se ha discutido del lugar de la raíz hasta ahora, se concluye que es simple calcular gráficamente si un punto cualquiera cumple con la condición de módulo y ángulo (y es por lo tanto solución de $1 + G(s)H(s) = 0$). Esto se efectuaba utilizando una regla, un transportador, mucha paciencia y papel milimetrado. Para facilitar el trabajo, Walter Evans diseñó y fabricó en su propia compañía una herramienta llamada Spirule, que podía efectuar todo lo necesario para obtener el lugar de la raíz; esta herramienta se muestra en la figura 3.4. Walter Evans vendió cerca de 100.000 unidades antes de que la herramienta fuera eliminada del mercado por el computador personal y Matlab. Yo tengo una Spirule en alguna parte; no la he visto ni usado en mucho tiempo.

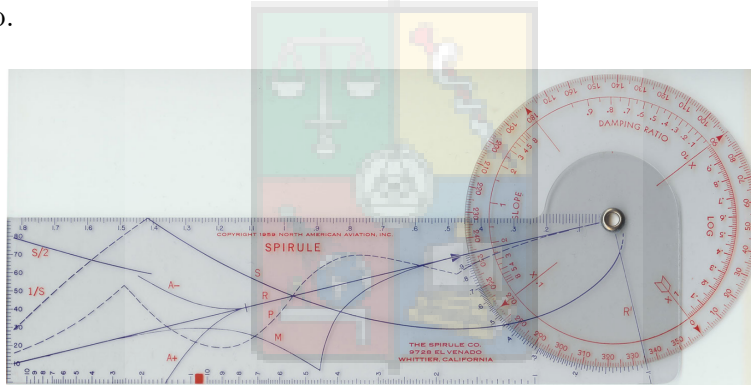


Figura 3.4: The Spirule. La Herramienta de diseño de controladores y construcción del Lugar de las Raíces, fabricada por la compañía de Walter Evans

3.2.3. Puntos que no Pertenecen al Lugar de la Raíz

En el método del Lugar de la Raíz, la condición de ángulo es más importante debido a que entrega el conjunto de puntos en que pueden ubicarse los polos de lazo

cerrado si se ajusta correctamente la ganancia del sistema (o controlador). Si un punto no cumple con la condición de ángulo entonces un polo de lazo cerrado no puede ubicarse en esa posición aunque se varíe la ganancia K entre cero e infinito. Esto se muestra en la figura 3.5.

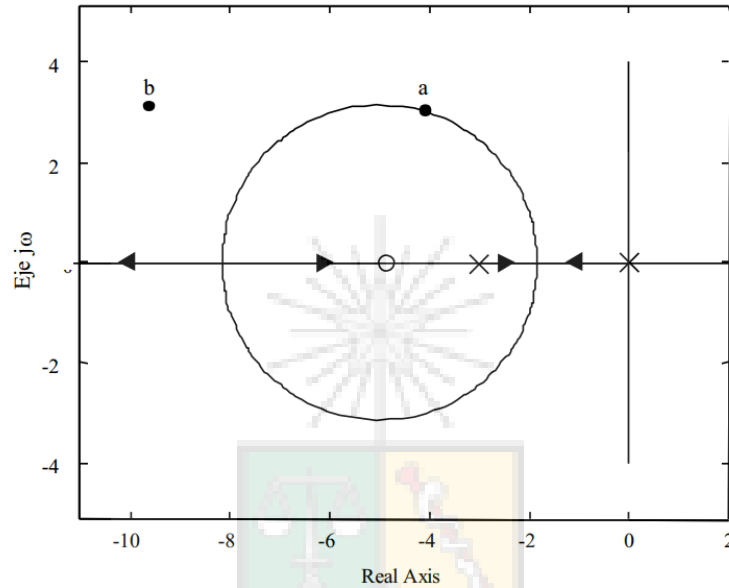


Figura 3.5: Punto fuera del lugar de la raíz. Por convención las flechas de la figura muestran la dirección en que se mueven los polos de lazo cerrado a medida que se aumenta la ganancia. No existe ningún valor de la ganancia K que nos permita ubicar un polo de lazo cerrado en el punto "b".

El punto a en la figura se encuentra ubicado en el lugar de la raíz (o sea cumple con la condición de ángulo). Para que un polo de lazo cerrado se encuentre en esa posición, basta con utilizar el valor correcto de ganancia. Sin embargo el punto 'b' no cumple con la condición de ángulo. Si se requiere un polo de lazo cerrado en esa posición es necesario cambiar la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$, lo que se conoce como *Reshaping of the Root Locus*, utilizando un compensador o controlador en cascada con $G(s)$ o $H(s)$ (Estrictamente se puede ubicar un compensador en cualquier punto del lazo de control incluso en paralelo con $G(s)$ o $H(s)$). Para esto se debe conocer las bases del diseño de controladores, lo cual se discutirá en otras

secciones.

3.3. Algunas de las Reglas mas Importantes del Lugar de la Raíz

Libros adecuados para efectuar un estudio más profundo del método del lugar de la raíz son:

- Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, “ Modern Control System”,
- John J. D’Azzo and Constantine H. Houpis, “Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern”
- Benjamin Kuo, Automatic Control Systems
- Gene Franklin, Feedback Control of Dynamic Systems.

El método del Lugar de las Raíces no es precisamente un método nuevo ya que fue propuesto en 1948. Cualquier libro aunque sea antiguo, discute este tema. Se recomienda utilizar libros además de este apunte si es que se quiere conocer el método en profundidad. Este apunte está principalmente orientado al diseño de compensadores, y no discute en profundidad las múltiples calculadoras gráficas que se utilizan para esto.

Solo las reglas mas utilizada del Lugar de la Raíz serán brevemente mencionadas en este apunte. Muchas de la reglas no tienen tanta utilidad cuando se utilizan programas como Matlab y Simulink, pero son siempre útiles cuando se debe analizar conceptualmente un sistema.

3.3.0.1. Reglas del Lugar de la Raíces

1. El lugar de la raíz encuentra las soluciones de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$, utilizando la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$.
2. Si se escribe $G(s)H(s)$ como

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^N (s + p_j)} \quad (3.17)$$

Entonces los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los polos de lazo abierto cuando la ganancia K es cero o muy pequeña. Cuando la ganancia K tiende a infinito, los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto.

A cada cero de lazo abierto le llega un lugar de la raíz cuando $K \rightarrow \infty$. Como en los sistemas habitualmente existen menos ceros que polos, el resto de los lugares de las raíces van hacia infinito a través de asíntotas con ángulos y posición calculadas utilizando (3.20)-(3.21).

Recuerde que cada polo y cada cero de $G(s)H(s)$ debe estar 'conectado' al lugar de la raíz. No existen polos y ceros aislados del lugar de la raíz.

3. Para sistemas de ganancia positiva, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de polos y ceros (reales) a la derecha es impar. Esto es necesario para cumplir con la condición de ángulo que se muestra gráficamente en la Fig. 3.3 y (3.16). Para sistemas con ganancia K negativa, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de total de polos y ceros reales a la derecha es par.

Un ejemplo de esta regla se muestra en la Fig. 3.6. Esto es lo que sucede en el eje real, Lugar de la Raíz complejo (es decir polos con parte imaginaria) sobre/bajo estas zonas puede existir.

4. El número de lugares de la raíz es igual al número de polos de lazo abierto. En otras palabras el número de polos de lazo cerrado es igual al número de

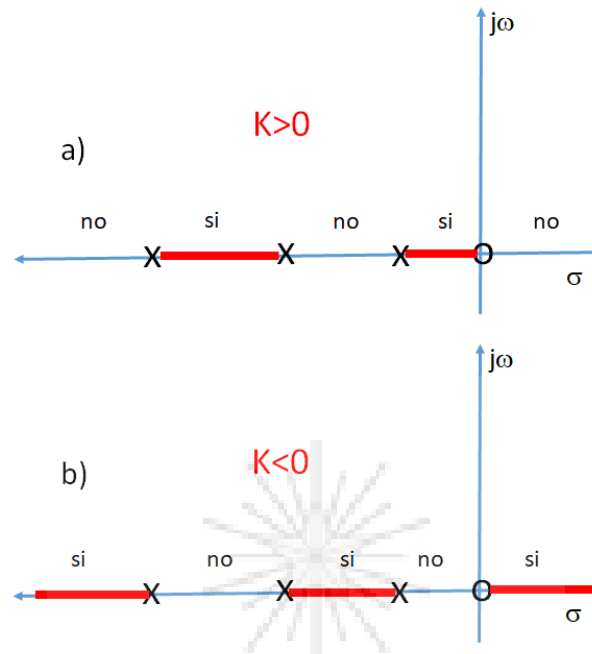


Figura 3.6: Lugar de la raíz en el eje real para una configuración de polos y ceros. a) Ganancia positiva. b) Ganancia negativa.

polos de lazo abierto. Esto es fácil de concluir utilizando (3.5) y recordando que $N \geq M$. Por simplicidad se repite (3.5) abajo:

$$K \prod_{i=1}^M (s + z_i) + \prod_{j=1}^N (s + p_j) = 0 \quad (3.18)$$

5. El lugar de la raíz es simétrico con respecto al eje real. Esto se debe a que la respuesta en el tiempo no puede contener términos imaginarios. Por lo tanto todas las raíces complejas deben existir en pares y una de ellas debe ser el complejo conjugado de la otra. Si existiera una raíz compleja, sin su conjugado, entonces la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$:

$$y(s) = y^*(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.19)$$

tendría términos complejos en el dominio del tiempo y no existen sistemas físicos que tengan respuesta compleja en el tiempo.

6. Si en un sistema existen N_p polos y N_z ceros, entonces existen $(N_p - N_z)$ lugares de las raíces que van hacia el infinito a través de asíntotas. Estas asíntotas están centradas en:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{Polos } G(s)H(s) - \sum \text{Ceros } G(s)H(s)}{N_p - N_z} = \frac{\sum (p_j) - \sum (z_i)}{N_p - N_z} \quad (3.20)$$

7. El ángulo de las asíntotas con respecto al eje real puede calcularse como:

$$\theta = \frac{(2k + 1)}{N_p - N_z} \pi \quad (3.21)$$

Donde $k=0,1,2,\dots,(N_p - N_z - 1)$. Un ejemplo se muestra en la Fig. 3.7 correspondiente a un sistema que tiene la siguiente función de lazo abierto;

$$G(s)H(s) = K_p \frac{s + 8}{(s + 3)(s + 4)(s + 5)(s + 6)} \quad (3.22)$$

La fig. 3.8 muestra el lugar de la raíz existente cuando no se considera el cero en la (3.22) y se mantienen los cuatro polos.

Para pensar ¿Se puede utilizar (3.21) con sistemas de ganancia positiva y negativa?. Si la respuesta es negativa, proponga una ecuación para sistemas con ganancia negativa.

8. Existen algunas reglas para la construcción del lugar de la raíz, que a mi juicio no son tan importantes cuando se utiliza MATLAB para diseñar controladores, pero igual se recomienda estudiarlas y entenderlas. Estas reglas son:

- El procedimiento para encontrar el valor de K con el cual el lugar de la raíz cruza al semiplano derecho. Este K crítico se encuentra utilizando el criterio de Routh Hurwitz que se discute en la sección 3.3.1.

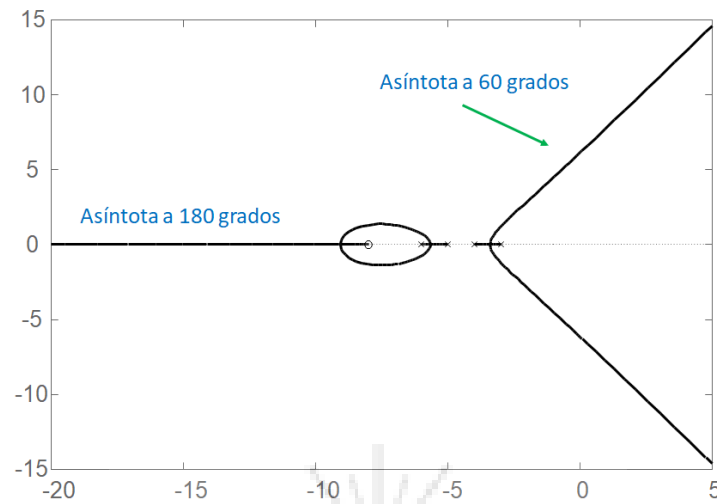


Figura 3.7: Ejemplo de un sistema con cuatro polos y un cero (ver (3.22)). Sistema con ganancia positiva donde dos de los polos se mueven al semiplano derecho si es que se incrementa suficientemente la ganancia.

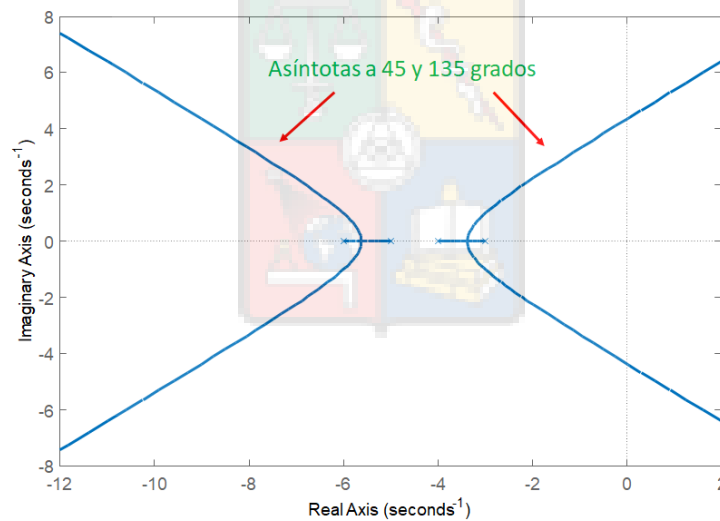


Figura 3.8: Ejemplo de un sistema con cuatro polos y sin considerar el cero en (3.22). Sistema con ganancia positiva donde nuevamente dos de los polos se mueven al semiplano derecho si es que se incrementa suficientemente la ganancia.

- El procedimiento para encontrar los puntos en que el lugar de la raíz se separa del eje real (*breakaway* y *break – in points*). Esto se discute en la sección 3.3.4
 - El procedimiento para encontrar los ángulos de partida y los ángulos de llegada a polos y ceros complejos conjugados. Esto se discute en la sección 3.3.6.
9. El lugar de la raíz se construye encontrando los puntos en que se satisface la condición de ángulo de (3.7). Nótese que la condición de ángulo es distinta para sistemas con K negativo, ya que la ganancia por sí sola estaría contribuyendo con 180 grados (π rads).
10. El valor de ganancia necesaria para posicionar los polos de lazo cerrado en un determinado lugar se encuentra utilizando (3.6).

3.3.1. Criterio de Estabilidad de Routh–Hurwitz

Este criterio de estabilidad permite establecer la existencia de polos de una ecuación que se encuentran en el semiplano derecho o en el eje real. A diferencia del método del lugar de las raíces, no encuentra la ubicación de los polos de lazo cerrado ni encuentra las raíces, pero es un método eficiente y rápido para determinar si un sistema es estable.

El test debe su nombre a dos matemáticos. El test de Routh fue propuesto primero por el matemático inglés, Edward John Routh en 1876. El matemático alemán Adolf Hurwitz independientemente propuso en 1895 un método equivalente utilizando determinantes. Hoy día se le denomina como el criterio de Routh-Hurwitz en la literatura o, a veces, como el criterio de Routh a secas.

Suponiendo que la ecuación característica se puede expresar como un polinomio de la forma mostrada en (3.23)

$$1 + G(s)H(s) = 0 \rightarrow b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0 = 0 \quad (3.23)$$

Una condición necesaria, pero no suficiente para que el sistema sea estable, es que todos los coeficientes en (3.23) cumplan con $b_i \geq 0$. Si $b_0 = 0$ entonces se debe dividir por s para llevar la ecuación a la forma de (3.23). Si otro coeficiente aparte de b_0 es cero, entonces existen polos de lazo cerrado complejos con $\zeta = 0$ (o sea ubicado en el eje $j\omega$ y el sistema ya no sería asintóticamente estable. Para que un sistema sea asintóticamente estable, entonces todos los polos de $1 + G(s)H(s)$ deben tener parte real negativa.

Si todos los coeficientes b_i en (3.23) están presentes y son todos positivos, el sistema todavía podría ser inestable (como se dijo es una condición necesaria pero no suficiente).

Para realizar el test de estabilidad de Routh-Hurwitz, se colocan los coeficientes de la forma en que se muestra en la tabla 3.1

s^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}
s^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	b_{n-7}
s^{n-2}	c_1	c_2	c_3	$\dots$
s^{n-3}	d_1	d_2	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$		
s^1	j_1			
s^0	k_1			

Tabla 3.1: Las dos primeras filas son los coeficientes del polinomio característico mostrados en (3.23). El resto de las filas deben ser calculadas utilizando (3.24)-(3.25)

Las constantes c_1, c_2, c_3 , etc. en la tercera fila son evaluadas como se muestra en

(3.24).

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_nb_{n-3}}{b_{n-1}} \\ c_2 &= \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_nb_{n-5}}{b_{n-1}} \\ c_3 &= \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_nb_{n-7}}{b_{n-1}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Este cálculo continúa hasta que el resto de los términos c_i son iguales a cero. Después se calculan los términos d_i aplicando (3.25):

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{c_1b_{n-3} - b_{n-1}c_2}{c_1} \\ d_2 &= \frac{c_1b_{n-5} - b_{n-1}c_3}{c_1} \\ d_3 &= \frac{c_1b_{n-7} - b_{n-1}c_4}{c_1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

El resto de las filas se calcula de forma similar hasta que se llegue a la fila s^0 . Las filas s^1 y s^0 contienen solo un término cada una. El arreglo mostrado en la tabla 3.1 es triangular, terminando en la fila s^0 . Una vez que la tabla completa ha sido encontrada, el criterio de Routh-Hurwitz establece que el número de polos de lazo cerrado en el semiplano derecho, es igual al número de cambios de signos en los coeficientes de la primera columna. Por lo tanto el sistema es estable si todos los coeficientes son positivos.

3.3.2. Ejemplo de Aplicación del Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

Se tiene la siguiente ecuación característica $Q(s) = 1 + G(s)H(s)$.

$$Q(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240 \quad (3.26)$$

El arreglo de Routh (ver Tabla 3.2) se realiza utilizando el procedimiento discutido anteriormente: La primera columna tiene dos cambios de signo, desde 1 a -62 y desde

s^5	1	10	152
s^4	1	72	240
s^3	-62	-88	
s^2	70.6	240	
s^1	122.6		
s^0	240		

Tabla 3.2: Ejemplo de aplicación del criterio de Routh-Hurwitz

-62 a 70.6. Por lo tanto existen dos polos en el semiplano derecho. Como se discutió anteriormente, este criterio entrega el número de raíces inestables pero no indica el valor de ellas. Sin embargo, utilizando (3.26) se calculan las raíces como $s_1 = -3$, $s_{23} = -1 \pm j\sqrt{3}$ y $s_{45} = +2 \pm j4$. El análisis confirma que existen dos polos en el semiplano derecho.

Un caso especial se produce cuando al efectuar el cálculo de los coeficientes c_i o d_i , un cero aparece en la primera columna. Por ejemplo con el polinomio de (3.27) mostrada a continuación:

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5 \quad (3.27)$$

El método de Routh-Hurwitz produce los siguientes coeficientes:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 & 5 & \end{array}$$

Tabla 3.3: Aplicación del criterio de Routh-Hurwitz donde se produce un cero en la primera columna

El cero en la primera columna (fila s^2), impide que se sigan calculando los coeficientes. Para corregir este problema con el método de Routh-Hurwitz, se proponen las siguientes modificaciones:

1. Substituir $s = 1/x$ en la ecuación característica original y después evaluar el polinomio resultante utilizando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.
2. Multiplicar por $(s + 1)$ la ecuación característica original y aplicar el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.

Más información del método de Routh se encuentra en la literatura. Este método también es bastante antiguo (1876) así que cualquier libro de control medianamente bueno debería cubrirlo en profundidad.

3.3.3. Ejemplo. Aplicando el Criterio de Routh Hourwitz Para Encontrar la Ganancia Crítica

Se tiene la siguiente planta de lazo abierto:

$$Planta(s) = \frac{(s + 3)}{s(s - 2)} \quad (3.28)$$

Esta planta se controla a lazo cerrado, con realimentación unitaria, utilizando el sistema a lazo cerrado que se muestra en la Fig. 3.9. El lugar de la raíz mostrado en la Fig. 3.10 nos permite observar que si se utiliza una ganancia muy pequeña, los polos de lazo cerrado se hacen inestable.

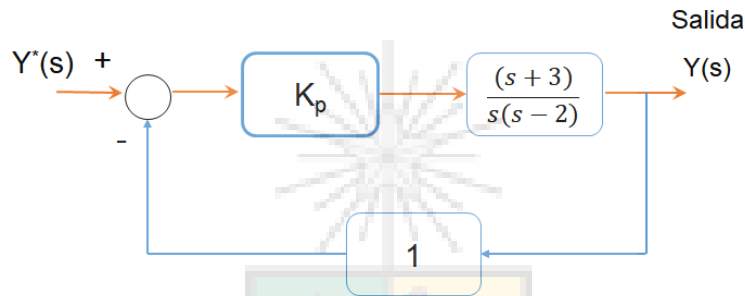


Figura 3.9: Controlador proporcional aplicado a una planta que posee un polo inestable.

Suponiendo que nos quedamos sin computador y solo tenemos una calculadora científica no programable. Por lo tanto no podemos utilizar las bondades de la herramienta RLTOOL de Matlab, para calcular rápidamente la ganancia crítica que produce inestabilidad. Afortunadamente el método de Routh nos permite obtener una respuesta rápida y sin necesidad de alto procesamiento computacional.

Primero se calcula la ecuación característica del sistema mostrado en la Fig. 3.9. Esto se muestra en la ecuación (3.29).

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + K_p \frac{s+3}{s(s-2)} = 0 \\ 1 + G(s)H(s) &= s^2 + (K_p - 2)s + 2K_p = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

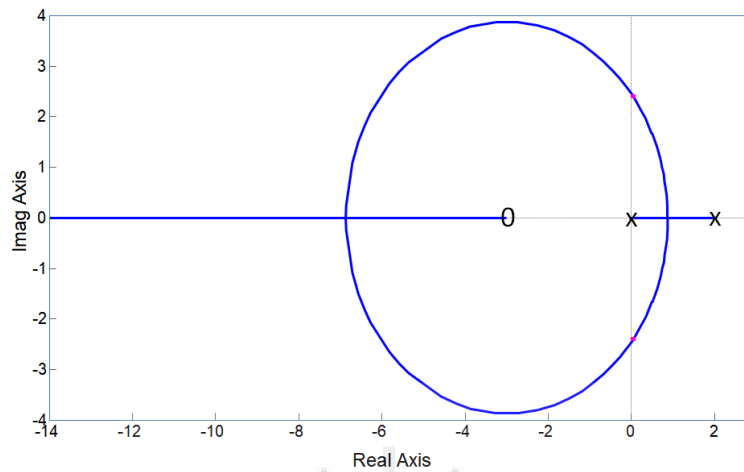


Figura 3.10: Lugar de la Raíz correspondiente al sistema de control que se encuentra en la Fig. 3.9. Se puede observar que para ganancias pequeñas, menores a la ganancia crítica, el sistema es inestable.

La tabla con los coeficientes del método de Routh Hourwitz es la siguiente:

s^2	1	$2K_p$
s^1	$(K_p - 2)$	0
s^0	$2K_p$	0

Tabla 3.4: Ejemplo de aplicación del método de Routh-Hurwitz para calcular la ganancia crítica.

A partir del término s^1 es simple de verificar que la ganancia debe cumplir con $K_p > 2$ para obtener un sistema asintóticamente estable.

¿Existe otra forma de verificar ese valor?. Por supuesto que sí, se puede aplicar la condición de módulo y de ángulo del lugar de la raíz. Para esto se utiliza la figura 3.11, que permite aplicar la condición de ángulo primero para poder determinar el valor de ω , el punto donde el lugar de raíz cruza por el eje de las abscisas. Además se

podría requerir la identidad de (3.30) u otra identidad trigonométrica equivalente.

$$\text{atan}(x) \pm \text{atan}(y) = \left[\frac{x \pm y}{1 \mp xy} \right] \quad (3.30)$$

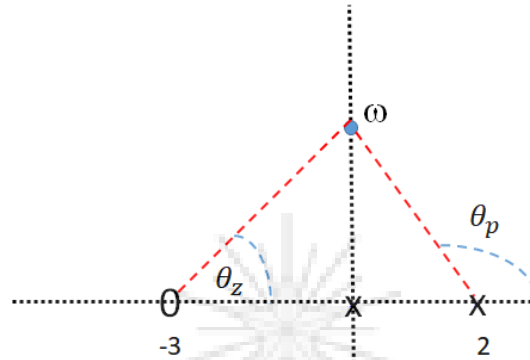


Figura 3.11: Diagrama de polos y ceros correspondientes a (3.28), utilizado para aplicar las condiciones de módulo y ángulo. El valor de ω es una incógnita.

Utilizando la Fig. 3.11, la condición de ángulo de (3.16) y la identidad de (3.30), se llega a la ecuación (3.31). La incógnita a despejar es ω .

$$\begin{aligned} \text{atan}(\omega/3) - 90^\circ - (180^\circ - \text{atan}(\omega/2)) &= 180^\circ \\ \text{atan}(\omega/3) + \text{atan}(\omega/2) &= 90^\circ \\ \text{atan} \left[\frac{\omega/3 + \omega/2}{1 - \omega^2/6} \right] &= 90^\circ \end{aligned} \quad (3.31)$$

Del denominador de la última sub-ecuación en (3.31) se puede concluir que la solución se produce cuando $[1 - \omega^2/6] \rightarrow 0$ debido a que $\tan(90^\circ) \rightarrow \infty$. Por lo tanto la incógnita ω en la Fig. 3.11 es calculada como $\omega = \sqrt{6} = 2.4495$. Utilizando la

condición de modulo de (3.13) se puede conocer el valor de la ganancia utilizando:

$$K_p = \frac{\omega \sqrt{2^2 + \omega^2}}{\sqrt{3^2 + \omega^2}} \quad (3.32)$$

Remplazando ω en (3.32) se encuentra que la ganancia crítica es $K_p=2$.

Evidentemente que el método de Routh nos permite encontrar bastante más fácilmente la ganancia crítica, que utilizando las condiciones de módulo y ángulo (al menos en este caso). Sin embargo, el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz no nos entrega más información, por ejemplo el valor de ω , la frecuencia de corte en el eje complejo.

3.3.4. Puntos de Arranque y de Llegada (*Breakaway y Break-in Points*)

La Fig. 3.12 muestra como se definen los punto de arranque y de llegada. Un punto de arranque se produce en el eje real, cuando dos *potenciales* polos de lazo cerrado se unen y comienzan a divergir transformándose en potenciales polos de lazo cerrado complejos. En forma similar un punto de llegada es cuando *potenciales* polos de lazo cerrado complejos llegan al eje real y se dirigen hacia ceros. Se recuerda que se usa la palabra *potencial* polo de lazo cerrado debido a que en esos puntos se cumple la condición de ángulo y solo falta que se cumpla la condición de módulo, lo que es muy simple de realizar ajustando el valor de la ganancia del sistema.

Debido a que los polos de lazo cerrado se originan desde los polos de lazo abierto (cuando $K = 0$), un punto de arranque corresponde al punto donde existe el máximo valor de K en el eje real en un segmento donde existen dos polos reales. De la misma forma se concluye que los puntos de llegada corresponden al punto donde el valor

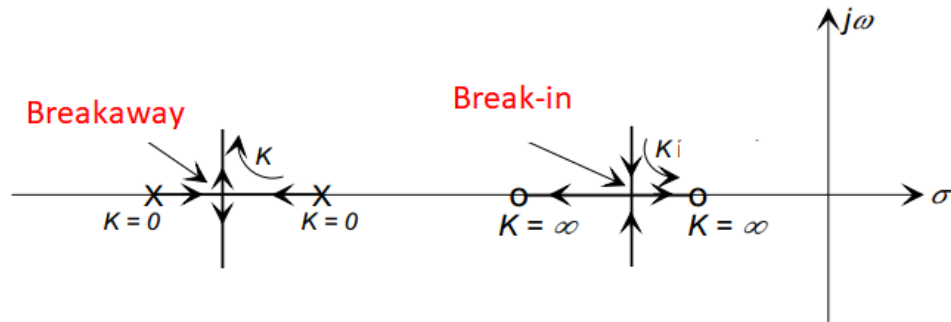


Figura 3.12: Ejemplo de puntos de arranque y puntos de llegada. Por razones de espacio y simplicidad se utilizan los vocablos de habla inglesa. La dirección de aumento de la ganancia K se indica en la figura.

de K es mínimo en el eje real en un segmento en que existen dos ceros reales. La evolución de la ganancia en los puntos de arranque y llegada, se muestra en la Fig. 3.13.

Utilizando la ecuación característica se tiene que $1 + G(s)H(s) = 0$. De esta ecuación se despeja la ganancia K como se muestra en (3.34).

$$K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)} = -\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)} \quad (3.33)$$

Los puntos de arranque y de llegada se producen cuando se cumple (3.34),

$$\frac{dK}{d\sigma} = -\frac{d}{dK} \left(\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)} \right) = 0 \quad (3.34)$$

esto es equivalente a:

$$N(\sigma)D'(\sigma) - N'(\sigma)D(\sigma) = 0 \quad (3.35)$$

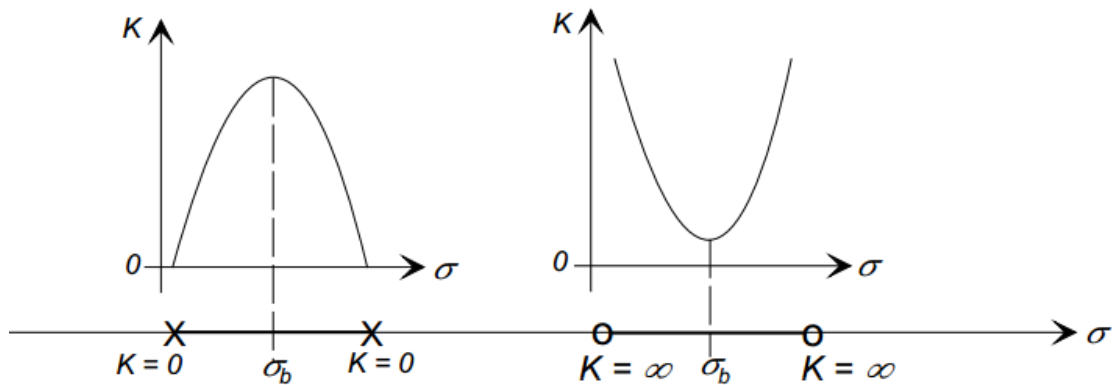


Figura 3.13: Evolución de la ganancia del sistema en los puntos de arranque y de llegada.

3.3.5. Un ejemplo del Cálculo de los Puntos de Arranque y de Llegada

se tiene un sistema de control proporcional con realimentación unitaria. La función de transferencia de lazo abierto es la que se muestra en (3.36).

$$G(s) = K \frac{s^2 + 10s + 24}{s^2 + 3s + 2} \quad (3.36)$$

Manipulando (3.36) se llega a (3.37),

$$G(s) = K \frac{(s + 6)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)} \quad (3.37)$$

El lugar de la raíz de (3.37) es mostrado en la Fig. 3.14. Este lugar de la raíz tiene dos segmento en el eje real, que están entre los polos y los ceros respectivamente. Por lo tanto existe un punto de arranque y uno de llegada.

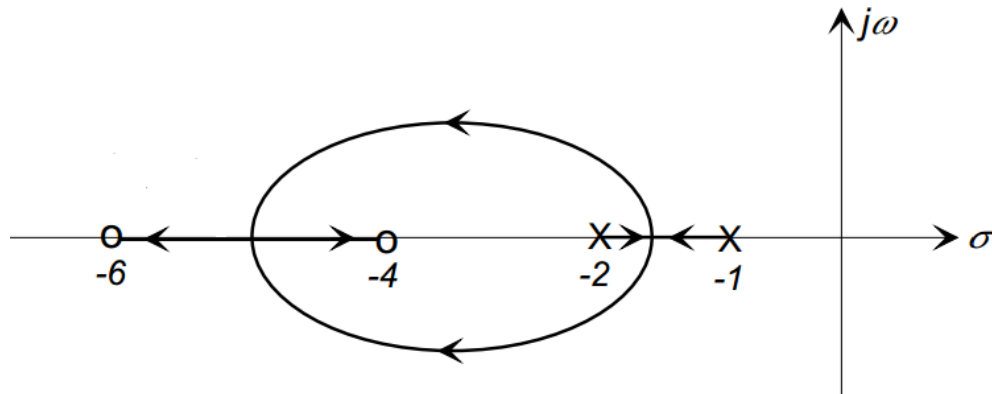


Figura 3.14: Lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia de la ecuación (3.37). El sistema tiene un punto de arranque en el segmento entre los polos y un punto de llegada en el segmento entre los ceros. Como es convención, la flecha indica la dirección en que aumenta la ganancia.

Para encontrar los puntos de arranque se debe aplicar la ecuación (3.35) obteniéndose la (3.38).

$$(\sigma^2 + 10\sigma + 24)(2\sigma + 3) - (\sigma^2 + 3\sigma + 2)(2\sigma + 10) = 7\sigma^2 + 44\sigma + 52 = 0 \quad (3.38)$$

Al resolver (3.38), se llega a que el punto de arranque se encuentra en $\sigma = -1.578$ y el punto de llegada se encuentra en $\sigma = -4.708$.

¿Para que nos podría servir conocer los puntos de arranque/llegada?. Por ejemplo, si necesitamos conocer cual es el valor de frecuencia natural máxima que se puede obtener en los polos de lazo cerrado dominantes de la Fig. 3.14, sin que se produzcan *overshoots* en el sistema de lazo cerrado ($\omega_n = 4.708$). Esta es una de las posibles aplicaciones de los tópicos discutidos en la sección 3.3.4.

3.3.6. Ángulos de Partida y de Llegada a Polos/Ceros Complejos

Este es un 'refinamiento' adicional al método del Lugar de la Raíz. Cuando se tienen polos y ceros complejos de lazo abierto, existe un ángulo de llegada a los ceros y existe un ángulo de partida en el caso de los polos. Esto se muestra gráficamente en la Fig. 3.15.

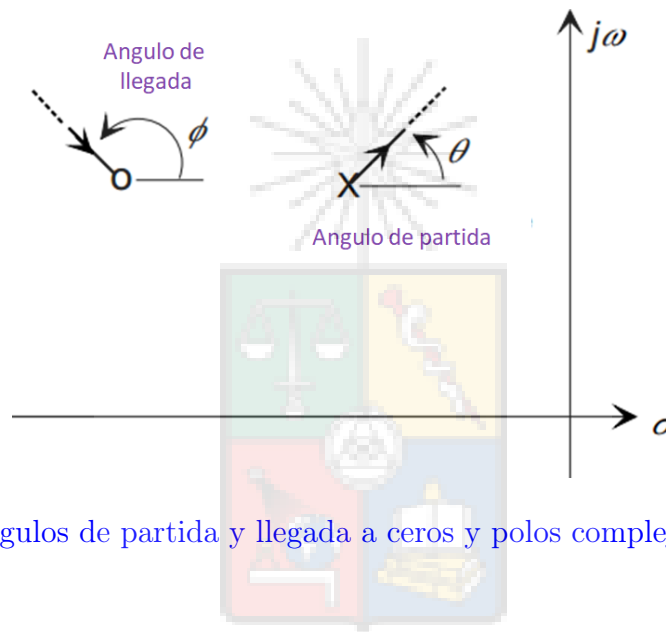


Figura 3.15: Ángulos de partida y llegada a ceros y polos complejos de lazo abierto.

Para encontrar los ángulos que se muestran en la Fig. 3.15, se debe considerar un punto imaginario ubicado a una distancia infinitesimal ϵ del polo o cero a analizar. Esto se muestra en la Fig. 3.16. Luego se aplica la ya estudiada (y mencionada varias veces en este apunte), condición de ángulo del lugar de la raíz. Esta se muestra en la ecuación (3.39).

$$\sum \text{ángulos de los ceros} - \sum \text{ángulos de los polos} = \pi \quad (3.39)$$

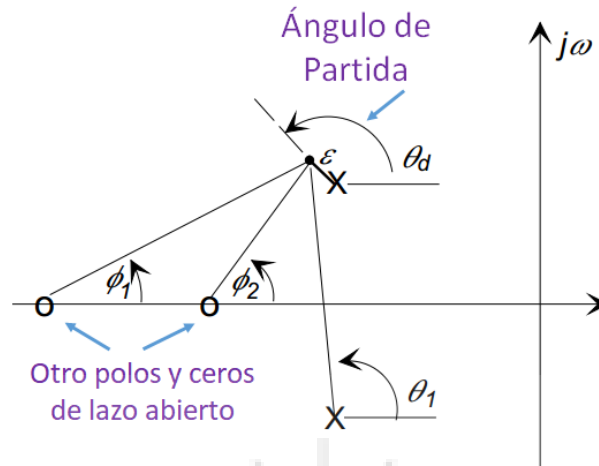


Figura 3.16: Cálculo del ángulo de partida.

La ecuación (3.39) puede ser aplicada a la configuración de polos y ceros de la Fig: 3.16 obteniéndose la expresión (3.40).

$$\phi_1 + \phi_2 - \theta_1 - \theta_d = \pi \quad (3.40)$$

Finalmente se llega a:

$$\theta_d = \phi_1 + \phi_2 - \theta_1 - \pi \quad (3.41)$$

Si $\epsilon \rightarrow 0$, entonces los ángulos pueden ser medidos con respecto al centro del polo complejo analizado (y el ángulo del otro polo complejo es $\theta_1 = 90^\circ$). El procedimiento a realizar para encontrar los ángulos de llegada de los ceros complejos es similar.

3.3.7. Un ejemplo del Cálculo de los Ángulos de Partida de Polos Complejos

Encuentre el ángulo de partida del polo complejo ubicado en el denominador de la función de lazo abierto de (3.42).

$$G(s) = K \frac{s + 4}{s^2 + 2s + 5} \quad (3.42)$$

Utilizando la Fig. 3.17 se concluye que $\theta = 90^\circ$, $\phi = \text{atan}(2/3) = 33.7^\circ$. Finalmente el ángulo de partida se calcula utilizando (3.43) como:

$$\begin{aligned} \theta_d &= \phi - \theta - \pi \\ &= 33.7^\circ - 90^\circ - 180^\circ \\ &= -236.31^\circ = 123.69^\circ \end{aligned} \quad (3.43)$$

Finalmente el lugar de la raíz resultante para la función de lazo abierto de (3.42) es mostrado en la Fig. 3.18.

Problema propuesto. Demuestre que el punto de *break-in* de la Fig. 3.18 corresponde efectivamente a $\sigma = 7.61$.

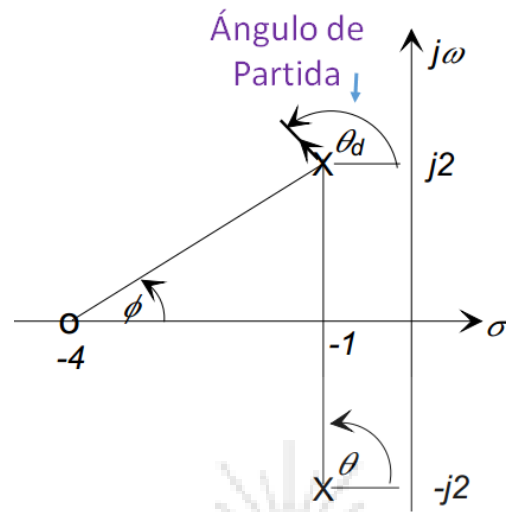


Figura 3.17: Polos y ceros de la función de transferencia a lazo abierto de (3.42)

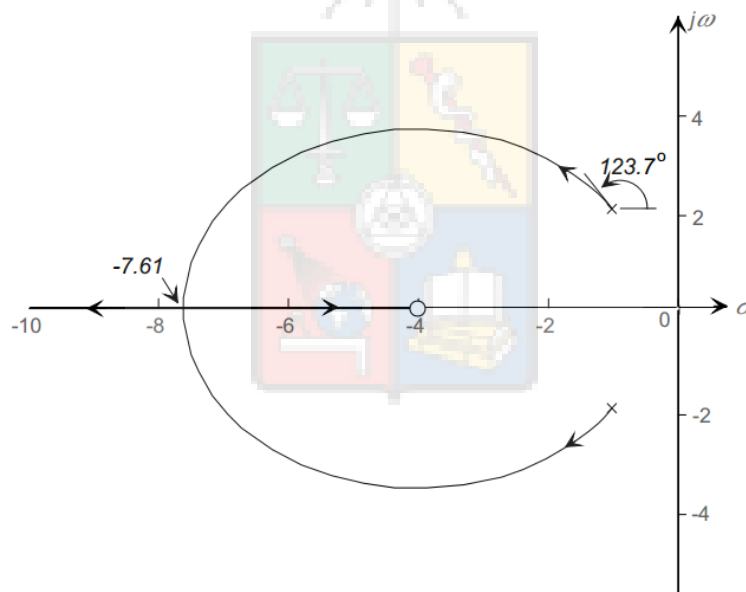


Figura 3.18: Lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia a lazo abierto de (3.42). Se asume una ganancia variable en esta función de transferencia.

3.3.8. Algunos de los Lugares de la Raíces mas Comunes

Existen dos lugares de las raíces que son bastante utilizados cuando se analizan planta de primer orden. Estos son:

1) Dos polos a lazo abierto, sin ceros, sistema de ganancia positiva. En este caso el lugar de la raíz es bastante simple y se puede diseñar el sistema sin la ayuda de un computador. Tome en cuenta que no existe ningún polo ni cero adicional además de los mostrados en la Fig. 3.19. Como es convención, la flecha indica la dirección en que aumenta la ganancia del sistema.

2) Dos polos de lazo abierto y un cero de lazo abierto. Se asume que el sistema es de la ganancia positiva y que el cero se ubica a la izquierda de los polos; en este caso el lugar de la raíz es un círculo perfecto centrado en el cero. Nuevamente se debe resaltar que no existe ningún polo ni cero adicional además de los mostrados en la Fig. 3.20.

3.4. Ceros de Lazo Cerrado

Como se demostró anteriormente, el lugar de la raíz resuelve gráficamente la ecuación característica encontrando de esta forma la posición de los polos de lazo cerrado. Infortunadamente, el método del lugar de la raíz no da mucha importancia a la ubicación de los ceros de lazo cerrado, porque la posición de estos no afecta la estabilidad del sistema de control (pocos métodos de diseño se preocupan de la posición de los ceros). Sin embargo, como se demostró anteriormente, los ceros de lazo abierto tienen influencia en el *overshoot*, tiempo de subida (T_r) y el tiempo de establecimiento (t_s). Por lo tanto el diseñador debe saber donde se encuentran los

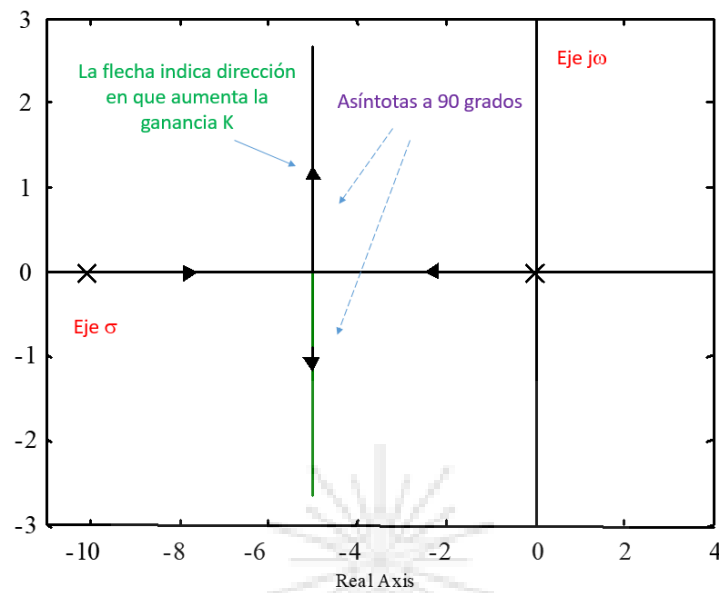


Figura 3.19: Ejemplo del lugar de la raíz. Dos polos solamente.

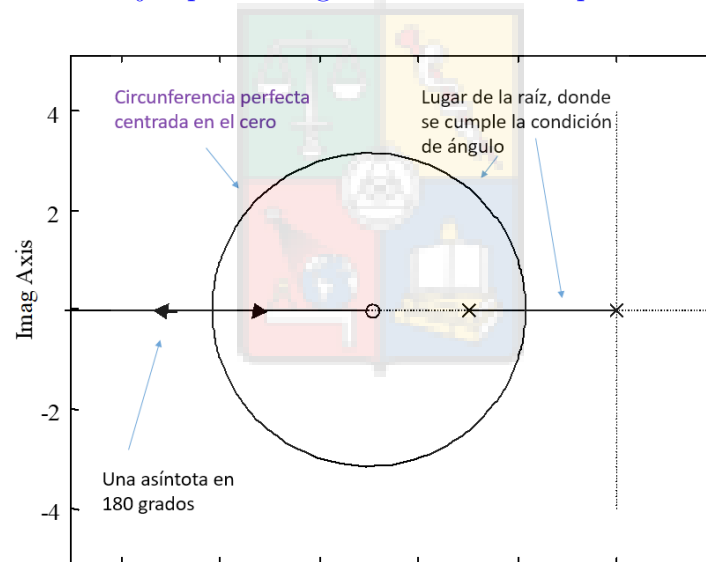


Figura 3.20: Ejemplo del lugar de la raíz. Dos polo y un cero.

ceros de lazo abierto y evitar que estos se encuentren en una posición en que puedan producir *overshoots* excesivos o amplificar el ruido de alta frecuencia.

Para un sistema de control como el mostrado en la Fig. 3.1, la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.44)$$

Si se define $G(s)$ y $H(s)$ en término de sus polos y ceros, se llega a:

$$G(s) = K_G \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})} \quad H(s) = K_H \frac{\Pi(s + z_{Hk})}{\Pi(s + p_{Hl})} \quad (3.45)$$

La función de transferencia de (3.44), puede reescribirse utilizando (3.45) como:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{K_G \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})}}{1 + K_G K_H \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})} \frac{\Pi(s + z_{Hk})}{\Pi(s + p_{Hl})}} \quad (3.46)$$

Manipulando (3.46), la función de lazo cerrado puede escribirse como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_G \Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + p_{Hl})}{\Pi(s + p_{Gj}) \Pi(s + p_{Hl}) + K_G K_H \Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + z_{Hk})} \quad (3.47)$$

El denominador de (3.47) es la ecuación característica cuya solución son los polos del sistema a lazo cerrado, los cuales se encuentran utilizando Root-Locus u otro método. Como ya hemos mencionado anteriormente (varias veces), el método del lugar de la raíz puede ser utilizado para calcular gráficamente el denominador de (3.47).

En un sistema SISO, los ceros de lazo cerrado se pueden encontrar por simple inspección de las funciones de transferencia $G(s)$ y $H(s)$. Si el sistema de control tiene realimentación unitaria, entonces los ceros de lazo cerrado son los ceros de lazo abierto. Si el sistema tiene realimentación no unitaria entonces los ceros de lazo cerrado son **los ceros de $G(s)$ y los polos de $H(s)$** . Es decir, si existe un filtro

en el lazo de realimentación, los polos de ese filtro se transformarán en ceros de lazo cerrado. La posición de los ceros es importante aunque no afecten a la estabilidad. Como se discutió en la Sección 2.2 del apunte de sistema de segundo orden, los ceros afectan el sobrepaso y también al tiempo de establecimiento. Por lo tanto, un cero de lazo cerrado en el semiplano derecho, aunque no necesariamente produce inestabilidad, puede producir efectos no deseados en la respuesta. Así como no se deben confundir los polos de lazo cerrado con los polos de lazo abierto, **no confunda los ceros de lazo cerrado con los ceros de lazo abierto ya que no siempre son iguales.**

La respuesta en el tiempo del sistema de control de lazo cerrado puede encontrarse expandiendo en fracciones parciales (3.47) y utilizando la transformada inversa de Laplace para llegar al dominio del tiempo:

$$y(s) = y^*(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \rightarrow y(s) = \sum \left[\frac{A_i}{(s + p_i)} \right] \Rightarrow y(t) = \sum A_i e^{-p_i t} \quad (3.48)$$

Donde los términos p_i son los polos de lazo cerrado más los polos de $y^*(s)$. Como se mencionó en el apunte anterior, los ceros de lazo cerrado tienen influencia en el valor de los coeficientes A_i y aunque los polos sean los mismos, los coeficientes serán distintos en sistemas que tengan distintos ceros.

Recuerde que un cero de lazo cerrado mal ubicado no produce inestabilidad, en el sentido de llevar la energía del sistema hacia el infinito; en todo caso un cero mal ubicado puede molestar bastante.

3.5. Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos

El sistema de control que se muestra en la Fig. 3.21, contiene otras entradas. Una de estas entradas son las perturbaciones $P(s)$ las cuales son externas y no controlables por el sistema. Por ejemplo el paso de una nube que obstruye el sol en un sistema de energía fotovoltaica. La segunda entrada es el ruido de medición $N(s)$, el que siempre está presente en un sistema. El ruido se puede reducir, pero nunca eliminar completamente.

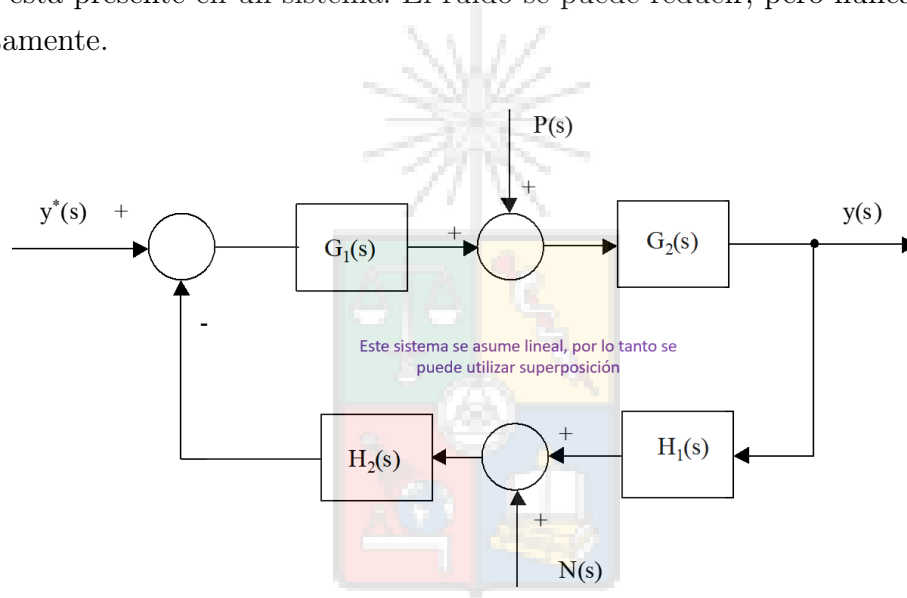


Figura 3.21: Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos.

El lazo directo es $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ y la función del lazo de realimentación es $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$. Utilizando álgebra de bloques y aplicando superposición puede demostrarse que:

$$y_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}y^*(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}P(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)H_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}N(s) \quad (3.49)$$

La conclusión principal que se puede obtener de (3.49), es que los polos a lazo cerrado son los mismos para todas las entradas que se encuentran en el sistema. Por lo tanto si se asegura que los polos dominantes de $y(s)/y^*(s)$ están ubicados con la frecuencia natural correcta y un coeficiente de amortiguamiento apropiado, entonces el sistema es estable y con polos de lazo cerrado bien ubicados con respecto a todas las otras posibles entradas del sistema como ruidos y perturbaciones (asumiendo que el sistema es lineal). Sin embargo, debe tenerse presente que los ceros que afectan a las otras entradas, son distintos; repetimos nuevamente que los ceros de lazo cerrado no producen inestabilidad pero si pueden producir bastante problemas como amplificación de ruido, altos *overshoots* y afectar el tiempo de establecimiento. Si un cero amplifica demasiado el ruido de alta frecuencia que habitualmente está presente en $N(s)$, el sistema va a funcionar incorrectamente aunque el sea estable y los polos estén bien ubicados.

3.6. Funciones de Sensibilidad

En esta sección se hace una introducción al concepto de errores que será discutido con mayor profundidad en el próximo capítulo. Además se complementa lo discutido en la sección anterior acerca de la amplificación del ruido de alta frecuencia.

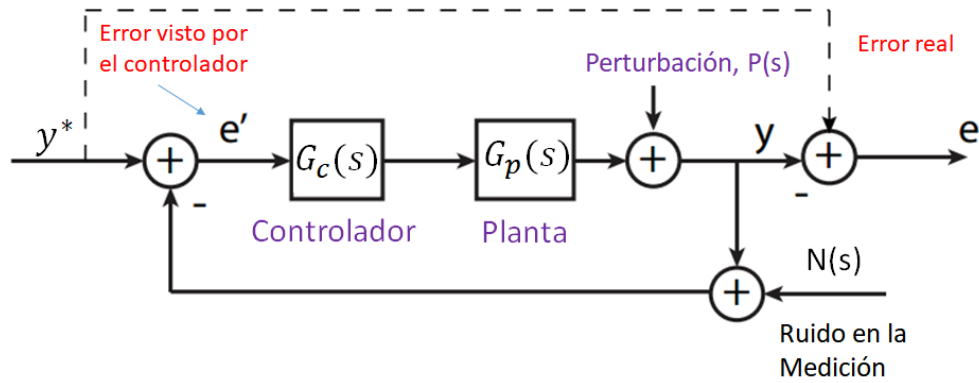


Figura 3.22: Sistema de control considerando ruido y realimentación unitaria. Esta figura es utilizada para definir las funciones de sensibilidad.

La Fig. 3.22 muestra un sistema que considera realimentación unitaria; la variable $e'(s)$ es el error visto por el controlador y el error $e(s)$ es el error real a la salida de la planta. Nótese que en esta caso, a pesar de existir realimentación unitaria, la presencia del ruido en la medición lleva a que el error a la salida de la planta (error real) no sea igual al error observado a la entrada del controlador.

Utilizando superposición y álgebra de bloques, las siguientes funciones de transferencia pueden obtenerse.

$$\begin{aligned} \frac{e(s)}{y^*(s)} &= \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} \equiv S(s) \\ \frac{e(s)}{P(s)} &= \frac{-1}{1 + G_c(s)G_p(s)} \equiv -S(s) \\ \frac{e(s)}{N(s)} &= \frac{-G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \equiv -T(s) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Donde a $S(s)$ se le denomina función de sensibilidad y a $T(s)$ se le denomina función complementaria de sensibilidad. A partir de estas funciones de transferencia,

se establece lo siguiente:

- Para obtener un buen seguimiento de $y^*(s)$ se requiere que $|S(s)| \ll 1$. Esto se concluye analizando la primera ecuación de (3.50). Si $|S(s)| \ll 1$, entonces $e(s)$ es bajo.
- Para obtener baja sensibilidad a las perturbaciones, también se requiere que $|S(s)| \ll 1$. Esto se concluye observando la segunda ecuación en (3.50). Si $|S(s)| \ll 1$, entonces la influencia de $P(s)$ en $e(s)$ es baja.
- Para obtener baja sensibilidad en el error con respecto al ruido en la medición, se requiere que $|T(s)| \ll 1$. Esto se concluye analizando la tercera ecuación de (3.50).

El principal problema es que estos objetivos pueden ser mutuamente excluyentes. A partir de (3.50) se llega a:

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (3.51)$$

Lo que podría significar que al mejorar el seguimiento de la referencia se amplifica el ruido en la medición y viceversa. Afortunadamente en la mayor parte de los sistemas de control (no todos) el ruido y la referencia están desacoplados en frecuencia y se cumple que:

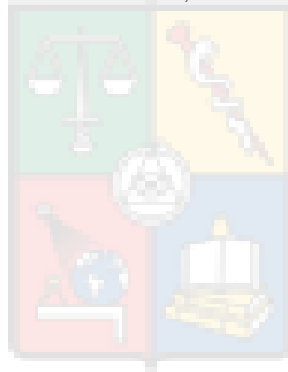
- Las señales de referencia son de baja frecuencia, al menos en estado estacionario.

- En un sistema bien diseñado, construido con sensores de la calidad adecuada, el ruido es de alta frecuencia.

Por lo tanto es posible efectuar un desacople por frecuencia, llevando $|S(s)|$ a un valor muy pequeño o cero en baja frecuencia y $|T(s)|$ a un valor pequeño en alta frecuencia. De esta forma se pueden lograr ambos objetivos, buen seguimiento de la referencia con baja amplificación del ruido de alta frecuencia.

La metodología requerida para reducir $|S(s)|$ se discute en el Capítulo 4.

Para aquellos que quieran profundizar más acerca de éstas y otras funciones de sensibilidad (además de sus aplicaciones) pueden utilizar este apunte de la Universidad de Oviedo que, a enero del 2022, se encontraba disponible en [este sitio web](#).



Capítulo IV

PRINCIPIO DEL MODELO INTERNO Y CALCULO DE ERRORES EN ESTADO ESTACIONARIO



Errores en estado estacionario

4.1. Introducción

Al especificar las características de un sistema de control, usualmente se consideran dos aspectos:

- Respuesta en estado permanente.
- Respuesta dinámica.

La respuesta dinámica o de estado transiente, depende fundamentalmente de la posición de los polos dominantes de lazo cerrado. Las especificaciones dinámicas se efectúan en términos de coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural, tiempo de subida, máximo peak, etc. Estos términos ya han sido definidos en el apunte del sistema de segundo orden.

La respuesta en estado permanente se especifica en términos del error en estado estacionario, cuando $t \rightarrow \infty$, considerando que una cierta entrada se aplica al sistema de control. Por ejemplo, en algunos sistemas se requiere cero error en estado

estacionario a entrada escalón pero otros tipos de especificaciones son posibles; bajo error en estado estacionario a entrada rampa o cero error en estado estacionario a entrada sinusoidal (entre otras).

La función de transferencia que relaciona el error $e(s)$ con la entrada $y^*(s)$ se obtiene de la figura 4.1. Como se mencionó anteriormente, $y^*(s)$ es la referencia o la entrada al sistema de control, $y(s)$ es la salida del sistema y $e(s)$ es el error. Analizando el diagrama de bloques de la Fig. 4.1 se encuentra el error $e(s)$ como se muestra en la ecuación (4.1).

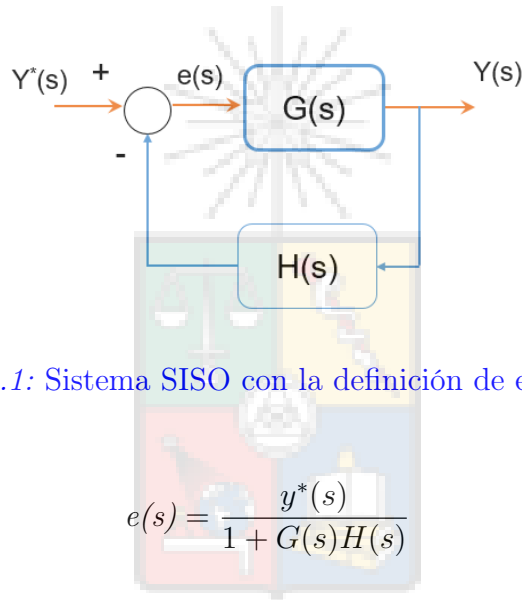


Figura 4.1: Sistema SISO con la definición de error $e(s)$.

$$e(s) = \frac{y^*(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.1)$$

Existen al menos dos métodos de analizar el error cuando $t \rightarrow \infty$ en (??) Uno de ellos es el teorema del valor final de Laplace, y el otro es el principio del modelo interno. El principio del modelo interno se discutirá primero.

El principio del modelo interno se utiliza principalmente para establecer las condiciones que debe tener un controlador para lograr cero error en estado estacionario. Para calcular el valor del error en estado estacionario, cuando éste existe, se utiliza habitualmente el teorema del valor final de Laplace.

4.2. Principio del Modelo Interno

En un sistema de control adecuadamente diseñado con todos los polos de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano izquierdo, existen dos tipos de respuesta. La respuesta forzada y la respuesta natural o transiente. Esto es conocido por todos los alumnos (cursos de análisis de circuitos) y se efectúa un ejemplo como recordatorio.

Se tiene un sistema con la siguiente función de transferencia relacionando el error con la entrada.

$$\frac{e(s)}{y^*(s)} = \frac{10}{(s+2)(s+5)} \quad (4.2)$$

Al considerar una entrada escalón unitario, se obtiene la siguiente respuesta que se expande en fracciones parciales:

$$e(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s} - \frac{10/6}{s+2} + \frac{10/15}{(s+5)} \quad (4.3)$$

Efectuando la transformada inversa de Laplace en (4.3), se llega a la ecuación (??),

$$e(t) = 1 - \frac{10}{6}e^{-2t} + \frac{10}{15}e^{-5t} \quad (4.4)$$

donde el término forzado corresponde al primero de la izquierda (lado derecho de la igualdad) y los otros dos términos son respuesta transientes que asintóticamente tienden a cero en estado permanente ($t \rightarrow \infty$).

Generalizando el ejemplo de (4.2) se puede analizar el error del sistema mostrado en la Fig. 4.1. En (??), la entrada $y^*(s)$ es la que produce la respuesta forzada ya que en un sistema asintóticamente estable, todos los polos de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ se encuentran ubicados en el semiplano izquierdo y por lo tanto la respuesta en el tiempo asociada a estos polos, desaparece asintóticamente cuando

$t \rightarrow \infty$. Esto se muestra en forma gráfica en la Fig. 4.2.

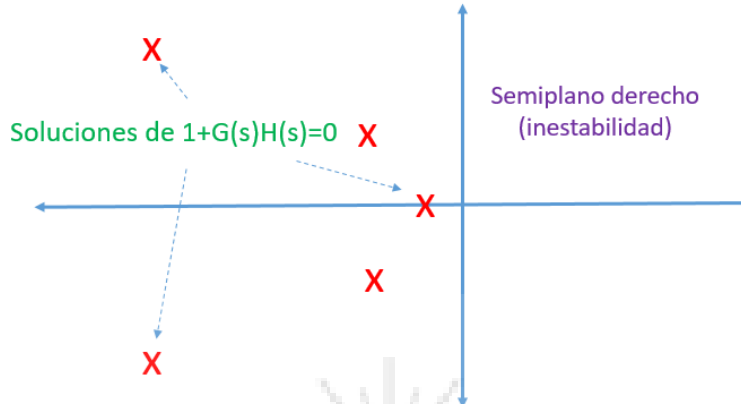


Figura 4.2: Soluciones de la ecuación característica. Para un sistema asintóticamente estable, todos los polos de lazo cerrado, es decir las soluciones de $1 + G(s)H(s)$, se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s . Todos esos polos tienen parte real negativa si el sistema es asintóticamente estable.

Por lo tanto, si los polos de lazo cerrado se encuentran bien ubicados en el semiplano izquierdo, entonces el error de estado estacionario es producido por $y^*(s)$ en (4.2). En la ecuación (??), $y^*(s)$ se puede reescribir utilizando la multiplicatoria de polos y ceros como se muestra en (4.5),

$$y^*(s) = K \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_j)} \quad (4.5)$$

Los polos de $y^*(s)$ en (4.5) no necesariamente tienen parte real negativa y algunos polos como por ejemplo los existentes en entradas tipo A/s (escalón), tipo rampa A/s^2 (rampa), tipo senoide $A/(s^2 + \omega_e^2)$ (sinusoidal de frecuencia ω_e), producen respuestas forzadas que llevan a la presencia de un error en estado estacionario [ver (4.3)-(4.4)]. Esto se puede comprobar fácilmente al expandir en fracciones parciales y efectuar la transformada inversa de Laplace para obtener $y(t)$.

¿Cual es la solución para llevar a cero el error en estado estacionario?. La solución es simple, se deben eliminar todos los polos de $y^*(s)$ que producen respuesta forzada. Remplazando (4.5) en (??), se llega a (4.6),

$$e(s) = K \frac{\Pi(s + z_i)}{\Pi(s + p_j)} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.6)$$

Utilizando el controlador, que permite colocar elementos de compensación en el numerador o denominador de $G(s)$, se puede modificar la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ para obtener:

$$G(s)H(s) = \frac{G(s)'H(s)'}{\Pi(s + p_j)} \quad (4.7)$$

Es decir, en la función de lazo abierto $G(s)H(s)$, se replican los polos que producen respuesta forzada en $y^*(s)$ como polos de $G(s)H(s)$. Reemplazando (4.7) en (4.6) se llega a (4.8),

$$e(s) = K \frac{\Pi(s + z_i)}{\Pi(s + p_j)} \frac{1}{1 + \frac{G(s)'H(s)'}{\Pi(s + p_j)}} \quad (4.8)$$

Es decir, los polos que se insertaron en el compensador, cancelan los polos de la referencia $y^*(s)$ que pueden producir error en estado estacionario en (??). Este proceso se muestra con más detalles en la Fig. 4.3.

Por lo tanto, los polos de $y^*(s)$ que producen una respuesta de estado permanente fueron eliminados. Se tiene un nuevo denominador en $e(s)$, y la respuesta transiente

$$e(s) = K \frac{\prod(s + z_i)}{\prod(s + p_j)} \frac{1}{\left(1 + \frac{G(s)'H(s)'}{\prod(s + p_j)}\right)}$$

↓

$$e(s) = K \frac{\prod(s + z_i)}{\prod(s + p_j) + G(s)'H(s)'}$$

Figura 4.3: Cancelación de los errores de estado estacionario utilizando el principio del modelo interno. El principio es muy simple, los polos ubicados en el denominador del controlador, se diseñan para cancelar los polos que producen respuesta forzada en $y^*(s)$.

queda determinada por las soluciones de la nueva ecuación característica:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{G(s)'H(s)'}{\prod(s + p_j)} \quad (4.9)$$

Si las raíces de la nueva ecuación característica, $1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{G(s)'H(s)'}{\prod(s + p_j)}$, se encuentran bien ubicados a pesar de agregar los polos extras $\prod(s + p_j)$ en el compensador, entonces el principio del modelo interno asegura que se puede producir cero error en estado estacionario a cualquier entrada $y^*(s)$.

Parece fácil pero no necesariamente lo es. Usualmente, cada vez que se añaden polos extras en el denominador de $G(s)H(s)$ se vuelve más complicado lograr que las soluciones de $1 + G(s)H(s) = 0$ se encuentren bien ubicadas en el semiplano izquierdo del plano s (es decir con adecuados valores de ω_n y ζ). Esto se analizará con mayor detalle cuando se discuta el diseño de controladores a través de la metodología denominada en la literatura anglosajona como *Reshaping of the Root Locus*.

Recuerde. Cero error en estado estacionario significa que $e(t \rightarrow \infty) = 0$. A menos que el sistema de control de Fig. 4.1 tenga realimentación unitaria, cero error en estado estacionario no significa necesariamente que $y(t \rightarrow \infty) = y^*$. Además, como ya se discutió en la Sección 3.6, al existir ruido en la medición, el error observado a la entrada del controlador y el error físico, a la salida del sistema SISO, pueden ser diferentes.

Otro punto a recordar. El principio del modelo interno no señala **que solo un polo de la respuesta forzada a cancelar** debe introducirse en el denominador de $G(s)H(s)$. Matemáticamente [ver Fig. 4.3 y la ecuación (4.8)] **al menos** un polo de cada respuesta forzada a eliminar es necesario. Por ejemplo, si la entrada $y^*(s)$ es un escalón, y se introducen dos integradores en $G(s)H(s)$, también se obtiene cero error en estado estacionario a entrada escalón. Por supuesto que introducir integradores o polos adicionales en un compensador no es recomendable a menos que sea necesario. Cada polo que se agrega en $G(s)H(s)$ complica el diseño y la implementación del controlador.

Un ejercicio en que se aplica el principio del modelo interno para regular con cero error en estado estacionario una entrada de referencia sinusoidal se realiza en la Sección 9.3.1.

4.3. Cálculo de Errores en Estado Estacionario Utilizando el Teorema del Valor Final de Laplace.

El error en estado estacionario se puede calcular utilizando el teorema del valor final de Laplace. Este método tiene el inconveniente de que no se puede aplicar

a todas las posibles entradas $y^*(s)$, por ejemplo no se puede utilizar con entradas sinusoidales ya que nos es posible conocer el valor de la sinusoidal cuando $t \rightarrow \infty$ (valor indeterminado entre -1 y 1). Sin embargo, puede aplicarse para otras entradas como escalón, rampa, parabólica etc.

Matemáticamente, el teorema del valor final de Laplace se puede escribir como se muestra en (4.10),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) \quad (4.10)$$

Aplicando el teorema del valor final de Laplace a (??) se llega a (4.11),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s y^*(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.11)$$

Por ejemplo, si $y^*(s)$ es una entrada tipo escalón de magnitud A , el error en estado estacionario de (4.11) es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.12)$$

Analizando (4.12) se puede concluir que existen solamente dos posibilidades para que el error en estado estacionario sea cero.

- Que la magnitud del escalón de entrada sea cero.

- Que el término $G(s)H(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow 0$.

La magnitud de la entrada escalón no debería ser cero, porque en ese caso no existiría entrada. Para lograr cero error en estado estacionario, la función de transferencia a lazo abierto $G(s)H(s)$ debería tener la forma mostrada en (4.13),

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_1^m (s + z_i)}{s^n \prod_1^l (s + p_j)} \quad (4.13)$$

Donde $l + n \geq m$. La función de transferencia a lazo abierto (4.13) tiene n polos en el origen. En este caso se denomina a la función como de tipo n . De la misma forma pueden especificarse las entradas al sistema. En este caso la entrada escalón (A/s) es entrada Tipo 1, la entrada rampa (A/s^2) es Tipo 2 y la entrada parabólica (A/s^3) es Tipo 3.

Reemplazando (4.13) en (4.12), se obtiene el error en estado estacionario como (4.14),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + \frac{K \prod_1^m (s + z_i)}{s^n \prod_1^l (s + p_j)}} \quad (4.14)$$

Por lo tanto para que exista cero error en estado estacionario a entrada escalón, n debe ser mayor o igual que uno en (4.14) (lo que también establece el principio del modelo interno). En otras palabras la función de transferencia a lazo abierto debe tener un tipo mayor o igual que uno.

4.3.1. Coeficientes de Error de Posición, Velocidad y Aceleración

Generalizando, se puede demostrar que existe cero error en estado estacionario cuando el *tipo* de la función de transferencia a lazo abierto es mayor o igual que el *tipo* de la entrada. Se definen los coeficientes de error como:

$$K_N = \lim_{s \rightarrow 0} s^N G(s) H(s) \quad (4.15)$$

K_N se denomina K_p para $N = 0$, K_v para $N = 1$ y K_a para $N = 2$. Los coeficientes K_p , K_v y K_a se denominan coeficientes de error de posición, velocidad y aceleración respectivamente.

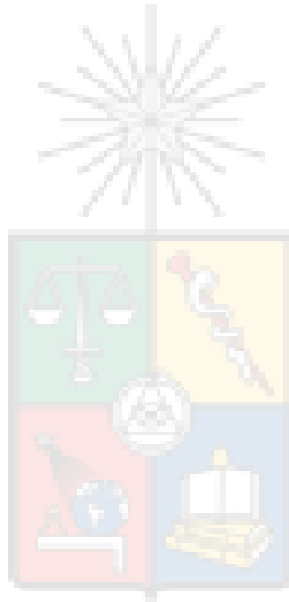
Tipo de la función $G(s) H(s)$	Entrada Escalón $y^* = A/s$	Entrada rampa $y^* = A/s^2$	Entrada parabólica $y^* = A/s^3$
0	$e_{SS} = \frac{A}{1+K_p}$	$e_{SS} = \infty$	$e_{SS} = \infty$
1	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = \frac{A}{K_v}$	$e_{SS} = \infty$
2	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = \frac{A}{K_a}$
3	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = 0$

Tabla 4.1: Resumen de los errores obtenidos para algunas entradas típicas.

Los errores en estado estacionario para entrada escalón, rampa y parabólica quedan definidos en la tabla 4.1. En esta tabla sistemas tipo 0 a tipo 3 son considerados.

Los coeficientes de error de un sistema indican la capacidad del sistema de control

para reducir o incluso eliminar el error en estado estacionario. Estos coeficientes pueden ser utilizados como indicadores numéricos para mostrar las capacidades de un sistema de control. Por ejemplo, mientras mayor es el coeficiente de error de velocidad, menor es el error a entrada rampa.



Capítulo V

KINDERGARTEN DE DISEÑO DE CONTROLADORES



Diseño Básico de Controladores

5.1. Introducción

No existen reglas fijas para el diseño de controladores. Para una planta y especificaciones dadas pueden existir dos o más controladores que entreguen buen desempeño. En las siguientes páginas se estudiarán varios enfoques para el diseño de un controlador simple para una planta de primer orden. Se entregarán además algunas sugerencias o lo que se denomina informalmente como *recetas* en este apunte. Recuerde siempre que en el diseño de controladores no existen reglas inamovibles. Todas las *recetas* pueden fallar en algunos casos

Estos enfoques están basados en la experiencia del autor, principalmente en el área de control de máquinas y convertidores de potencia, y de ninguna manera son únicos. El estudiante debe recordar que las únicas limitaciones que existen para diseñar un controlador son:

- El controlador debe cumplir con las especificaciones a lazo cerrado.
- El controlador debe ser simple. Las soluciones complicadas pueden ser difíciles de implementar. A Albert Einstein o a William de Ockham se le atribuye

la cita *'Everything should be made as simple as possible, but not simpler'*. Independiente de quién lo haya dicho primero, la cita es 100 % aplicable a cualquier diseño de ingeniería, incluyendo el de los sistemas de control. Recuerde, prefiera siempre las soluciones simples (además a veces eso es evaluado).

Cumpliendo con estos requerimientos, todos los controladores son apropiados.

La planta de primer orden utilizada en esta sección se muestra en (5.1),

$$\frac{a}{s + a} \quad (5.1)$$

Esta planta es muy común, especialmente en máquinas eléctricas. En las siguientes secciones se estudiarán controladores para cumplir con las siguientes especificaciones a lazo cerrado:

- *Cero error a estado estacionario para una entrada escalón.*
- *Un valor de frecuencia natural ω_n determinada*
- *Un valor de coeficiente de amortiguamiento ζ determinado.*

Antes de estudiar cualquier controlador se puede obtener la siguiente información, considerando las especificaciones del sistema:

1. Si se requiere cero error en estado estacionario a entrada escalón, el sistema a lazo abierto debe tener un polo en el origen. Sin este polo no es posible cumplir con este requerimiento.

Esto es simplemente la aplicación del principio del modelo interno. La entrada tipo escalón tiene un polo en el origen que produce respuesta forzada, por lo tanto en la función de transferencia $G(s)H(s)$ debe existir un polo en el origen para lograr cero error en estado estacionario a esta entrada. Dado que la planta de primer orden no lo contiene [ver (5.1)], se debe insertar en el compensador $G_c(s)$.

2. Para un sistema estable, todas las combinaciones posibles de polos a lazo cerrado, que entregan una frecuencia natural ω_n forman un semicírculo de radio ω_n . Esto se muestra en la Fig. 5.1.

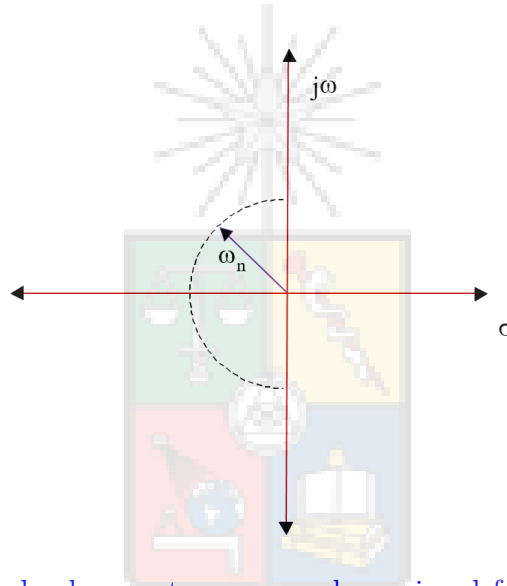


Figura 5.1: Locus de todos los puntos que producen igual frecuencia natural ω_n en el plano s . No se consideran los puntos ubicados en el semiplano derecho ya que obviamente producen polos inestables.

3. Todas las combinaciones posibles de polos a lazo cerrado, que entregan un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = cte.$, forman una línea recta. Esto se muestra en la Fig. 5.2,
4. Todos los polos de lazo cerrado que entregan una respuesta con similar tiempo de establecimiento, forman una línea recta perpendicular con el eje real (ver

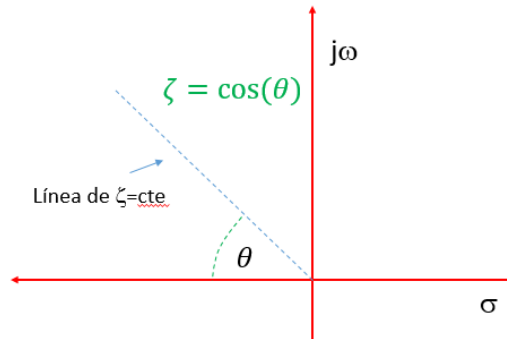


Figura 5.2: Locus de todos los puntos que producen igual coeficiente de amortiguamiento ζ . En el plano s este locus es una línea recta.

Fig. 5.3 . Esto se debe a que el tiempo de establecimiento (2%) esta dado por la siguiente expresión:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (5.2)$$

donde el término $\zeta \omega_n$ es equivalente a $\omega_n \cos(\theta)$ (ver Figs. 5.2 y 5.3). El locus del $t_s = cte.$ es una línea recta paralela al eje $j\omega$.

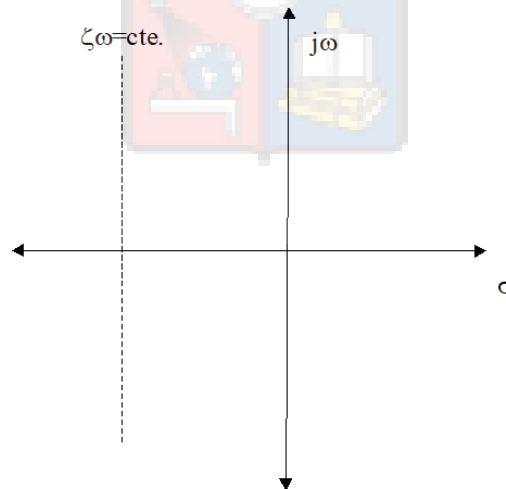


Figura 5.3: Locus de todos los puntos que producen igual tiempo de establecimiento.

5.2. Diseño de Controladores Proporcional Integral o PI

El controlador PID esta compuesto por tres términos, la parte proporcional, la parte integral y la parte derivativa. La función de transferencia ideal de este controlador es:

$$u(s) = \left(K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(s) \quad (5.3)$$

Donde $e(s)$ es el error y $u(s)$ la señal de salida del controlador. El controlador PID se discute en detalle en la Sección 6.1.1.

En mi área de trabajo, el PID no se utiliza demasiado ya que habitualmente las máquinas eléctricas y sistemas de primer orden en general, se regulan utilizando controladores PI, lo que significa que $T_d = 0$ en la ecuación (5.3). En este caso el controlador tiene la forma:

$$\frac{u(s)}{e(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} \Rightarrow \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{K_p (s + K_i/K_p)}{s} \quad (5.4)$$

Donde K_p es la constante proporcional y K_i la constante integral del controlador. La figura 5.4 muestra el sistema de control incluyendo el controlador.

El lugar de la raíz a lazo cerrado se obtiene fácilmente, ya que para dos polos y un cero, el locus corresponde a un círculo centrado en el cero. Esto se muestra en la

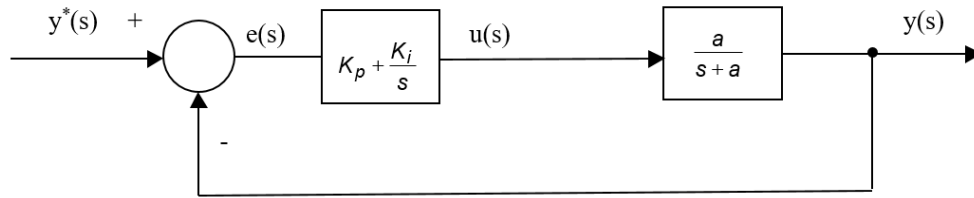


Figura 5.4: Aplicación de un controlador *PI* en una planta de primer orden.

Fig. 5.5; el lugar de la raíz mostrado tiene una forma ovalada, pero esto se debe a que se utilizan diferentes escalas en los ejes (esto es típico de los gráficos realizados en Matlab).

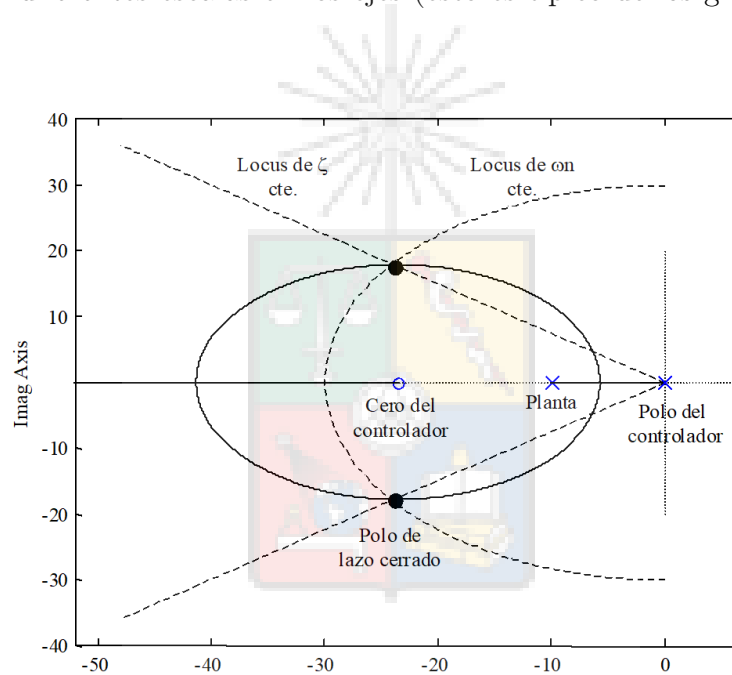


Figura 5.5: Lugar de la raíz correspondiente a un controlador *PI* aplicado a una planta de primer orden.

En el lugar de la raíz de la Fig. 5.5, a la intersección del semicírculo de frecuencia natural constante, con la línea de coeficiente de amortiguamiento constante, se le denomina habitualmente **punto de diseño**. El controlador *PI* tiene dos grados de libertad; la posición del cero y el valor de la ganancia. Tenga en cuenta que la posición

del polo del PI en (5.4) no es un grado de libertad, ya que si el polo no se encuentra en el origen, no se cumple con el principio del modelo interno y no se lograría cero error en estado estacionario.

Utilizando los dos grados de libertad es muy simple ubicar los polos de lazo cerrado en el punto de diseño. Con el cero se logra la condición de ángulo y con la ganancia del PI la condición de módulo. Este proceso también se puede realizar fácilmente en forma algebraica, al menos cuando la planta es de primer orden. Recordando que los ceros de lazo cerrado son los ceros de $G(s)$ y/o los polos de $H(s)$, para un diseño como el mostrado en la Fig. 5.5, la función de transferencia a lazo cerrado es la que se muestra en (5.5).

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_n^2 K_p}{K_i} \frac{(s + K_i/K_p)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.5)$$

donde la constante $\frac{\omega_n^2 K_p}{K_i}$ asegura cero error en estado estacionario a entrada escalón. Esto significa, para el caso del sistema con realimentación unitaria mostrado en la Fig. 5.4, que en estado permanente la salida es igual al escalón de entrada.

El controlador PI es uno de los más aplicados en el ámbito de máquinas eléctrica. Una de las desventajas que tiene, es que el cero del controlador forma parte de la función de transferencia a lazo cerrado y que en muchas oportunidades no es posible alejar este cero de los polos dominantes de lazo cerrado. Como se ha señalado anteriormente, cuando el cero se encuentra cerca de la parte real de los polos dominantes de lazo cerrado, el sobrepaso de la respuesta en el tiempo puede alcanzar valores altos (aunque el tiempo de subida puede ser menor). Esto es perfectamente tolerable en muchas aplicaciones, por ejemplo cuando se efectúa control de corriente en una máquina eléctrica; un *overshoot* de un 20 %-30 %, aplicado por un par de decenas de milisegundos tiene poco o ningún efecto en la vida útil de un devanado.

Sin embargo, en aplicaciones donde es necesario evitar los *overshoots* excesivos, se deben utilizar otro tipo de controladores como los que se discuten a continuación.

5.3. Compensación por cancelación

Una de las alternativas al diseñar sistemas de control es cancelar elementos de la planta. Es decir, si el controlador considera un cero éste puede ubicarse sobre uno de los polos de la planta (y viceversa). La siguiente figura muestra un sistema de control donde se ha aplicado cancelación:

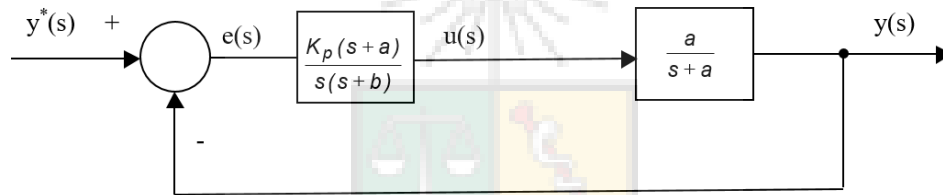


Figura 5.6: Aplicación de un compensador que considera cancelación del polo de la planta

En este sistema el cero del controlador se ha utilizado para eliminar el polo de la planta de primer orden. De esta forma el cero del controlador desaparece de la función de transferencia a lazo cerrado y se elimina el sobrepaso. El lugar de la raíz para este caso es mostrado en la Fig. 5.7

La función de transferencia a lazo cerrado corresponde a un sistema de segundo orden ideal. Si el coeficiente de amortiguamiento es apropiado el sobrepaso es bajo, tal como se muestra en la Tabla 2.1. Esta estrategia de control necesita un controlador ligeramente más complicado ya que requiere un polo extra para poder ajustar el lugar de la raíz y lograr alcanzar el punto de diseño.

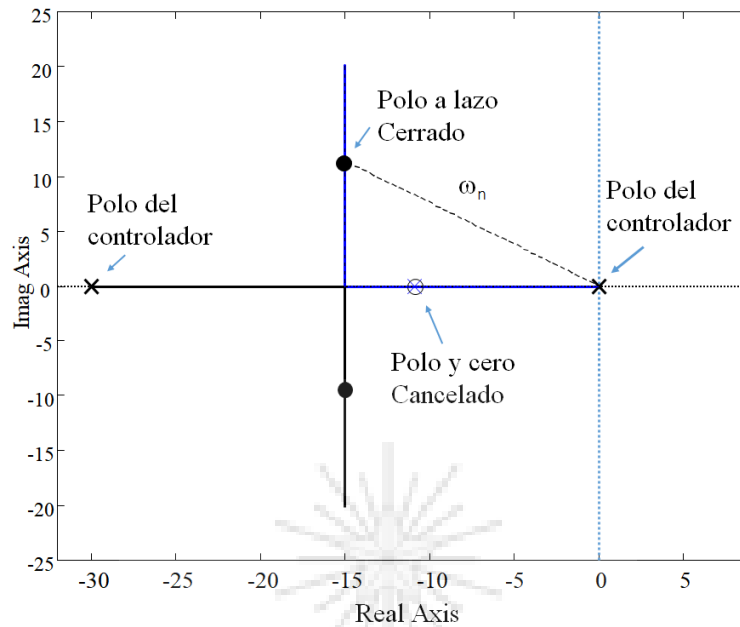


Figura 5.7: Lugar de la raíz considerando cancelación.

5.3.1. Efectos de la Cancelación Imperfecta de Polos y Ceros

En control automático es muy difícil encontrar estrategias que no presenten desventajas y esta estrategia de compensación no es la excepción. La posición de los polos y ceros no es fija en un sistema físico y algunos de ellos cambian su ubicación en el plano s de acuerdo al punto de operación del sistema. Un ejemplo de esto es lo que sucede en la puerta mecánica de un motor. Si el motor está conectado a una carga mecánica pasiva se tiene la función de transferencia de (5.6), entre el torque eléctrico y la velocidad rotacional:

$$T_e = B\omega + J\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{T_e}{J(s + B/J)} \quad (5.6)$$

Donde T_e es una función de la corriente del motor, B es el coeficiente de fricción y J es la inercia rotacional.

Si la carga es una correa transportadora o un molino en que se está triturando material, el polo B/J de (5.6) es móvil y tiene un amplio desplazamiento dependiendo de la fricción e inercia. Si se implementa un sistema de control utilizando cancelación, es posible de que el sistema opere adecuadamente para un cierto rango de carga y entregue una respuesta menos apropiada en otras condiciones de operación. La figura 5.7 muestra cancelación perfecta, mientras que las figuras 5.8 y 5.9 muestran que sucede cuando la cancelación es imperfecta.

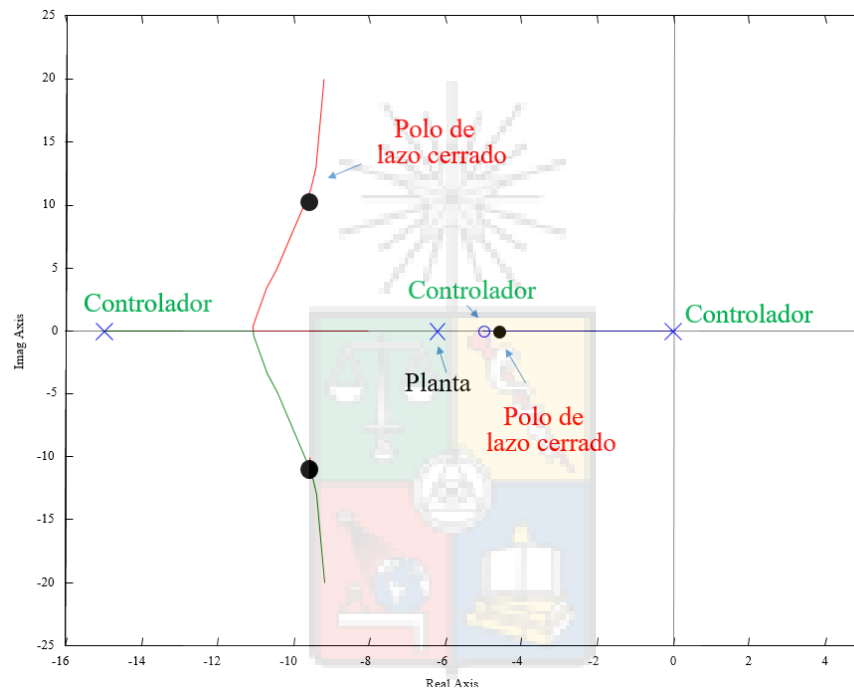


Figura 5.8: Lugar de la raíz considerando cancelación imperfecta. El cero del controlador se ubica a la izquierda del polo de la planta.

La Fig. 5.8 muestra que al producirse la cancelación imperfecta, queda una raíz real lenta de lazo cerrado cerca del origen. La influencia de esta raíz depende de que tan alejado esté el polo de lazo cerrado con respecto al cero. En el caso de la Fig. 5.9 no se tiene una raíz lenta, pero la frecuencia natural de los polos dominantes de lazo cerrado ha disminuido con respecto al diseño original de la Fig. 5.7.

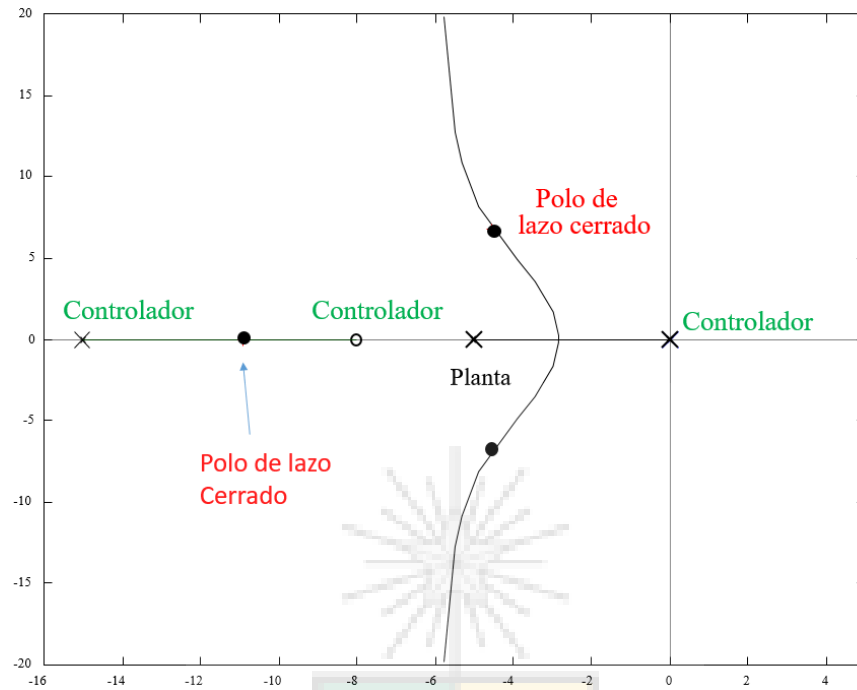


Figura 5.9: Lugar de la raíz considerando cancelación imperfecta. El cero del controlador se ubica a la derecha del polo de la planta.

Sin embargo, no se puede concluir que compensación por cancelación es una técnica inadecuada debido a que es imposible cancelar exactamente un polo o un cero. En muchas aplicaciones la variabilidad de los elementos de la planta, aunque existente, es reducida. Este es el caso por ejemplo del polo R/L del devanado de un motor. En motores eléctricos la variación del término R/L con la temperatura, no tiene los rangos de variación presente en la puerta mecánica del motor.

Se puede demostrar fácilmente que cuando la cancelación de polos y ceros no es perfecta, pero tampoco el cero se encuentra muy alejado del polo, el sistema opera apropiadamente a pesar de la existencia de una raíz lenta o ubicada en una posición inadecuada. Por ejemplo en el caso del diagrama de la raíz de la Fig. 5.8, existen tres polos de lazo cerrado y uno de ellos se encuentra muy cerca de un cero de

lazo abierto. La función de transferencia a lazo cerrado, correspondiente a los polos y ceros mostrados en la Fig. 5.8, y considerando salida igual a la entrada escalón cuando $t \rightarrow \infty$, puede escribirse como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{\omega_n^2(a + \Delta a)}{a} \frac{(s + a)}{(s + a + \Delta a)(s^2 + 2\zeta\omega_s s + \omega_n^2)} \quad (5.7)$$

El cero del controlador se encuentra en el numerador de la función de lazo cerrado. Existen tres polos de lazo cerrado. Dos de ellos complejos conjugados y uno de ellos que se encuentra ubicado en $a + \Delta a$ (muy cerca de la posición del cero a lazo cerrado). Si $\Delta a \approx 0$, entonces se puede asumir que el cero y el polo de lazo cerrado se cancelan entre ellos y el sistema es casi una función de transferencia de segundo orden ideal. Si el valor de Δa comienza a aumentar, el sistema todavía funcionará, pero probablemente con una dinámica en que estará más presente el efecto del polo de primer orden cercano al origen; la influencia de este polo tendría que ser evaluada utilizando simulación. En todos los casos se produce cero error en estado estacionario a entrada escalón ya que el integrador en el origen lo asegura (principio del modelo interno).

5.3.2. Compensación por Cancelación de una Planta de Mayor Orden

Compensación por cancelación se utiliza no solo con plantas de primer orden sino con plantas de orden n . Por ejemplo, si se tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 5)(s + 10)(s + 30)} \quad H(s) = 1 \quad (5.8)$$

Si se utiliza un controlador PI (el cual no siempre es apropiado para sistemas con tres o más polos) se debe colocar un polo en el origen y luego con el cero cancelar el polo de lazo abierto más lento. Esto es importante de recordar ya que se obtienen polos de lazo cerrado con mayor frecuencia natural (mejor respuesta dinámica) cuando el polo de lazo abierto más lento de un sistema tipo cero se elimina. En este caso el polo más lento está ubicado en $s=-5$. Al cancelar este elemento, el lugar de la raíz del sistema incluyendo controlador es mostrado en la Fig. 5.10.

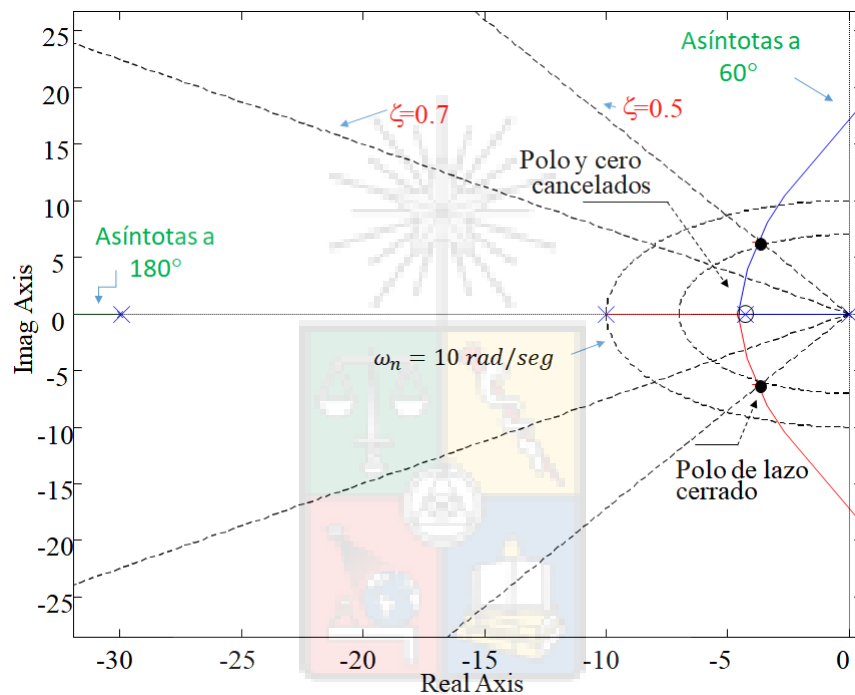


Figura 5.10: Lugar de la raíz considerando cancelación del polo más lento en un sistema que considera tres polos de lazo abierto y un controlador PI .

En la Fig. 5.10, existen tres polos en la planta, y si se considera el controlador PI , se obtiene finalmente cuatro polos y un cero; si el cero cancela un polo nos quedamos con tres polos, sin ceros. En cualquiera de estos casos, utilizando las reglas del lugar de la raíz y las ecuaciones (3.20)-(3.21) se llega a que el Lugar de la Raíz tiene tres asíntotas ubicadas en $+60^\circ$, -60° y 180° que pueden hacer que el sistema sea

inestable con altos valores de ganancia. Ajustando esta ganancia adecuadamente, el controlador por cancelación puede lograr una frecuencia natural de $\omega_n = 7$ rad/seg y un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta=0.5$. Esto se muestra en la Fig. 5.10.

Al utilizar cancelación debe tenerse en cuenta que **no se pueden cancelar polos o ceros de lazo abierto que se encuentren en el semiplano derecho**. La cancelación de un polo o cero en un sistema físico es siempre inexacta, por lo tanto si se intenta cancelar un polo o cero en el semiplano derecho se producirá un lugar de la raíz entre el polo y el cero mal cancelado. Si eso sucede en el semiplano izquierdo, no tendrá mucho efecto en la respuesta; sin embargo, en el semiplano derecho toda cancelación imperfecta produce un polo de lazo cerrado inestable.

5.4. Compensación tipo Butterworth

Se debe tener en cuenta que en algunas configuraciones de polos y ceros, la compensación por cancelación puede producir inestabilidad. Suponga que se tiene la función de transferencia a lazo abierto de (5.9).

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)} \quad (5.9)$$

El sistema mostrado en (5.9) ya es tipo 1. Suponga que se requiere cero error en estado estacionario a entrada rampa y que se utiliza un compensador tipo *PI* para alcanzar esta condición de diseño. Una estrategia incorrecta sería cancelar el polo $s=-2$ con el cero del controlador. En este caso el sistema a lazo cerrado, tal como se muestra en la Fig. 5.11 es inestable para todo valor de ganancia K . Los dos integradores producen polos de lazo cerrado que se desplazan al semiplano derecho a través de las asíntotas de 60 grados mostradas en el gráfico.

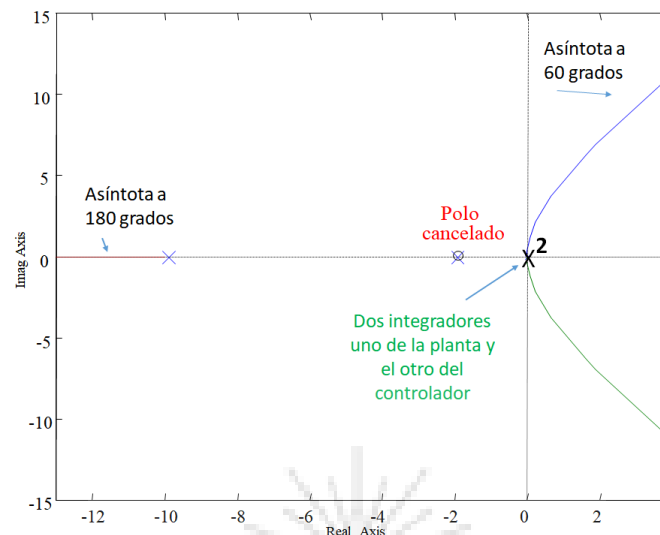


Figura 5.11: Lugar de la raíz donde se muestra que en algunos casos cancelación es una mala idea ya que produce un sistema que es inestable para todo valor de ganancia.

Cuando se requiere cero error en estado estacionario a entrada rampa, para un sistema tipo 1 como el mostrado en (5.9), se propone compensar el sistema de forma que a lazo cerrado los polos se encuentren ubicados como los de un filtro de Butterworth de orden n . En general los filtros de Butterworth tienen una respuesta en frecuencia muy plana y sus respuestas en el tiempo son aceptables en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento. Más información acerca de filtros Butterworth puede ser encontrada en muchos libros, incluyendo aquellos que ya eran viejos cuando yo era estudiante (Stephen Butterworth propuso sus filtros por primera vez en 1930):

- Horowitz and Hill, "The art of Electronics".
- Chen, "The circuits and filter handbook", IEEE Press.

Dado que el sistema tiene tres polos de lazo cerrado, los polos se encuentran

ubicados en un semicírculo de radio ω_n . Esto se muestra a continuación en la Fig. 5.12.

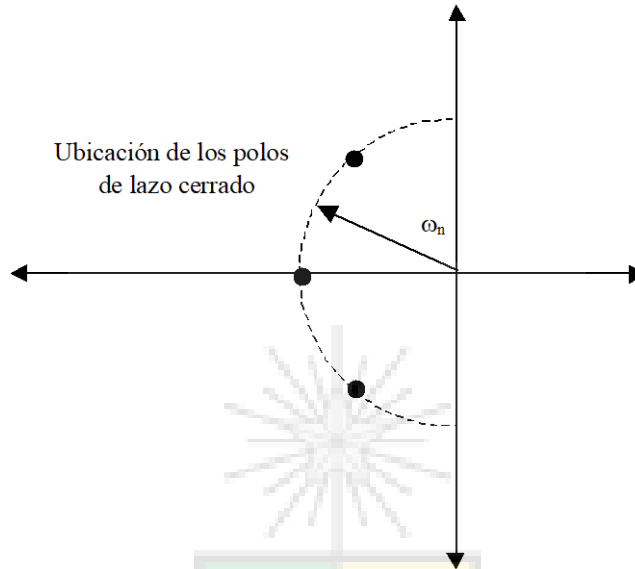


Figura 5.12: Ubicando los polos en una posición similar a la existente en un filtro Butterworth de tercer orden.

Por lo tanto los polos dominantes de una función de transferencia similar a un filtro de Butterworth estarían ubicados de acuerdo a lo mostrado en la ecuación (5.10):

$$1 + G(s)H(s) = (s + \omega_n) (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (5.10)$$

Para el caso de un filtro de Butterworth de tercer orden el coeficiente de amortiguamiento es 0.5. Suponiendo que se compensa el sistema mostrado en (5.9) con un controlador tipo PI, la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+b)}{s^2(s+2)(s+10)} = \frac{s^2(s+2)(s+10) + K(s+b)}{s^2(s+2)(s+10)} \quad (5.11)$$

Existen dos grados de libertad que se deben ajustar en (5.11). La posición del cero b (ya se discutió que cancelación es una mala idea, por lo tanto se debe calcular su ubicación), y el valor de la ganancia del controlador.

La expresión en el numerador de (5.11) debe igualarse a la obtenida para los polos del filtro Butterworth de tercer orden (ver Fig. 5.12) más un polo extra. El polo extra se debe a que (5.10) es de tercer orden y el numerador de (5.11) es de cuarto orden.

$$s^2(s+2)(s+10) + K(s+b) = (s+\alpha)(s+\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (5.12)$$

donde α representa el polo extra. Utilizando $\zeta=0.5$ y simplificando (5.12) se obtiene:

$$s^4 + 12s^3 + 20s^2 + Ks + Kb = s^4 + (\alpha + 2\omega_n)s^3 + 2\omega_n(\alpha + \omega_n)s^2 + \omega_n^2(2\alpha + \omega_n)s + \alpha\omega_n^3 \quad (5.13)$$

El siguiente sistema de ecuaciones puede obtenerse de (5.13):

$$\begin{aligned} \alpha + 2\omega_n &= 12 \\ 2\omega_n(\alpha + \omega_n) &= 20 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene que $\alpha = 10.2$ $\omega_n = 0.9$ $K =$

17.25 $b = 0.43$. Esto significa que para obtener una respuesta tipo Butterworth de tercer orden la ganancia del sistema (incluyendo controlador) es 17.25 y el cero debe ser ubicado en $s = -0.43$. Como puede observarse la resolución de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ no es trivial y podría dificultarse más si es que existen un número mayor de polos de lazo abierto. Por lo tanto para compensaciones de sistemas tipo uno que consideren cero error en estado estacionario a entrada rampa se recomienda el siguiente procedimiento:

1. Identifique el polo más lento que no esté en el origen y que se encuentra en la posición $s = -d$ (en el caso de la ecuación (5.9) $d=2$).
2. Coloque el cero del controlador PI en la posición $b = d/4$.
3. Utilizando prueba y error con el lugar de la raíz, mueva levemente el cero del controlador para maximizar la frecuencia natural considerando $\zeta = 0.5$.

El procedimiento anterior es válido solo para compensar utilizando controladores PI . Si se utilizan compensadores con más ceros es posible lograr una frecuencia natural mayor, pero complicando, quizás innecesariamente, la solución.

5.5. Compensación tipo IP

Otras de las configuraciones básicas de control utilizadas, especialmente en el caso de plantas de primer orden, es el controlador IP. La Fig. 5.13 muestra un controlador IP incluyendo la planta de primer orden que considera inercia J y coeficiente viscoso de fricción B .

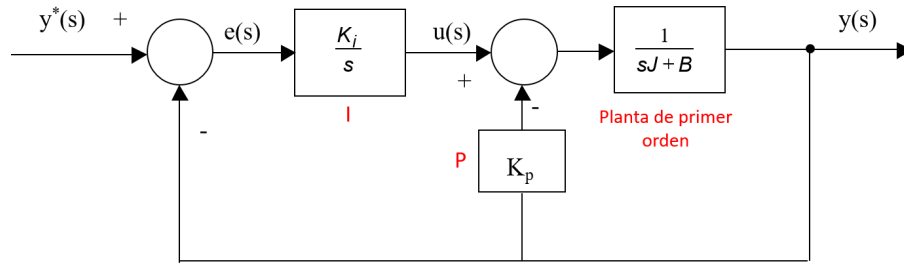


Figura 5.13: Controlador IP para la regulación de una planta de primer orden.

El diseño de los parámetros del controlador IP requiere trabajo algebraico y reducción de bloques. El diagrama de la Fig. 5.13 puede simplificarse para obtener el diagrama de la Fig. 5.14(a). Resolviendo el lazo interno se llega a la Fig. 5.14(b).

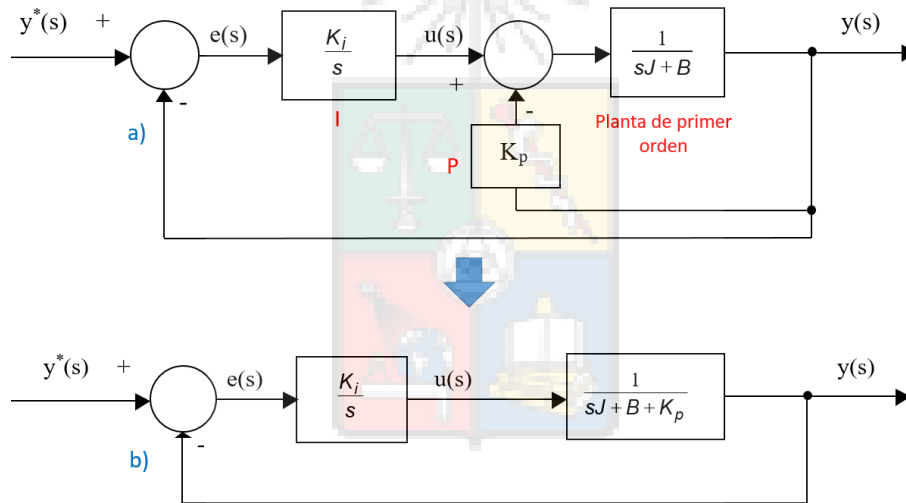


Figura 5.14: Controlador IP para la regulación de una planta de primer orden. a) digrama equivalente al de la Fig. 5.13. b) representación del sistema IP como el típico lazo de control de una entrada, una salida (SISO)

Finalmente la relación entrada salida puede escribirse como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_i}{Js^2 + (B + K_p)s + K_i} \quad (5.15)$$

Ecuación (5.15) muestra la principal ventaja del controlador IP. A pesar de que se considera una constante proporcional y un integrador en el diagrama de control de la Fig. 5.13, no existe un cero de lazo cerrado (en este caso en el numerador de (5.15)).

Manipulando el denominador de (5.15), se despejan los parámetros del sistema de segundo orden los cuales son:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_i}{J}} \quad (5.16)$$

$$\zeta = \frac{B + K_p}{2\sqrt{JK_i}} \quad (5.17)$$

Es decir se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas (K_i y K_p). Como se mencionó anteriormente, cuando se utiliza el controlador IP se eliminan los ceros de lazo cerrado, reduciendo los sobrepasos, pero la posición de los polos de lazo cerrado puede ser sensible a los cambios en los parámetros. Por ejemplo, el aumento en el valor de la inercia J , disminuirá la frecuencia natural ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ζ . Sensibilidad ante los cambios de parámetros es una de las características de los controladores IP.

El controlador IP se ha propuesto para plantas de primer orden y en ese caso su diseño es realizable fácilmente. Sin embargo, como ya se ha mencionado anteriormente en este apunte, el diseño algebraico se complica cuando se utilizan plantas o sistemas de alto orden. MATLAB, en su herramienta RLTOOL contempla el diseño de controladores IP, pero no la he utilizado ya que las pocas veces que he utilizado IP ha sido para aplicaciones sencillas de primer orden, lazos de control de corriente en máquinas por ejemplo.

5.6. Compensación en el lazo de realimentación

Existe otra forma de que el cero del compensador no se encuentre muy cerca de los polos dominantes de lazo cerrado. Se pueden ubicar los ceros del controlador, u otra parte de éste, en el lazo de realimentación (ver Fig. 5.15). En mi área de trabajo, electrónica de potencia y control de máquinas eléctricas, este tipo de compensación se utiliza poco. Sin embargo, dado que es importante entender que el controlador podría estar ubicado en cualquier parte de la función de transferencia a lazo abierto, $G(s)H(s)$, se discute este tipo de compensación en esta sección.

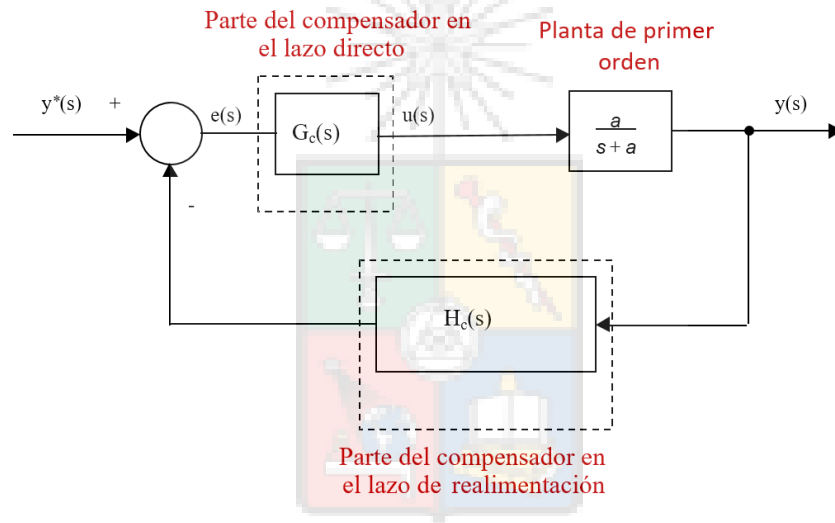


Figura 5.15: Sistema de control con parte del compensador en el lazo de realimentación.

Cuando se efectúa compensación en el lazo de realimentación, una parte o todo el compensador se puede implementar en este lazo. Para el caso del controlador PI , discutido en la sección 5.2, el cero del controlador se puede colocar en el lazo de realimentación, mientras que el integrador se mantiene en el lazo directo. El sistema de control resultante se muestra en la figura 5.16.

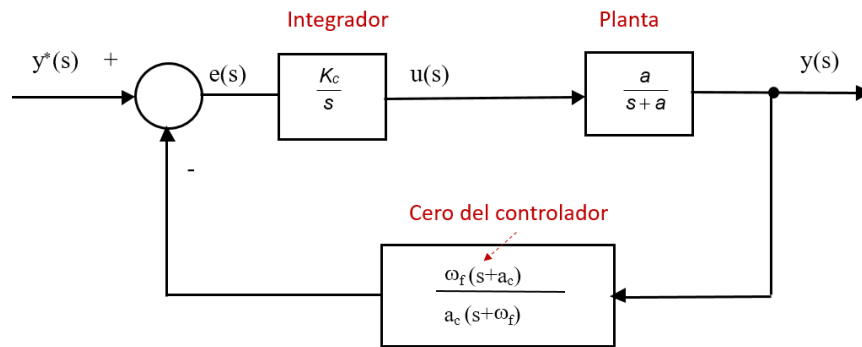


Figura 5.16: Sistema de control incluyendo compensación en el lazo de realimentación.

El cero a_c del controlador se encuentra en el lazo de realimentación. Debido a que no se puede utilizar un cero ideal en una función de transferencia (no es una función propia), el término $(s + a_c)$ es dividido por el polo $(s + \omega_f)$ que hace las veces de filtro en el lazo de realimentación y puede eliminar parte del ruido de alta frecuencia que podría ser amplificado por el cero $(s + a_c)$. Si es posible utilizar un orden de magnitud en la separación entre cero y polo, el polo ω_f del filtro podría estar alejado del cero y de los polos dominantes por un factor de 10 veces. Además, en la Fig. 5.16, la ganancia del lazo de realimentación se ha modificado por el factor ω_f/a_c para obtener valor unitario a la componente continua de la señal de salida (se asume entrada escalón). Esto ya fue explicado en la Sección 2.2.

En el lazo directo de la Fig. 5.16 se encuentra la ganancia del controlador (K_c) y el término integral. El lugar de la raíz correspondiente a la Fig. 5.16, se muestra en la Fig. 5.17. Este lugar de la raíz, en el sector en que se encuentran los polos dominantes, es casi igual al de la Fig. 5.5, con la diferencia de que existe el polo del filtro y que se necesita una ganancia distinta en el controlador para ubicar los polos de lazo cerrado en la posición requerida. Más aún, para una misma planta e idénticos valores de ω_n y ζ , la ubicación del cero a_c debería estar muy cerca del cero del controlador PI mostrado en la Fig. 5.5.

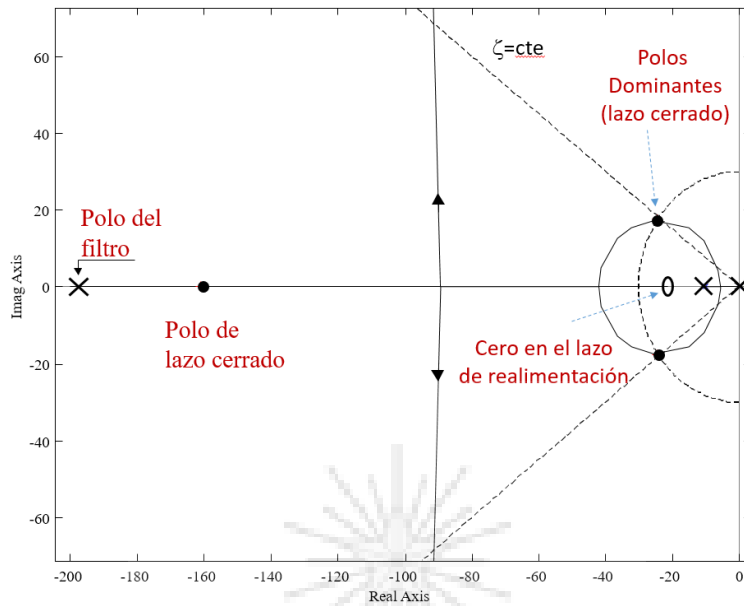


Figura 5.17: Lugar de la raíz correspondiente a un sistema de control donde el cero del compensador se coloca en el lazo de realimentación. En la sección cercana a los polos dominantes el lugar de la raíz es similar al que se obtuvo en la Fig. 5.5

Si la posición de los polos dominantes de lazo cerrado son casi iguales en la Fig. 5.17, con respecto a lo obtenido en la Fig. 5.5, ¿Cuál es el objetivo de utilizar el diagrama de control de la Fig. 5.16?. Al ubicar el cero del compensador en el lazo de realimentación éste ya no aparece como cero de lazo cerrado (más detalles en la Sección 3.4). La función de transferencia a lazo cerrado correspondiente al sistema de control de la Fig. 5.16 (considerando los polos de lazo cerrado mostrados en la Fig. 5.17) es,

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_n^2 \omega_2}{\omega_f} \frac{(s + \omega_f)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \omega_2)} \quad (5.18)$$

Donde el polo ω_2 corresponde al polo de lazo cerrado que se muestra a la izquierda

de la Fig. 5.17. Este polo no es dominante ya que para un sistema bien diseñado, el polo ω_2 se encuentra alejado del origen.

En (5.18) el único cero de lazo cerrado corresponde al polo de la función de realimentación $H(s)$. Debido a que el polo del filtro se encuentra suficientemente alejado, es razonable asumir que al colocar los ceros del controlador en el lazo de realimentación el sobrepaso disminuye a veces significativamente. Esto se debe a que el cero del controlador, habitualmente ubicado en una posición más cercana a los polos dominantes, ya no se encuentra en el numerador de la función de lazo cerrado de (5.18).

5.6.1. Comentarios Acerca de los Distintos Métodos Discutidos Anteriormente

En esta introducción al diseño de controladores se han discutido los siguientes métodos de diseños aplicables a una planta de primer orden.

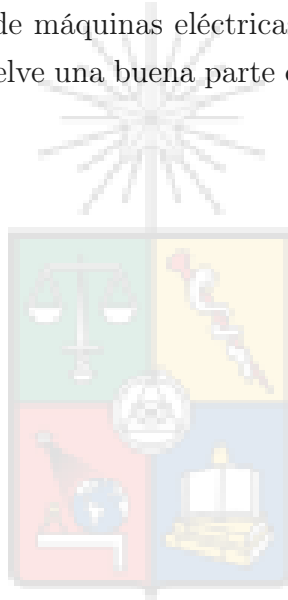
1. Compensador PI.
2. Compensador por Cancelación.
3. Compensador IP.
4. Compensador en el lazo de realimentación.

Todos estos métodos tienen ventajas y desventajas. El PI tiene un cero que amplifica el sobrepaso. El IP es más sensible a la variación de los parámetros de la planta. El compensador por cancelación puede tener mal comportamiento en la

presencia de polos que se mueven en un amplio rango en la planta. Finalmente el controlador con parte del compensador implementado en el lazo de realimentación, tiene la desventaja de que el ruido de la medición podría ser amplificado.

El que todos los controladores tengan problemas, no significa que no deban ser utilizados. No existe el controlador perfecto, solo controladores que funcionan mejor que otros en algunas aplicaciones.

De los controladores discutidos en esta sección, el más utilizado en parte de mi área de trabajo (control SISO de máquinas eléctricas y convertidores de potencia) es el PI. Un PI bien diseñado resuelve una buena parte de los problemas que existen en esta área.



Capítulo VI

DISEÑO DE COMPENSADORES I



Diseño de Compensadores I

6.1. Controladores *Tradicionales*

Los controladores utilizados mas frecuentemente en forma industrial son los controladores proporcional (P), proporcional integral (PI) y el proporcional integral derivativo (PID). Estos controladores se pueden explicar en mejor forma tomando en cuenta el lazo de control que se muestra en la Fig. 6.1.

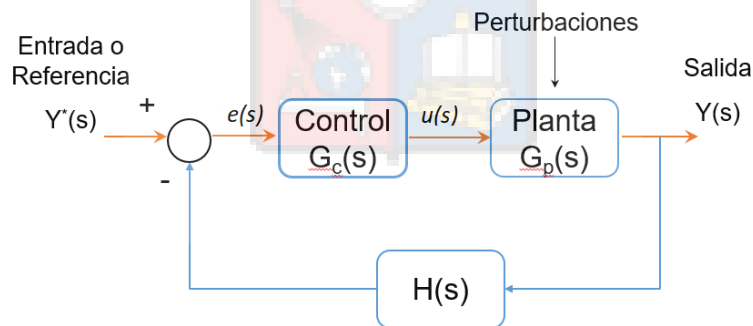


Figura 6.1: Típico lazo de control ya discutido en los capítulos anteriores.

El controlador proporcional tiene la forma mostrada en la ecuación

$$u(s) = K_p e(s) \quad (6.1)$$

El controlador proporcional es simple de implementar pero no considera más elementos. Por lo tanto no es posible agregar polos en el denominador para cumplir con el principio del modelo interno, y obtener cero error en estado estacionario para una entrada predeterminada.

El controlador proporcional no cambia el lugar de la raíz (a menos que se utilice ganancia negativa). Por lo tanto se utiliza generalmente para cumplir con la condición de módulo y ubicar los polos de lazo cerrado sin modificar el lugar de la raíz existente.

Como ya se ha discutido extensamente en el apunte anterior, el controlador *PI* utiliza un polo en el origen. La función de transferencia para un controlador *PI* puede escribirse como se indica en la ecuación (6.2).

$$u(s) = K_p e(s) + \frac{1}{T_i s} e(s) \quad (6.2)$$

Las características de este controlador ya han sido discutidas anteriormente. El *PI* tiene dos grados de libertad, la posición del cero y el valor de la ganancia.

6.1.1. Controlador PID

Existe otro controlador que es utilizado extensamente en forma industrial y que engloba al P y al PI. Este es el controlador proporcional integral derivativo (PID), el cuál fue propuesto en 1922, por el ingeniero (ruso y estadounidense) Nicolás Minorsky, para aplicaciones navales. El controlador PID ideal puede representarse por la ecuación (6.3) como:

$$u(s) = \left(K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(s) \quad (6.3)$$

Se debe tener presente que el PID ideal de (6.3) no es una función propia y habitualmente se implementa utilizando un polo extra en el denominador. Este controlador tiene tres grados de libertad, K_p , T_i y T_d , **lo que permite colocar dos ceros en cualquier lugar del plano complejo**, más un polo en el origen. Manipulando (6.3), la función de transferencia puede escribirse como:

$$u(s) = K_p \frac{(s^2 + as + b)}{s} \quad (6.4)$$

Donde a y b son ajustados variando la constante de tiempo integral y derivativa. La principal ventaja de un controlador PID es que puede ser utilizado para compensar plantas con polos complejos mal amortiguados. Suponiendo una planta cuya función de transferencia es dada por (6.5),

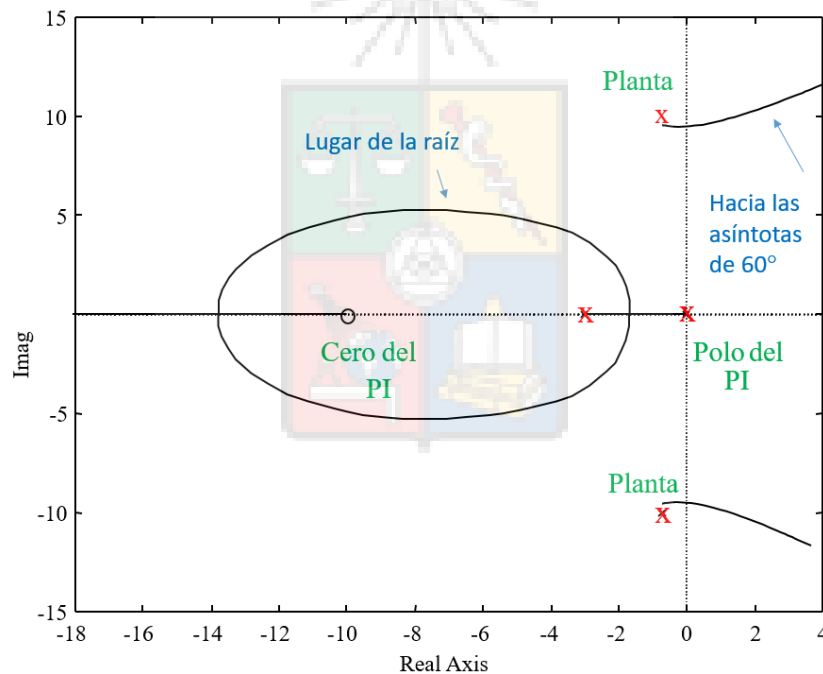


Figura 6.2: Diagrama de lugar de las raíces correspondiente a un controlador PI siendo utilizado con la planta mostrada en la ecuación (6.5). Se asume realimentación unitaria.

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)(s^2 + 1.4s + 100)} \quad (6.5)$$

Esta planta es difícil de compensar apropiadamente utilizando controladores *PI*. Esto se debe a que no es apropiado compensar polos complejos muy mal amortiguados utilizando solo polos y ceros ubicados en el eje real. Esto se muestra en mayor detalle utilizando el lugar de la raíz mostrado en la Fig. 6.2.

Como se muestra en la Fig. 6.2, los polos complejos tienen muy bajo factor de amortiguamiento y el lugar de la raíz se desplaza hacia el semiplano derecho a través de las asíntotas ubicadas en ± 60 grados, produciendo un sistema inestable a medida que aumenta la ganancia. Si se utiliza un controlador *PID* se puede, por ejemplo,

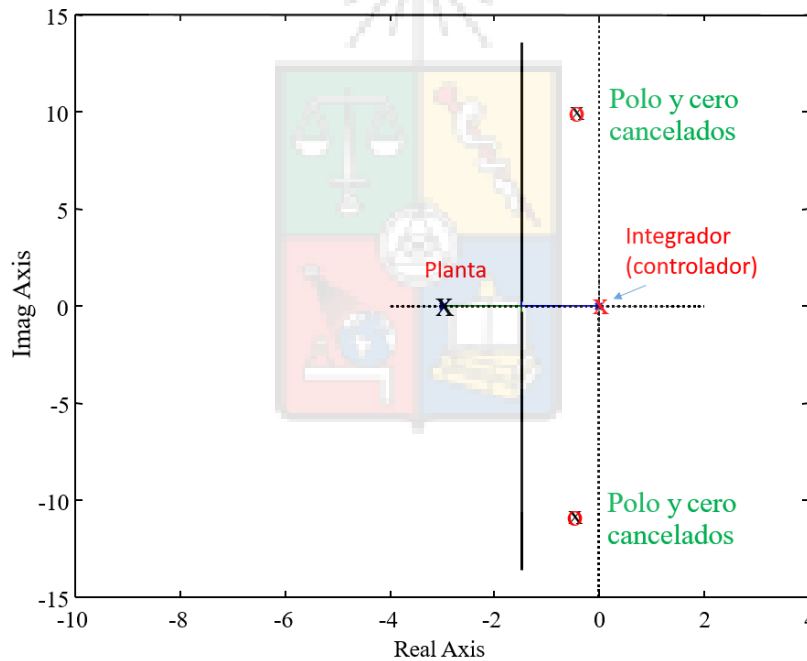


Figura 6.3: Diagrama de lugar de las raíces correspondiente a un controlador *PID* siendo utilizado con la planta mostrada en la ecuación (6.5). Se asume realimentación unitaria.

cancelar los polos inestables obteniéndose el lugar de la raíz mostrado en la Fig. 6.3.

El *PID* utilizado tendría la función de transferencia mostrada en (6.6). Como ya se mencionó anteriormente, ésta no es una buena elección de controlador debido a que el numerador tiene mayor grado que el denominador. Si se implementara un controlador como éste, su ganancia en el dominio de la frecuencia sería la mostrada en la Fig. 6.4 y tendería a ∞ para altas frecuencias.

$$G_c(s) = K_p \frac{(s^2 + 1.41s + 100)}{s} \quad (6.6)$$

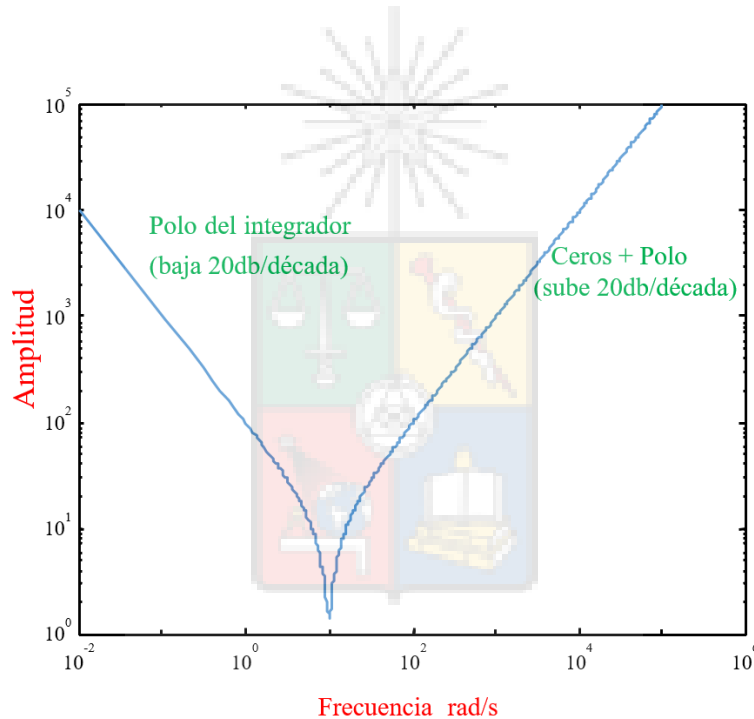


Figura 6.4: Respuesta de frecuencia del controlador PID ideal mostrado en la ecuación (6.6). Nótese que el ruido de alta frecuencia existente en el sistema de control, podría ser considerablemente amplificado utilizando este compensador.

Colocando un polo extra a lazo abierto, relativamente alejado de los polos dominantes no se afecta mayormente el lugar de la raíz pero se reduce considerablemente la amplificación en alta frecuencia. Esto se muestra en la ecuación

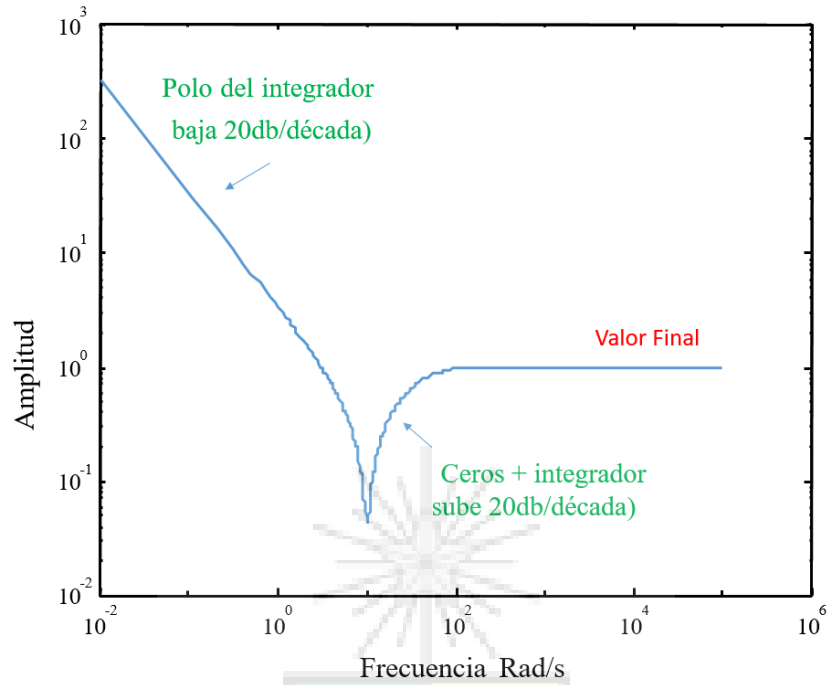


Figura 6.5: Respuesta de frecuencia del controlador PID + polo extra mostrado en la ecuación (6.6).

(6.7) y la Fig. 6.5.

$$G_c(s) = K_p \frac{(s^2 + 1.41s + 100)}{s(s + 30)} \quad (6.7)$$

La ganancia K_p en (6.7), no es igual a la ganancia utilizada en (6.6) y se debe ajustar para considerar el término extra $(s + 30)$ colocado en el denominador de esta ecuación (esto es simple de hacer utilizando la condición de módulo). La respuesta de frecuencia del controlador de (6.7) se muestra en la figura 6.5.

Generalizando (6.7), la función de transferencia de un *PID* real es mostrada

en la ecuación (6.8). Los coeficientes a y b son utilizados para ubicar ceros en cualquier punto del plano complejo $s = \sigma + j\omega$. El integrador entrega cero error en estado estacionario a entrada escalón y el polo en $s = -c$ se utiliza para reducir la amplificación de las señales de alta frecuencia, lo cual se muestra gráficamente en la Fig. 6.5. Finalmente la ganancia K_p se utiliza para cumplir con la condición de módulo en el punto de diseño [ver (3.13)].

$$G_c(s) = K_p \frac{(s^2 + as + b)}{s(s + c)} \quad (6.8)$$

6.1.2. Comentarios Acerca del Diseño Realizado

1. El estudiante debe tener presente que cancelar polos complejos muy mal amortiguados, podría no ser una buena opción si la cancelación es imperfecta o los polos mal amortiguados se mueven de acuerdo al punto de operación del sistema a controlar. En ese caso se tendría en la función de transferencia a lazo cerrado, raíces complejas con bajo ζ que podrían producir oscilaciones indeseadas a la salida del sistema.
2. Alternativamente, los ceros complejos del PID pueden ser utilizados para atraer el Lugar de las Raíces de los polos mal amortiguados hacia el semiplano izquierdo, a una posición con un mayor valor de ζ .
3. Cuando utilice un PID recuerde que **no se pueden cancelar polos de lazo abierto que estén ubicados en el semiplano derecho.**
4. Mejor aún, recuerde que al utilizar cancelación de cualquier forma, Con PI, PID o las mallas de adelanto/atraso que veremos después, no se pueden cancelar polos o ceros que se encuentren en el semiplano derecho. Esto ya se discutió anteriormente en el Kindergarten de Diseño, Sección 5.3, pero no está de más

repetirlo ya que es un error que se produce con cierta frecuencia (incluso en exámenes finales).

6.2. Compensación en Cascada

Hasta el momento el alumno podría tener la impresión equivocada que los únicos compensadores que existen son el P , PI y PID ; esto no es exacto. Aunque los controladores simples son siempre los mejores, al menos en teoría, no existen límites al momento de implementar un compensador y se pueden implementar controladores con muchos ceros y polos (inteligentemente ubicados por supuesto). En general los elementos de compensación que se utilizan habitualmente para implementar controladores, se dividen en:

- Redes en atraso (lag).
- Redes en adelanto (lead).
- Redes en atraso-adelanto, adelanto-atraso (lag-lead, lead-lag).



El concepto de redes de adelanto o atraso se deriva de la condición de ángulo del lugar de la raíz, y se utiliza también al diseñar compensadores utilizando métodos de respuesta de frecuencia como los Diagramas de Bode. Suponga que usted necesita que los polos de lazo cerrado se encuentren en un punto $s_{12} = -\sigma_x \pm j\omega_x$ en el plano s , pero no se cumple la condición de ángulo, es decir s_{12} no es lugar de la raíz y por lo tanto no puede ser polo de lazo cerrado. Esto se muestra en la figura 6.6 donde el punto de diseño no forma parte del lugar de la raíz. En este caso la condición de

ángulo se puede escribir como:

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pm 180^\circ - \Delta\theta \quad (6.9)$$

Donde $\Delta\theta$ es un ángulo arbitrario pertenecientes a $\Re$ y que puede tomar valores positivos o negativos. Para lograr que el punto de diseño forme parte del lugar de la raíz, se debe cambiar la ecuación (6.9) a (6.10).

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \Delta\theta = \pm 180^\circ \quad (6.10)$$

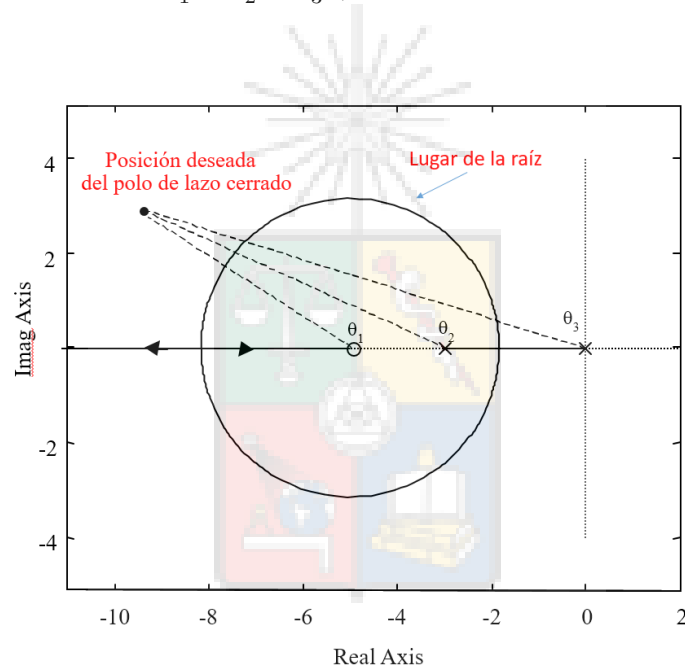


Figura 6.6: Lugar de la Raíz donde la condición de ángulo no se cumple para el punto de diseño

Por lo tanto se debe agregar a la Fig. 6.6 polos y ceros adicionales para lograr que en el punto de diseño se agregue una fase adicional de $\Delta\theta$. Por ejemplo, se puede agregar al sistema una malla compuesta de un polo y un cero de la forma:

$$G_c(s) = K_L \frac{(s + a)}{(s + b)} \quad (6.11)$$

Donde la ganancia K_L es opcional y entrega un grado adicional de libertad a la malla; a menos que se indique lo contrario, se asume que $K_L > 0$.

Si la fase de la malla (6.11) en el punto s_{12} , es igual a $\Delta\theta^\circ$ se debería cumplir:

$$\text{ángulo} \left(K_L \frac{(s + a)}{(s + b)} \right) = \text{atan}[\omega_x/(a - \sigma_x)] - \text{atan}[\omega_x/(b - \sigma_x)] = \Delta\theta \quad (6.12)$$

Es decir la inclusión de la malla de (6.11), en el lugar de la raíz mostrado en la Fig. 6.6, lograría que el punto de diseño cumpla con la condición de ángulo si es que la combinación de polos y ceros entrega el $\Delta\theta$ requerido. El siguiente paso sería sintonizar la ganancia del sistema para que cumpla con la condición de módulo y eso es fácil de realizar utilizando la ganancia del controlador u otras.

Si el ángulo entregado por (6.12) es positivo, es decir el ángulo del cero es mayor que el ángulo del polo, se denomina la red como red en adelanto" (o *lead*). De lo contrario es una red en atraso (*lag*).

6.3. Redes en atraso-adelanto

6.3.1. Red en Adelanto

La malla en adelanto tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = A \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \quad (6.13)$$

Donde $\alpha < 1$. La nomenclatura utilizada en (6.13) es la utilizada típicamente en los libros de control (D'azzo and Houpis y Ogata por ejemplo), pero la ecuación (6.13) es idéntica a (6.12) con $b < a$. La fig. 6.7 muestra la implementación típica de una malla en adelanto donde el ángulo $\theta_z > \theta_p$. La posición del cero es más cercana al origen que la posición del polo.

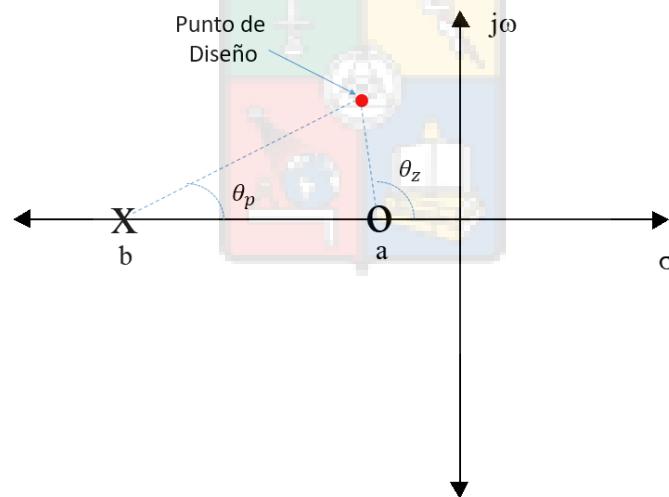


Figura 6.7: Implementación típica de una red en adelanto.

6.3.2. Red en Atraso

La función de transferencia de una malla en atraso es la misma que la anterior [ver (6.13)], pero en este caso $\alpha > 1$. En la malla en atraso, la posición de polo es más cercana al origen que la del cero. Esto se muestra en la Fig. 6.8.

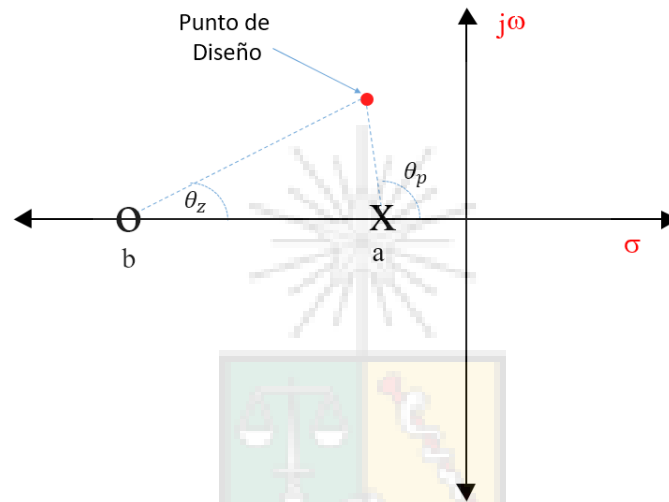


Figura 6.8: Implementación típica de una red en atraso.

6.3.3. Método de la Bisectriz

Típicamente la malla en adelante mejora las características dinámicas de un sistema de control y la malla en atraso mejora las características de estado estacionario. Por ejemplo, de la Fig. 6.8 se puede concluir que un controlador PI es un caso especial de una malla en atraso.

En las mallas en adelante se debe tener cuidado de no separar excesivamente el polo del cero, ya que como se ha discutido anteriormente, un cero ideal amplifica el

ruido de alta frecuencia, por lo tanto se debería utilizar un polo cercano para reducir la amplificación del ruido de forma similar a lo realizado con el controlador PID [ver Fig. 6.5 y (6.7)]. Por este motivo se aconseja utilizar como máximo un orden de magnitud entre la posición del cero y la del polo; esto podría ser no aceptable debido al nivel de ruido de medición, o la magnitud del sobrepaso que puede existir en el sistema. En algunos casos podría ser más conveniente utilizar varias mallas de adelanto, con una separación razonable entre cero y polo, que utilizar una sola malla que logre un mayor ángulo $\Delta\theta$, pero con una muy alta separación entre ambos elementos.

En la malla en atraso, un polo muy cerca del origen mejora el error en estado estacionario para algunas entradas, pero tiene un efecto desestabilizante, moviendo los polos de lazo cerrado hacia el semiplano derecho. Por este motivo también se aconseja no separar más allá de lo necesario el polo del cero.

Uno de los problemas de las mallas de atraso y en adelanto es donde ubicar los polos y ceros, ya que existen varias posiciones en el eje real que podrían entregar el mismo ángulo $\Delta\theta$ requerido. Al respecto la literatura aconseja varios métodos, dos de los cuales son:

- Si la función de transferencia de una malla de adelanto o de atraso se puede representar como:

$$G_c(s) = K_L \frac{(s + a)}{(s + b)} \quad (6.14)$$

Entonces utilice cancelación de polos o ceros para fijar el valor de uno de los elementos, ya sea a o b . En los sistemas tipo cero se aconseja cancelar el polo más cercano al origen de $G(s)H(s)$, para mejorar la dinámica. Al efectuar cancelación se fija el valor de uno de los elementos de la malla (polo o cero) y es relativamente fácil encontrar la posición del otro elemento para lograr el ángulo $\Delta\theta$ requerido.

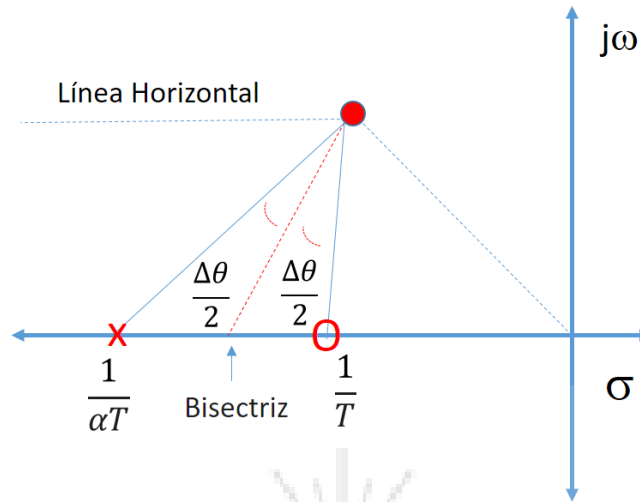


Figura 6.9: Método de la bisectriz, el cual minimiza la separación entre el polo y el cero de una malla en adelante.

- El segundo método es el de la bisectriz el cual se muestra en la Fig. 6.9 y que se propone en la literatura para diseñar mallas en adelante, aunque en principio es también utilizable para mallas en atraso. La ventaja del método es que maximiza el valor de α utilizado en la ecuación (6.13) (recuerde que $\alpha < 1$ para una red en adelante). Por lo tanto, para un ángulo $\Delta\theta$, el método de la bisectriz minimiza la separación entre el polo y el cero de la malla en adelante. El método es simple y utiliza tres líneas principales. Una línea entre el punto de diseño y el origen del plano s , otra línea horizontal, paralela al eje real y finalmente una bisectriz entre ambas. El polo y el cero se muestran a ambos lados de la bisectriz y tienen un ángulo de $\frac{\Delta\theta}{2}$ respecto a ésta (ver Fig. 6.9).

6.3.4. Diseño de un Compensador en Adelanto Utilizando el Método de la Bisectriz

Es muy fácil diseñar un compensador utilizando el método de la bisectriz, a partir del coeficiente de amortiguamiento del punto de diseño. Utilizando $\phi = \text{acos}(\zeta)$, el valor de todos los ángulos formados en el triángulo compuesto por la bisectriz y la línea que une el origen con el punto de diseño, se muestra en la Fig. 6.10(a), con el ángulo de compensación denotado como $\Delta\theta$. Finalmente, es relativamente simple demostrar que el ángulo que contribuye el cero en la red de compensación es igual a $\theta_z = 90 - \phi/2 + \Delta\theta/2$ y el ángulo del polo es a $\theta_p = 90 - \phi/2 - \Delta\theta/2$. El punto $P = \sigma_x \pm \omega_x$ es el punto de diseño.

Utilizando los ángulos θ_z y θ_p , y denotando la posición del polo y cero como L_p y L_z , se llegan a las siguientes ecuaciones para el cálculo de la posición de los elementos en la red de compensación:

$$\tan(\theta_z) = \frac{\omega_x}{L_z - \sigma_x} \Rightarrow L_z = \sigma_x + \frac{\omega_x}{\tan(\theta_z)} \quad (6.15)$$

$$\tan(\theta_p) = \frac{\omega_x}{L_p - \sigma_x} \Rightarrow L_p = \sigma_x + \frac{\omega_x}{\tan(\theta_p)} \quad (6.16)$$

Con las ecuaciones (6.15) y (6.16) es muy simple diseñar la red de compensación requerida para inyectar un ángulo $\Delta\theta$ en el punto de diseño P .

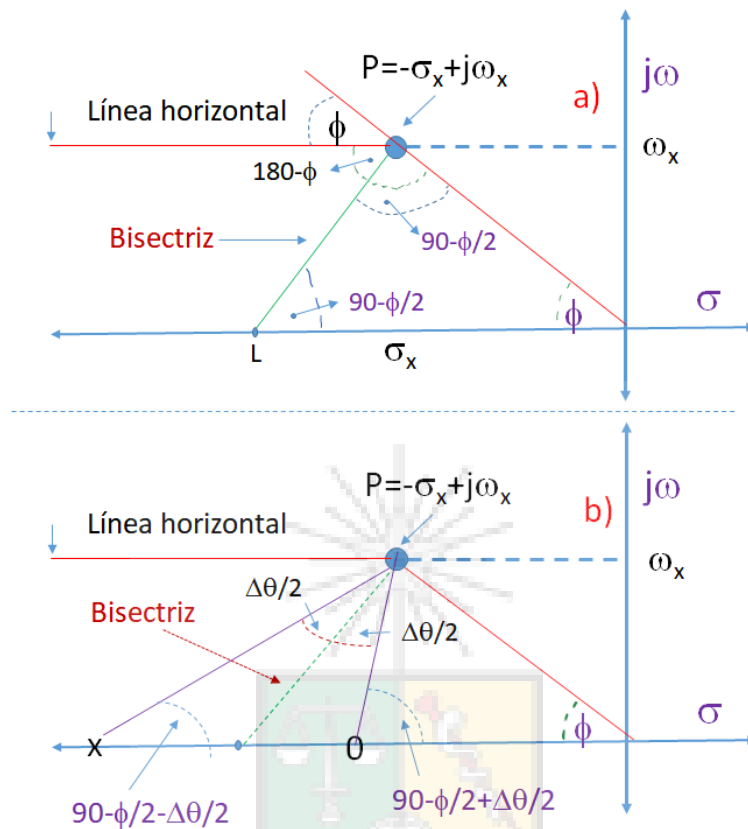


Figura 6.10: Ángulos utilizados en el método de la bisectriz. a) Valor de los ángulos antes de considerar la malla en adelante. b) Valor de los ángulos requeridos para calcular la posición del polo y del cero de la malla en adelante.

6.4. Un Simple Ejemplo de Aplicación de Redes en Atraso-Adelanto

La compensación adelanto-atraso y atraso-adelanto se utiliza en algunos sistemas donde una sola malla no es suficiente para cumplir con las condiciones de lazo cerrado. En este tipo de compensación se utiliza, por ejemplo, una malla en atraso (o varias)

para mejorar el error en estado estacionario y luego una malla en adelante (o varias) para mejorar las características dinámicas del sistema a lazo cerrado. Esto se muestra con un ejemplo.

Se tiene la planta de (6.17) que debe ser controlada para entregar cero error en estado estacionario a entrada escalón, frecuencia natural superior a 20 rads/seg y $\zeta = 0.8$.

$$G(s) = \frac{10}{(s+3)(s+6)} \quad (6.17)$$

Para cumplir con la condición de cero error en estado estacionario se puede incluir en cascada con la planta un controlador PI diseñado utilizando cancelación. La forma de este controlador es:

$$G_{lag}(s) = K_p \frac{s+3}{s} \quad (6.18)$$

Con esta malla se cancela el polo más lento del sistema pero no se puede alcanzar la frecuencia natural con el coeficiente de amortiguamiento especificado. Para lograr los polos de lazo cerrado especificados se necesita añadir una malla en adelante cuya función de transferencia es mostrada en (6.19).

$$G_{lead} = \frac{s+6}{s+32} \quad (6.19)$$

El lugar de la raíz resultante que considera la planta mas las redes de atraso y adelante se muestra en la Fig. 6.11. Con esta última malla se logra que el punto de diseño sea Lugar de la Raíz. Utilizando la herramienta Rltool de Matlab, se obtiene la ganancia del controlador ($K_p=40$). El controlador final propuesto corresponde a

la función de transferencia de (6.20).

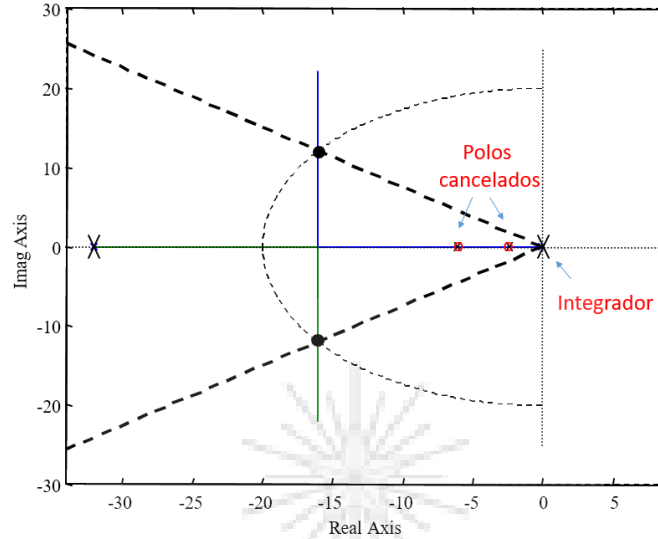


Figura 6.11: Diagrama del lugar de la raíz de la planta mostrada en (6.17) más un compensador que incluye las mallas de atraso y adelanto requeridas para lograr el punto de diseño.

$$G_c(s) = 40 \frac{(s + 6)(s + 3)}{(s + 32)s} \quad (6.20)$$

Para simular el desempeño del controlador propuesto, se utiliza el modelo Simulink mostrado en la Fig. 6.12. La entrada escalón unitario se aplica en el tiempo $t=0.1s$.

La respuesta del sistema de control se muestra en la Fig. 6.13. Como se muestra en esta figura, la respuesta es adecuada, con un tiempo de establecimiento menor a 0.4 seg. y bajo sobrepaso, ya que los ceros utilizados en el compensador han sido cancelados por los polos de la planta.

Algunos comentarios acerca de este ejemplo. Cancelación de polos y ceros

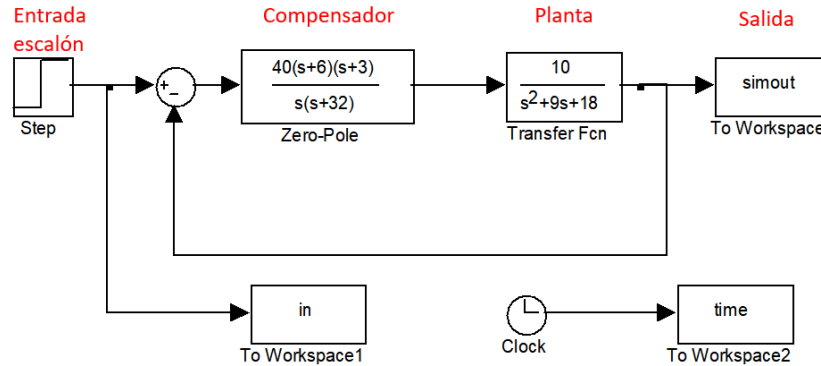


Figura 6.12: Modelo en Simulink, que permite evaluar el desempeño del compensador mostrado en la ecuación (6.20)

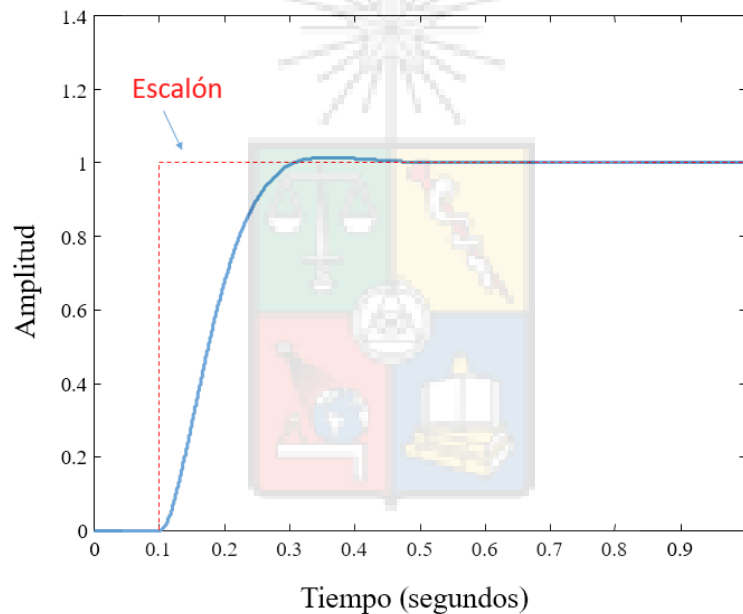


Figura 6.13: Respuesta en el tiempo correspondiente al Modelo en Simulink de la Fig. 6.12

utilizando redes de adelanto y atraso en cascada, es una herramienta poderosa que podría hacernos olvidar los límites físicos de un sistema de control. En este ejemplo se han eliminado completamente los polos de la planta y colocado otros en

el compensador. Antes de realizar esto se debería verificar lo siguiente.

- Se debería verificar primero si existen controladores simples (un PI por ejemplo) que cumpla con las especificaciones de diseño. Los controladores que tienen mayor complejidad, son más difíciles de implementar, requieren más líneas de código y tiempo de procesamiento. Probablemente el tiempo de procesamiento no es un problema con las poderosas plataformas de control existentes en la actualidad, pero aún existen sistemas eléctricos que requieren un tiempo muy reducido para implementar el controlador (del orden de decenas de μS).
- Los polos y ceros de la planta usualmente se mueven y cambian su posición. Si se utiliza cancelación de varios elementos, siempre verifique que es lo que sucederá si existen polos móviles y cual es el peor caso esperable.
- Ruidos. Implementar varios ceros en un controlador podría amplificar ruidos que se propaguen hacia algún elemento del lazo de control, por ejemplo el actuador.

6.4.0.1. Mallas de Segundo Orden

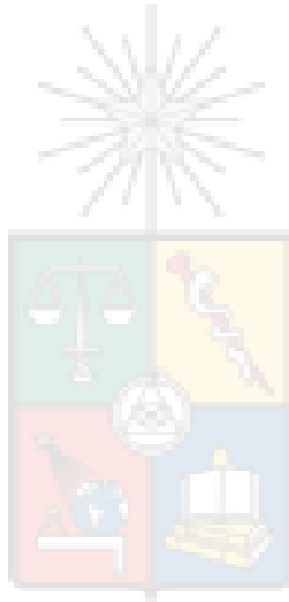
A pesar de que es poco discutido en la literatura, es posible utilizar mallas de compensación de segundo orden, de la forma en que se muestra en la ecuación (6.21),

$$G_{lead-lag} = K_n \cdot \frac{s^2 + 2\zeta_z\omega_z + \omega_z^2}{s^2 + 2\zeta_p\omega_p + \omega_p^2} \quad (6.21)$$

Donde el subíndice z se utiliza para los ceros y el subíndice p para los polos. La ventaja de utilizar una malla de segunda orden es similar a la ventaja que tiene

el controlador PID sobre el PI. Es posible compensar de mejor forma sistemas que tienen polos o ceros complejos mas amortiguados.

Infortunadamente no es simple diseñar mallas de adelanto a atraso sin utilizar herramientas computacionales como MATLAB y SIMULINK. Un ejemplo del uso de una malla en atraso para compensar un sistema con entrada de referencia sinusoidal se encuentra en la Sección [9.3.1](#).



Capítulo VII

DISEÑO SIN COMPUTADOR



Diseño de Compensadores Utilizando Gráficos y Calculadora

7.1. Introducción

En esta sección se resolverán algunos ejercicios y controles realizados con anterioridad en esta asignatura. Para el diseño de los compensadores se utilizará una calculadora (no programable) y los diagramas del Lugar de la Raíz.

Los controles y exámenes que se resolverán en esta sección han sido editados y/o cambiado. Esto para evitar preguntas similares, o para ilustrar varias soluciones posibles a una misma pregunta, como por ejemplo utilizando cancelación o el método de la Bisectriz.

¿Porque no utilizar Matlab?. Este tipo de programas tienen todo implementado y no es necesario conocer con mayor detalles la teoría y los conceptos detrás de los métodos de diseño. Para lograr entender los conceptos, que en este caso son muy simples, es mejor hacer todo desde abajo. De lo contrario, si el computador hace todo, no se entiende lo suficiente.

Se seguirá utilizando Matlab y Simulink para obtener algunos gráficos y resultados, solo el diseño se efectuara sin recurrir a software especializado.

7.2. Primer Control 2020

Se analizan dos preguntas de este control en las siguientes subsecciones.

7.2.1. Primera Pregunta

La primera pregunta es similar a parte del control realizado en el año 2021 pero a mi juicio ésta es más simple. Dado que las preguntas no son exactamente iguales, se resuelven ambas en este apunte.

Dado el sistema de control, que se muestra en la Fig. 7.1

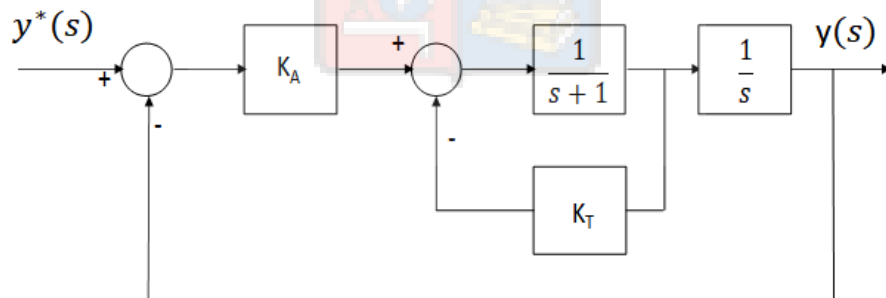


Figura 7.1: Sistema de control utilizado en la primera pregunta

Utilice el método del lugar de la raíz, dibujado a mano alzada pero en forma clara, para responder:

1. Identifique los puntos en el lugar de la raíz donde la respuesta a lazo cerrado no sobrepasará el valor de referencia de entrada (asuma referencia escalón) con mínimo tiempo de establecimiento. Encuentre el valor de K_T en función de K_A en esos puntos. Explique las condiciones de módulo y ángulo que utiliza durante el desarrollo.
2. Repita el análisis anterior, pero considerando ahora que es necesario obtener un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$ en la respuesta de lazo cerrado. Explique las condiciones de módulo y ángulo que utiliza durante el desarrollo.

7.2.1.1. Resolución 1.

Se debe tener en cuenta que en este problema no se puede ignorar el lazo interno, utilizando las técnicas que se discuten más adelante en la sección 8.3. Esto se debe a que no existe ninguna información acerca de los valores que puede tener K_T y por lo tanto no se puede asumir que el lazo interno es muy rápido.

La función de lazo abierto correspondiente a la Fig. 7.1 es mostrado en (7.1).

$$G(s)H(s) = K_A \frac{1}{s + (K_T + 1)} \frac{1}{s} \quad (7.1)$$

el lugar de la raíz correspondiente a (7.1), se muestra en la Fig. 7.2

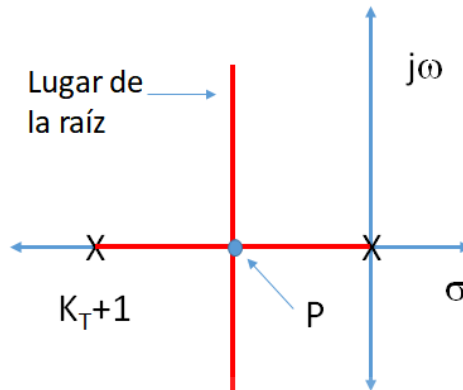


Figura 7.2: Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto mostrada en (7.1)

Para que la respuesta $y(t)$ no sobrepase a la referencia $y^*(t)$ (en un sistema de lazo cerrado con ganancia unitaria cuando $t \rightarrow \infty$), todos los polos de lazo cerrado deben ser reales. Ese conjunto de puntos se muestra con línea sólida en la Fig. 7.3. Se asume que existe un polo de lazo cerrado que se encuentra a una distancia L del origen. Por simetría existe otro polo de lazo cerrado que se encuentra a una distancia $K + 1 - L$ del origen (compruébelo matemáticamente). Aplicando la condición de módulo al polo que se encuentra mas cerca del origen, se puede encontrar el valor de K_A , aplicando (3.13).

$$K_A = L \cdot (K_T + 1 - L) \Rightarrow K_A \in \left[0, \left(\frac{K_T + 1}{2} \right)^2 \right] \quad (7.2)$$

La máxima frecuencia natural que se puede alcanzar en la Fig. 7.2, manteniendo polos puramente reales, corresponde a $\omega_n = (K_T + 1)/2$ y se obtiene cuando $K_A = (K_T + 1)^2/4$. Es decir si $K_A > (K_T + 1)^2/4$, entonces comenzarán a producirse *overshoots* en la respuesta del sistema de control. Esto puede ser comprobado matemáticamente utilizando los procedimientos discutidos en la Sección 3.3.4. Se

sugiere hacerlo.

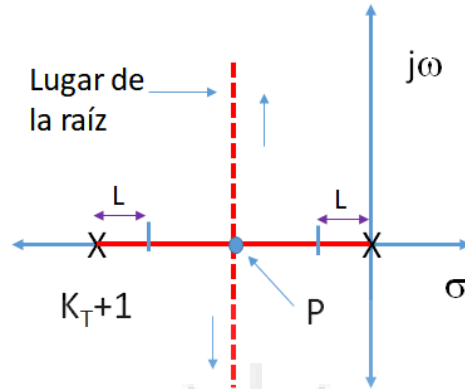


Figura 7.3: Sección del lugar de la raíz donde los polos de lazo cerrado no tienen componente imaginaria.

7.2.1.2. Resolución 2.

Cuando el coeficiente de amortiguamiento es $\zeta=0.707$, el punto de diseño es el que se muestra en la Fig. 7.4. En este caso el punto de diseño se encontraría en $P = [(K_T + 1) \pm j(K_T + 1)]/2$

El nuevo punto de diseño se encuentra ubicada a una distancia $(K_T + 1)/\sqrt{2}$ del origen, es decir $\omega_n = (K_T + 1)/\sqrt{2}$. Utilizando (3.13), se encuentra que la ganancia K_A necesaria para ubicar los polos de lazo cerrado en el punto de diseño P , es $K_A = \frac{(K_T + 1)^2}{2}$.

Esta pregunta era bastante simple y sin embargo, tuvo muy pocas respuestas correctas. Esto se debe a que muchos alumnos al parecer confían demasiado en la tecnología, calculadoras programables bastante potentes en este caso, y no tienen clara la parte conceptual. La tecnología es incapaz de reemplazar el dominio

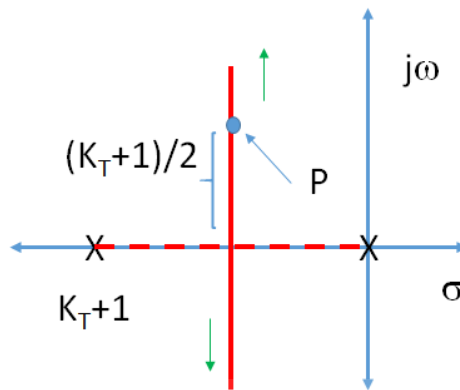


Figura 7.4: Punto de diseño donde se encuentra el coeficiente de amortiguamiento $\zeta=0.707$. Las flechas verdes indican la dirección de aumento de la ganancia.

conceptual.

Como dijo Karl Marx en su momento *La producción de demasiadas cosas útiles en una sociedad puede producir demasiadas personas inútiles*. Probablemente ésta es una frase un poco peyorativa, pero retrata de alguna forma lo que sucede cuando el software y hardware disponible nos permiten efectuar muchos procesos en forma mecánica y sin entender nada de ellos.

7.2.2. Segunda Pregunta

En un sistema de control se tiene una planta con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{5}{(s + 5.1)(s - 5)} \quad (7.3)$$

Debido a problemas de costo, el compensador debe considerar cuatro elementos (polos o ceros) como máximo. Estos cuatro elementos deben dividirse en dos mallas de compensación, siendo una de ellas, obligatoriamente, una malla de adelanto de la

siguiente forma:

$$G_{lead} = \frac{s + z_y}{s + 50 + z_y} \quad (7.4)$$

El sistema debe ser diseñado para cero error en estado estacionario, entrada escalón, frecuencia natural de $5\sqrt{2}$ rad/seg, y coeficiente de amortiguamiento de 0.707. Al menos uno de los polos de la planta debe ser eliminado utilizando compensación por cancelación. Se pide:

1. Dibuje el lugar de la raíz del sistema sin compensar. ¿Cuáles serían los rangos de ganancia en un controlador puramente proporcional (sin considerar otras mallas) que permitirían operar con un sistema estable a lazo cerrado? Justifique su respuesta.
2. Plantee un sistema de compensación, considerando la malla de (7.4), que permita obtener la frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento solicitados en las especificaciones del problema.
3. ¿Cuántos polos de lazo cerrado existen y cuál/cuáles son los dominantes?. Justifique su respuesta apropiadamente.
4. El ingeniero a cargo de la implementación se equivoca y programa una malla en adelante que tiene el polo fijo en 40 como se muestra en (7.5).

$$G_{lead} = \frac{s + z_y}{s + 40} \quad (7.5)$$

¿Cuál es ahora la condición de ángulo en el punto de diseño?. ¿Es posible cumplir con las especificaciones de ω_n y ζ moviendo solo el cero ubicado en z_y ?

5. Repita el punto anterior, en que se compensaba el efecto de la malla incorrectamente diseñada de (7.5), pero utilizando ahora el método de la bisectriz.

7.2.2.1. Resolución 1.

. Se utilizará el método de Routh para encontrar la ganancia crítica. La ecuación característica de la función de lazo abierto de (7.3) (considerando una ganancia K en el numerador) es:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{5K}{(s + 5.1)(s - 5)} = s^2 + 0.1s - 25.5 + 5k = 0 \quad (7.6)$$

De acuerdo al criterio de Routh, para que todos los polos estén en el semiplano izquierdo, se debe cumplir que $5K - 25.5 > 0$ por lo tanto $K > 5.1$ produce un sistema estable. Este valor también se puede obtener utilizando las condiciones de módulo y ángulo del lugar de la raíz; esto se realiza para el primer problema del primer control 2021, en la sección 7.4.1.

El lugar de la raíz de la función de transferencia de (7.3) es el típico de una sistema de dos polos (sin ceros) y ganancia positiva tal como se muestra en la Fig. 7.5. Este lugar de la raíz ya fue discutido en la sección 3.3.8.

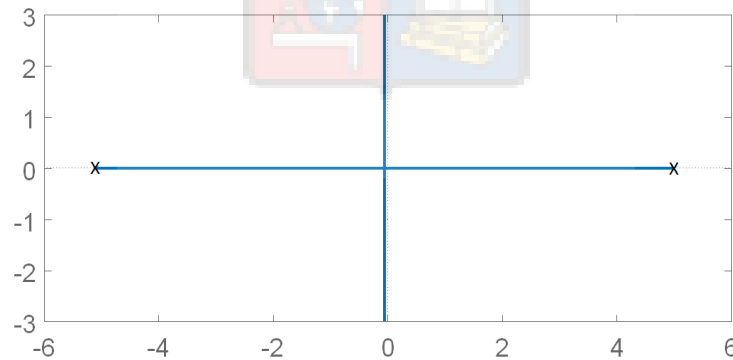


Figura 7.5: Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto (7.3). Las asíntotas verticales están centrada en $s = 0.1$.

7.2.2.2. Resolución 2

. De acuerdo a las especificaciones del problema, se debe utilizar la malla de compensación de (7.4) para modificar el lugar de la raíz de la Fig. 7.5 y poder alcanzar el punto de diseño especificado. Si se aplica cancelación, entonces z_y debe tomar el valor $z_y = 5.1$. La malla de (7.4) queda con los valores mostrados en (??)

$$G_{lead} = \frac{s + 5.1}{s + 55.1} \quad (7.7)$$

Ya se ocuparon dos elementos del compensador. Dado que se requiere cero error en estado estacionario a entrada escalón, los otros dos elementos se eligen para conformar un controlador PI. Como ya se mencionó anteriormente, el PI es una malla lag con la función de transferencia de (7.8).

$$G_{lag} = \frac{K_p(s + a_z)}{s} \quad (7.8)$$

Considerando la planta y los elementos de compensación, se aplica la condición de ángulo para obtener la posición del cero del PI. El punto de diseño es $s_{12} = -5 \pm j5$. La Fig. 7.6 muestra la planta y los elementos de compensación (sin incluir el polo y cero cancelado); el problema es muy simple de solucionar dado que existe una sola incógnita, la posición del cero.

Aplicando la condición de ángulo se tiene:

$$\theta_z - [180^\circ - \text{atan}(5/10)] - [180^\circ - \text{atan}(5/5) - \text{atan}(5/55.1)] = \pm 180^\circ \quad (7.9)$$

Resolviendo (7.9) se llega a:

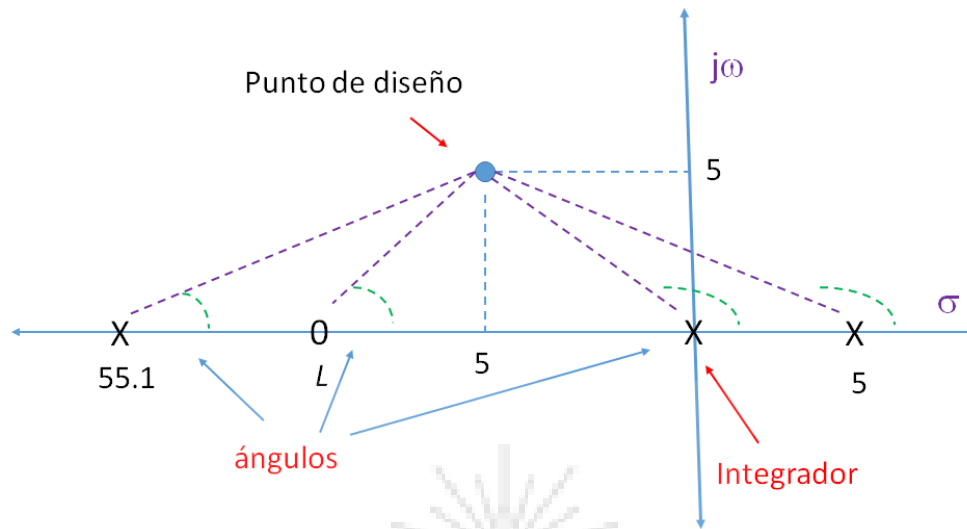


Figura 7.6: Planta y elementos de compensación utilizados para alcanzar el punto de diseño.

$$\theta_z = \text{atan} \frac{5}{(L-5)} = 113.62^\circ \Rightarrow L = 2.8135 \quad (7.10)$$

Utilizando (7.7) y (7.8), el compensador propuesto para lograr el punto de diseño es mostrado en (7.11).

$$G(s)H(s) = K_c \frac{(s + 2.81)}{s} \frac{(s + 5.1)}{(s + 55.1)} \quad (7.11)$$

Donde la ganancia K_c del controlador se determina a continuación.

7.2.2.3. Resolución 3

¿Cuántos polos de lazo cerrado existen y cuáles son los dominantes?. Observando la figura 7.6 se concluye que existen tres polos de lazo abierto, por lo tanto se tienen tres polos de lazo cerrado. Dos complejos, que están situados en el punto de diseño, y un polo real.

¿Donde se encuentra ubicado el polo real?. Aplicando la regla que señala que (para sistemas con ganancia positiva) existe lugar de la raíz cuando el número de polos y ceros a la derecha es impar, se concluye que se tiene un lugar de la raíz entre el polo en $s = -55.1$ y el cero en $s = -2.81$. Para responder si es polo dominante, se debe analizar si la frecuencia natural de este polo de lazo cerrado es mayor o menor a $5\sqrt{2}$ rads/seg.

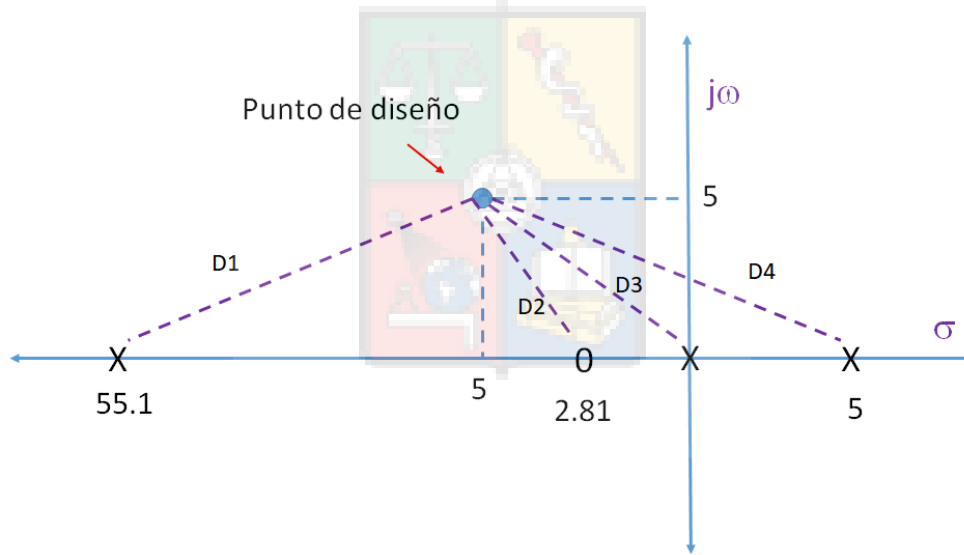


Figura 7.7: Distancia desde el punto de diseño a los polos y ceros.

Para encontrar la posición del tercer polo es necesario calcular la ganancia del sistema, lo que también permite calcular la ganancia del controlador. Utilizando la Fig. 7.7 y la ecuación (3.13), la ganancia necesaria para ubicar los polos de lazo

cerrado en el punto de diseño se calcula como:

$$K_{\text{sistema}} = 5K_c = \frac{D_1 D_3 D_4}{D_2} \quad (7.12)$$

Donde K_c corresponde a la ganancia del controlador. Las ganancias se calculan utilizando Pitágoras como:

- $D_1 = 50.349$
- $D_2 = 5.4586$
- $D_3 = 7.0712$
- $D_4 = 11.18$

aplicando (7.12) se encuentra que la ganancia del controlador es de $K_c \approx 145.84$.

Para esta misma ganancia se puede encontrar la posición del tercer polo utilizando la Fig. 7.8 y la ecuación (7.13). En esta ecuación se asume que el tercer polo de lazo cerrado se encuentra en una posición cualquiera entre el polo ubicado en $s = -55.1$ y el cero ubicado en $s = -2.81$. En la posición L la ganancia debe ser la misma que la calculada utilizando (7.12).

$$5 K_c = 729.2 = \frac{(55.1 - L)(L + 5) L}{L - 2.8135} \quad (7.13)$$

Resolviendo (7.13) se puede concluir que el tercer polo (real) se encuentra en $s \approx -40.05$ muy alejado de los polos dominantes ubicados con $\omega_n = 5\sqrt{2}$ rads/seg y $\zeta = 0.707$.

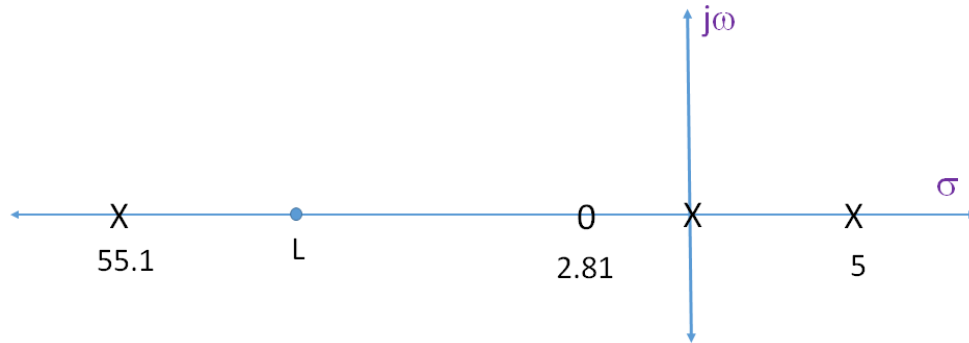


Figura 7.8: Cálculo de la posición del tercer polo, que se produce al ajustar la ganancia con el objetivo de obtener polos dominantes en $-5 \pm j5\omega$

Una vez concluido el diseño, se utiliza Matlab para obtener el lugar de la raíz del sistema compensador-planta que se detalla en la ecuación (7.14). Se puede observar en esta figura la posición de los polos dominantes de lazo cerrado y la posición del polo real ubicado en $s \approx -40$. Finalmente la respuesta a escalón unitario del sistema de control a lazo cerrado se muestra en la Fig. 7.10. Se puede observar un *overshoot* relativamente alto debido a la existencia de un cero que se encuentra cerca del origen y de los polos dominantes de lazo cerrado.

$$G(s)H(s) = \frac{145.8 \cdot (s + 2.81)}{s} \frac{(s + 5.1)}{(s + 55.1)} \frac{5}{(s + 5.1)(s - 5)} \quad (7.14)$$

7.2.2.4. Resolución 4

Si se mueve el polo que está en $s = -55.1$ hacia una nueva posición que se encuentra más cerca del origen ($s = -40$), el ángulo de fase producido por los polos aumentará en un valor $\Delta\theta$ que se puede calcular utilizando (7.15).

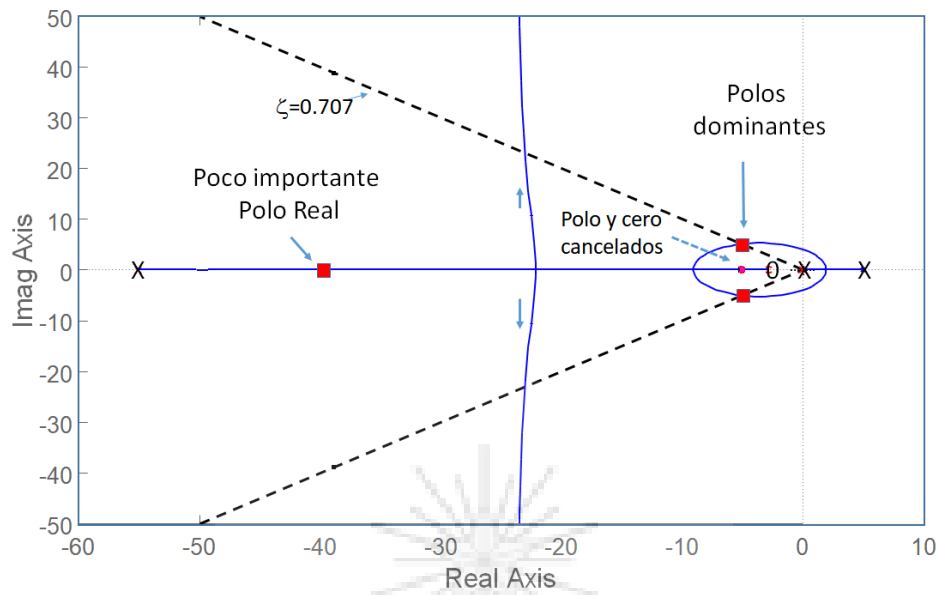


Figura 7.9: Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.14).

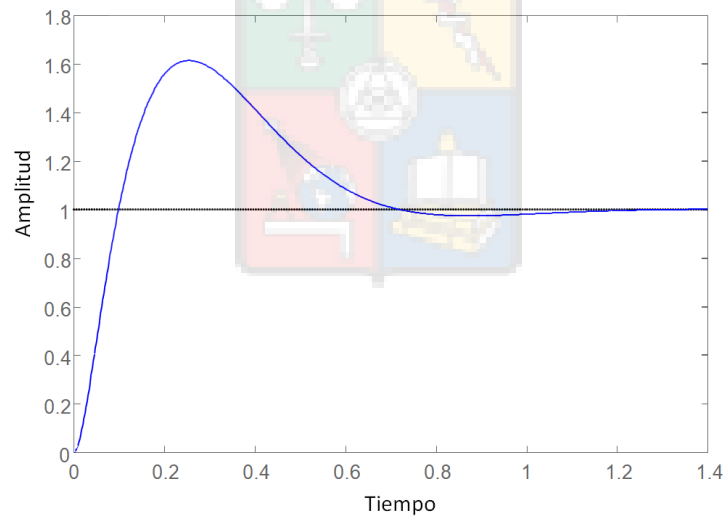


Figura 7.10: Respuesta de un escalón unitario aplicado al sistema de lazo cerrado compuesto por $G(s)H(s)$ de (7.14) y realimentación unitaria.

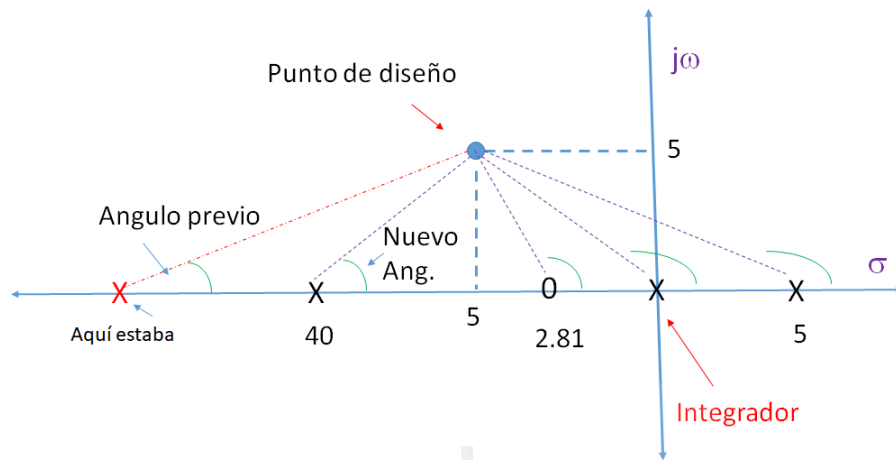


Figura 7.11: Efecto de mover el polo desde $s = -55.1$ a $s = -40$.

$$\Delta\theta = \text{atan}[5/(40 - 5)] - \text{atan}[5/(55.1 - 5)] = 2.43^\circ \quad (7.15)$$

Por lo tanto la solución obvia es mover la posición del cero hacia una nueva posición $s = L$, que se encuentra más cerca del origen, compensando el atraso de fase producido por el movimiento del polo. Matemáticamente L debe cumplir con (7.16).

$$\text{atan}[5/(5 - 2.8135)] - \text{atan}[5/(5 - L)] = 2.43^\circ \Rightarrow \text{atan}[5/(5 - L)] = 66.38^\circ - 2.4308^\circ \quad (7.16)$$

Utilizando (7.16) se demuestra que la nueva posición del cero es $s = -2.5558$. La comprobación se efectúa utilizando (7.17), considerando los ángulos de los polos y ceros de la Fig. 7.11.

$$180^\circ \approx (180^\circ - \text{atan}[5/(5-2.5558)]) - (180^\circ - \text{atan}[5/10]) - (180^\circ - \text{atan}[5/5]) - \text{atan}[5/40] \quad (7.17)$$

Se debe tener presente que el cambio en la posición del cero produciría también un cambio en la ganancia del sistema al aplicar (3.13). Aunque el nuevo valor de la ganancia no se preguntaba en el control, se deja al alumno la tarea de obtener el valor de K_c requerido en el controlador.

Además del valor de K_c , se sugiere al alumno determinar la posición del tercer polo de lazo cerrado que se encuentra en el sistema de control. Anteriormente se encontraba en $s \approx -40.5$.

7.2.3. Ejemplo de Compensación Utilizando el método de la Bisectriz

7.2.3.1. Resolución 5

. Al utilizar el método de la bisectriz para compensar el cambio de fase que se produce al mover el polo desde $s=-55.1$ a $s=-40$, se llega al diagrama mostrado en la Fig. 7.12 (ver también Fig. 6.10). La fase que debe agregar el compensador por bisectriz es $\Delta\theta \approx 2.4308^\circ$.

Utilizando las ecuaciones (6.15) y (6.16) se calcula la posición del polo y el cero de la malla en adelante, diseñada utilizando el método de la bisectriz. El polo se encuentra ubicado en $L_p \approx -7.1964$ y el cero se encuentra ubicado en $L_z \approx -6.948$. La

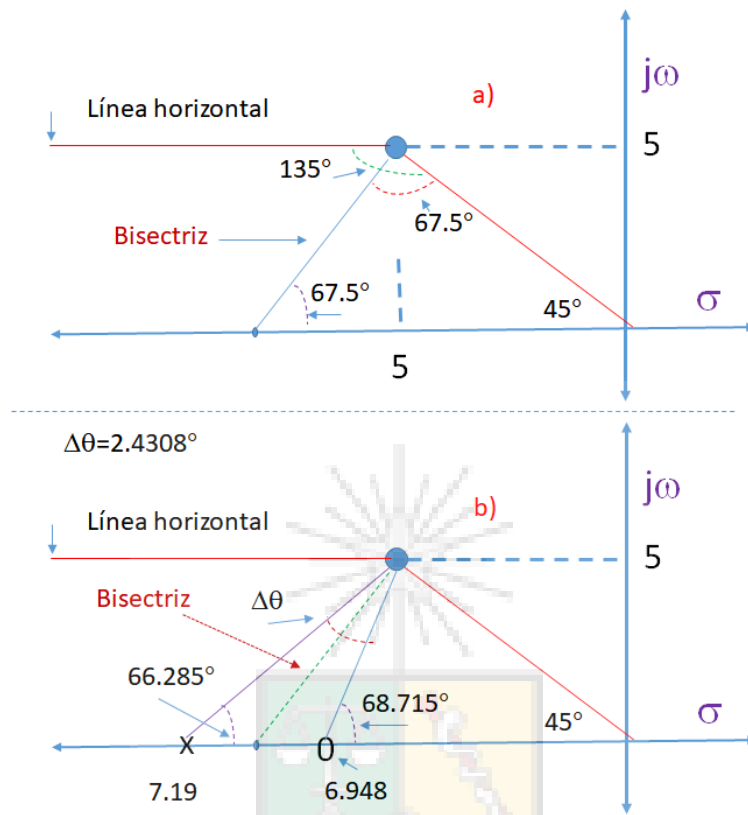


Figura 7.12: Aplicación del método de la bisectriz al problema anterior. a) Valor de los ángulos antes de considerar la malla en adelante. b) Valor de los ángulos requeridos para calcular la posición del polo y del cero de la malla en adelante.

mallla en adelante obtenida se muestra en la ecuación (7.18).

$$G_{lead}(s) = K_{lead} \cdot \frac{s + 6.948}{s + 7.196} \quad (7.18)$$

La ganancia K_{lead} es un grado adicional de libertad. Si se utiliza $K_{lead} = 1$, entonces otra ganancia debe aumentarse para que se cumpla la condición de módulo (en el punto de diseño) cuando se agregue la malla de (7.18) al compensador.

Alternativamente, la ganancia K_{lead} puede ajustarse para que la malla G_{lead} no afecte la condición de módulo en el punto P (es decir $|G_{lead}(s = \sigma_x \pm j\omega_x)| = 1$).

Utilizando la malla en adelante de (7.18), la función de transferencia a lazo abierto $G(s)H(s)$ es la que se muestra en (7.19),

$$G(s)H(s) = K_c \frac{s + 6.948}{s + 7.196} \frac{(s + 5.1)}{(s + 40)} \frac{(s + 2.81)}{s} \frac{5}{(s + 5.1)(s - 5)} \quad (7.19)$$

Por simplicidad en (7.19) se asume una sola ganancia K_c que se puede ajustar para cumplir con la condición de módulo. En (7.19) el último término a la derecha es la planta. Todo el resto es el compensador propuesto.

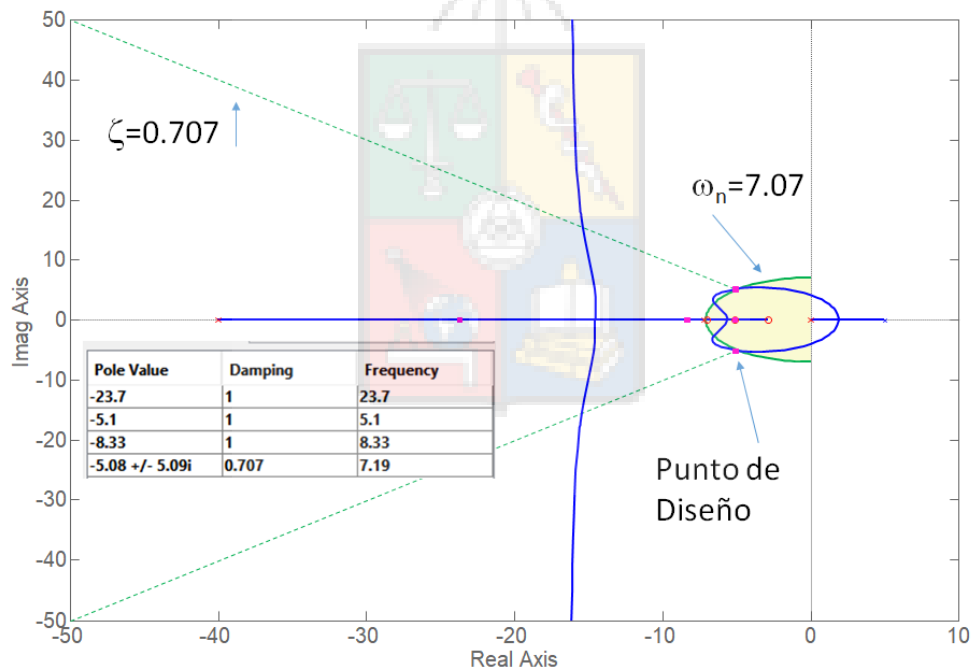


Figura 7.13: Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.19)

Nuevamente se deja al alumno la tarea de encontrar el valor de K_c requerido en (7.19), aplicando (3.13) a los polos y ceros de $G(s)H(s)$.

El lugar de la raíz para $G(s)H(s)$ se encuentra en la Fig. 7.13, con los polos de lazo cerrado correspondientes al punto de diseño, mostrados en el recuadro en la parte inferior izquierda. Se concluye que existe un polo de lazo cerrado ubicado en $s \approx -8.33$, cerca de los polos dominantes. Esto se observa con más detalle en la Fig. 7.14 que muestra la zona en que se encuentran los polos dominantes. Finalmente la respuesta

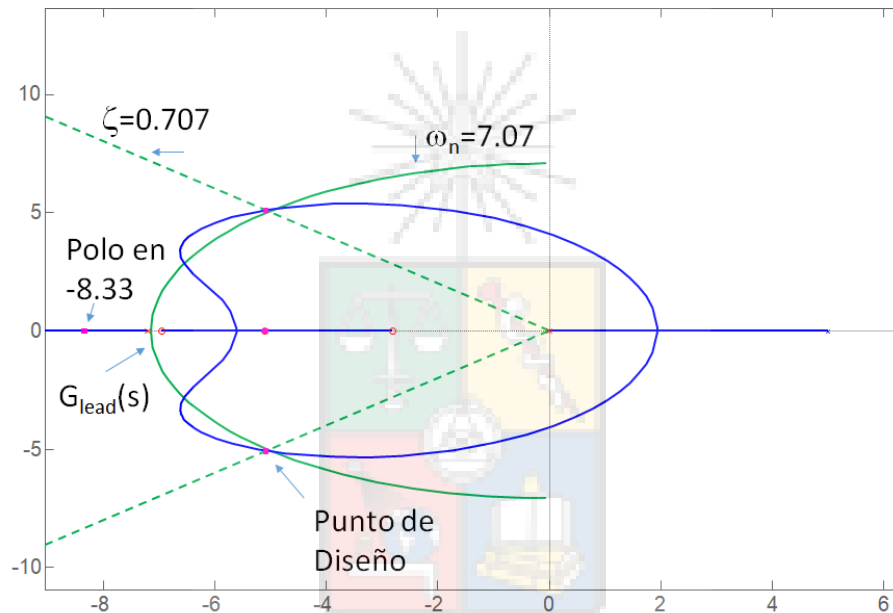


Figura 7.14: Parte del lugar de la raíz de la Fig. 7.13, mostrando principalmente la zona en que se encuentran los polos dominantes. Función de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.19).

a escalón unitario del sistema de control a lazo cerrado se muestra en la Fig. 7.15. Se puede observar que el sobrepaso aumentó ligeramente con respecto al mostrado en la Fig. 7.10, debido posiblemente al cero adicional que se encuentra cerca del origen. En lo que respecta al polo en $s = -8.33$, su influencia en el tiempo de establecimiento es muy menor y casi despreciable con respecto al tiempo t_s obtenido en la Fig. 7.10.

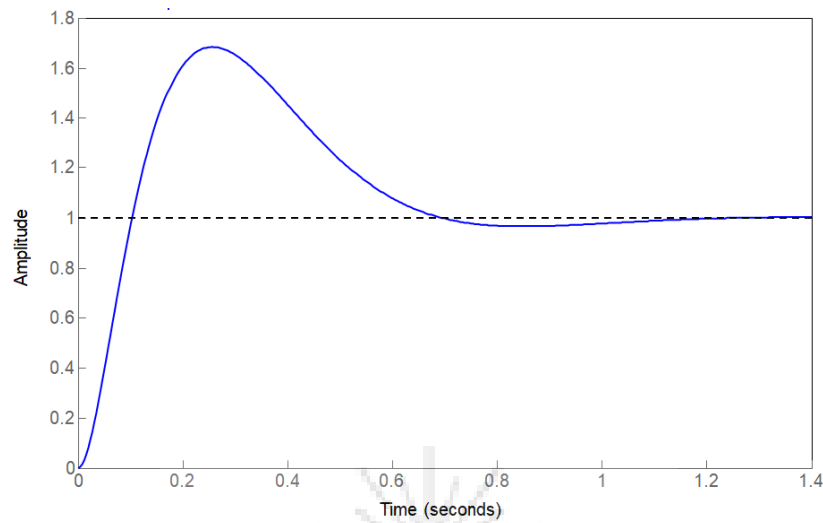


Figura 7.15: Respuesta de un escalón unitario aplicado al sistema de lazo cerrado compuesto por $G(s)H(s)$, de (7.19), y realimentación unitaria.

Sugerencia. Compruebe, sin utilizar herramientas computacionales que la ganancia del controlador (obtenida aplicando la condición de módulo) es $K_c \approx 104.36$.

7.3. Primer Control 2016

En las siguientes subsecciones se analizan dos preguntas de este control.

7.3.1. Primera Pregunta

Dado el sistema de control que se muestra en la Fig. 7.16, se pide lo siguiente:

1. Dibuje los lugares de las raíces que son posibles de obtener asumiendo que no conoce los puntos de arranque. Encuentre el número de asíntotas, sus ángulos y el punto de intersección de las asíntotas con el eje real.
2. Utilizando el lugar de la raíz, Routh-Hurwitz y/o las condiciones de módulo y ángulo propuestas por Evans, encuentre el valor máximo de K que permite un sistema estable. Además encuentre el punto en el eje $j\omega$ donde el lugar de la raíz cruza al semiplano derecho.
3. Encuentre (en función de la ganancia K) los errores en estado estacionario para entrada rampa y entrada parabólica de módulo A .

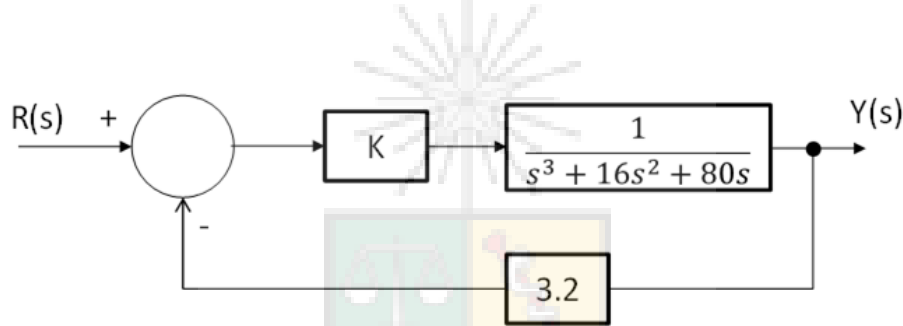


Figura 7.16: Sistema de control utilizado en la primera pregunta.

7.3.1.1. Resolución 1.

La función de transferencia a lazo abierto del sistema de control mostrado en la figura 7.16 es mostradas en la ecuación (7.20),

$$G(s)H(s) = \frac{3.2K}{s^3 + 16s^2 + 80s} \quad (7.20)$$

Existen dos lugares de la raíz posibles para esta función de transferencia a lazo abierto y ambos se muestran en la Fig. 7.17. El lugar de la raíz puede tomar la forma

mostrada en la Fig. 7.17(a) o 7.17(b) dependiendo principalmente de la posición $\sigma \pm j\omega$ que tienen los polos complejos conjugados. Por supuesto que uno solo de estos diagramas es el que corresponde a la ecuación (7.20), pero dado que no se dispone de computador para el desarrollo del control, se han dibujado ambas alternativas y ambas se aceptaron como respuestas correctas.

Si utilizamos la función RLTOOL de Matlab se puede comprobar que la Fig. 7.17(a) es el lugar de la raíz que corresponde a la función $G(s)H(s)$ de (7.20). Sin embargo, no es necesario conocer cuál de los lugares de la raíces es correcto para desarrollar el resto del problema.

El ángulo de las asíntotas se puede calcular utilizando (3.21). El resultado de aplicar esta fórmula es que las raíces están en 180° y $\pm 60^\circ$. Los polos de lazo abierto se encuentran en $p_{12} = -8 \pm j4$ y $p_3 = 0$. Por lo tanto utilizando (3.20), se encuentra que las asíntotas están centradas en $s = -5.33$.

7.3.1.2. Resolución 2

Si se utiliza el criterio de Routh-Hurwitz, se debe encontrar la ecuación característica. Por simplicidad se define $K_T = 3.2K$. Desde (7.20) se llega a:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow s^3 + 16s^2 + 80s + K_T = 0 \quad (7.21)$$

Utilizando (7.21) se obtiene la Tabla 7.1.

Del término $16 \cdot 80 - K_T$, se concluye que el sistema es estable si es que $K_T < 1280$. Recordando que $K_T = 3.2K$, se concluye que $0 < K < 400$ para mantener los polos

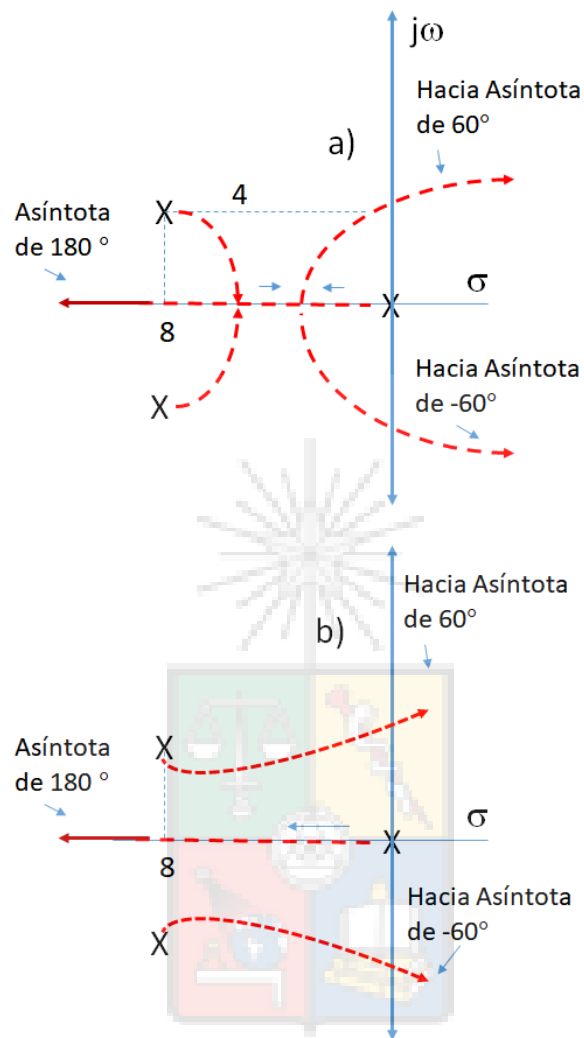


Figura 7.17: Posibles lugares de la raíces correspondientes a la ecuación (7.20). En ambos casos existen tres raíces, dos de ellas se van hacia el infinito a través de asíntotas ubicadas en $\pm 60^\circ$. La tercera asíntota está en 180° .

de lazo cerrado en el semiplano izquierdo.

Para encontrar el punto $j\omega$ donde las raíces de lazo cerrado cruzan al semiplano derecho, se debe utilizar la condición de ángulo. Para esto se utiliza la Fig. 7.18,

s^3	1	80	0
s^2	16	K_T	0
s^1	$(16 \cdot 80 - K_T)/16$	0	
s^0	K_T		

Tabla 7.1: Aplicación del criterio de Routh-Hurwitz a (7.21)

obteniéndose la siguiente expresión para los ángulos.

$$\theta_1 + \theta_2 + 90^\circ = \pm 180^\circ \Rightarrow \theta_1 = 90^\circ - \theta_2 \Rightarrow \tan(\theta_1) = \tan(90^\circ - \theta_2) \quad (7.22)$$

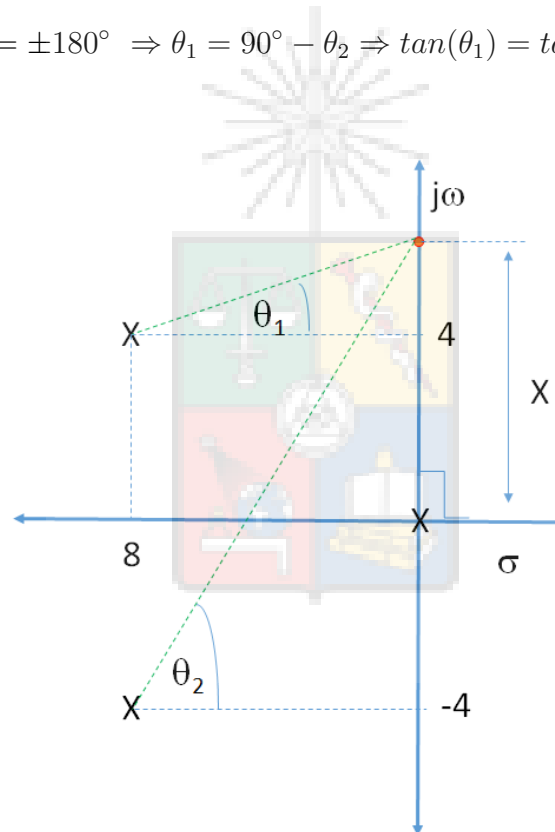


Figura 7.18: Diagrama utilizado para aplicar la condición de ángulo y encontrar el punto de cruce al semiplano derecho.

Utilizando la expresión:

$$\tan(90^\circ - \theta_2) = \frac{1}{\tan(\theta_2)} \quad (7.23)$$

y la Fig. 7.18 se llega a que el término a la derecha de (7.22) se puede escribir como:

$$\tan(\theta_1) = \frac{1}{\tan(\theta_2)} \Rightarrow \frac{(x-4)}{8} = \frac{8}{(x+4)} \quad (7.24)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática a la derecha de (7.24) se obtiene $x^2 = 80 \Rightarrow x = \pm 8.94$.

Utilizando el comando RLTOOL de Matlab, se comprueban los valores. Los resultados se muestran en la Fig. 7.19. El valor de la ganancia utilizada en el controlador proporcional es $K=400$.

7.3.1.3. Resolución 3

Utilizando (??), el error en estado estacionario del sistema mostrado en la Fig. 7.16 se puede escribir como:

$$e(s) = \frac{R(s)}{1 + \frac{3.2k}{(s^3+16s^2+80s)}} \quad (7.25)$$

Suponiendo entrada rampa se tiene:

$$e(s) = \frac{A}{s^2} \cdot \left[\frac{1}{\left[1 + \frac{3.2k}{s^3+16s^2+80s} \right]} \right] \quad (7.26)$$

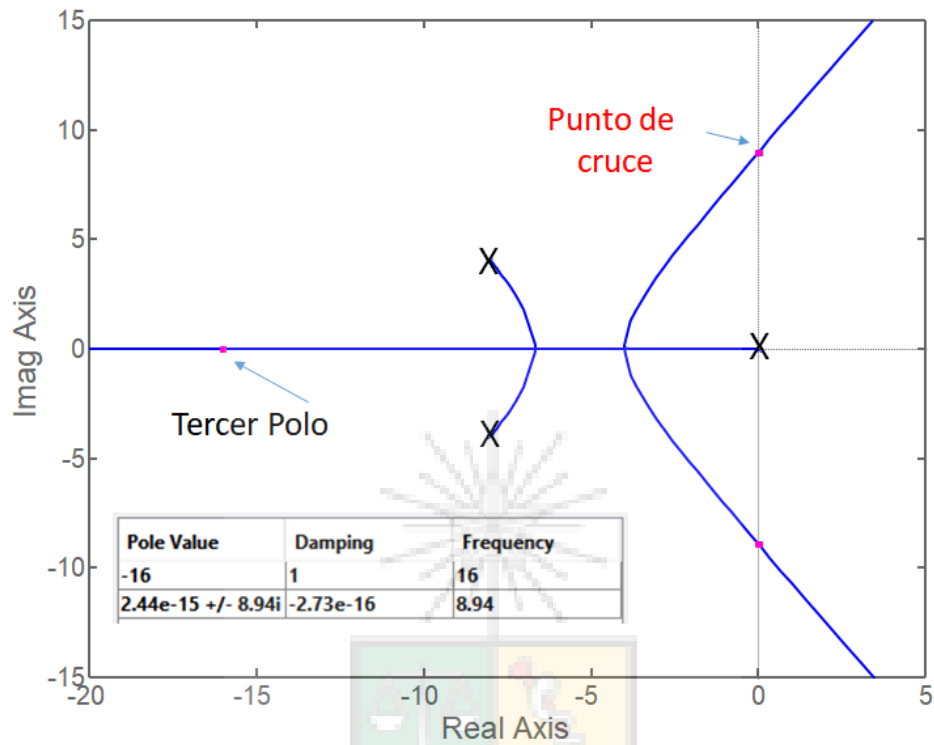


Figura 7.19: Comprobación de los valores encontrados en el desarrollo de este problema

Aplicando el teorema del valor final se encuentra el error como:

$$\lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{A}{s} \frac{1}{1 + \frac{3.2k}{s^3 + 16s^2 + 80s}} \right] \quad (7.27)$$

Finalmente se calcula el error en estado estacionario a entrada rampa como $\frac{80}{3.2K} \cdot A$. El error en estado estacionario a entrada parabólica $\rightarrow \infty$.

7.3.2. Segunda Pregunta

Se tiene un filtro LC alimentando una carga resistiva. Se desea controlar la tensión V_{out} en bornes de la resistencia de $1k\Omega$ mostrada en la Fig. 7.20. El actuador está basado en dispositivos de electrónica de potencia y se representa por la fuente de tensión variable (corriente continua) V_{in} .

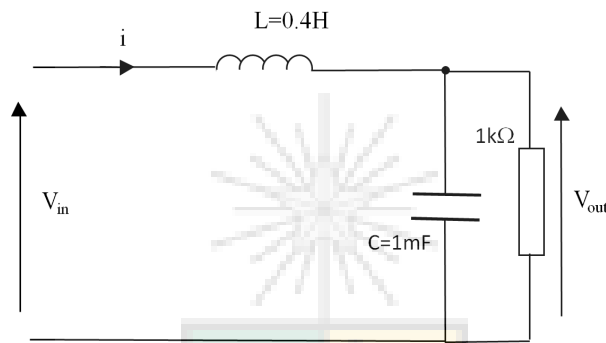


Figura 7.20: Filtro LC utilizado para alimentar una carga resistiva. Este filtro es apropiado para alimentar cargas aisladas en micro-redes, ya que posee menor densidad de potencia que otras alternativas.

Debido a problemas de costo e inexperiencia no se pueden utilizar las técnicas de control discutidas más adelante en la Sección 8.3. Para efectuar la medición de la tensión V_{out} se utiliza un filtro de primer orden con función de transferencia:

$$V_{outf} = \frac{120}{s + 120} V_{out} \quad (7.28)$$

se pide:

1. Diseñe un controlador para obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón, con raíces complejas ubicadas en aproximadamente $\omega_n=10$ rads/seg,

y $\zeta=0.707$. Para este diseño puede utilizar, dos ceros reales o complejos y dos polos reales. El diseño debe efectuarse utilizando lugar de la raíz.

2. Por un error de diseño, el controlador de 1) se implementa en un sistema de control con una resistencia de 200Ω en lugar de $1k\Omega$. Si el controlador encontrado en 1) se mantiene sin modificaciones, encuentre la nueva condición de ángulo para el punto $\omega_n=10$ rads/seg, y $\zeta=0.707$.
3. Por un problema de costos, la única solución posible, para modificar el controlador y operar con un resistencia de 200Ω , es utilizar una red atraso-adelanto o adelanto-atraso de primer orden en cascada con el controlador original encontrado en 1. Proponga y diseñe la red utilizando lugar de la raíz.

7.3.2.1. Resolución 1

La impedancia total conectada en bornes de la fuente V_{in} se puede calcular como:

$$Z = sL + \frac{R \cdot 1/sC}{R + 1/sC} \quad (7.29)$$

Manipulando se llega a:

$$Z = \frac{s^2RLC + sL + R}{sRC + 1} \quad (7.30)$$

Aplicando divisor de tensión, la tensión de salida se encuentra como:

$$V_{out}(s) = \frac{R/(sRC + 1)}{Z} V_{in}(s) \rightarrow V_{out}(s) = \frac{R}{(s^2RLC + sL + R)} V_{in}(s) \quad (7.31)$$

La función de transferencia de (7.31) es típicamente un sistema de segundo orden, con polos mal amortiguados, cuando la resistencia de carga es muy alta. Nótese que la resistencia serie intrínseca en la inductancia, y las pérdidas del condensador han sido despreciadas. Se asumen elementos ideales.

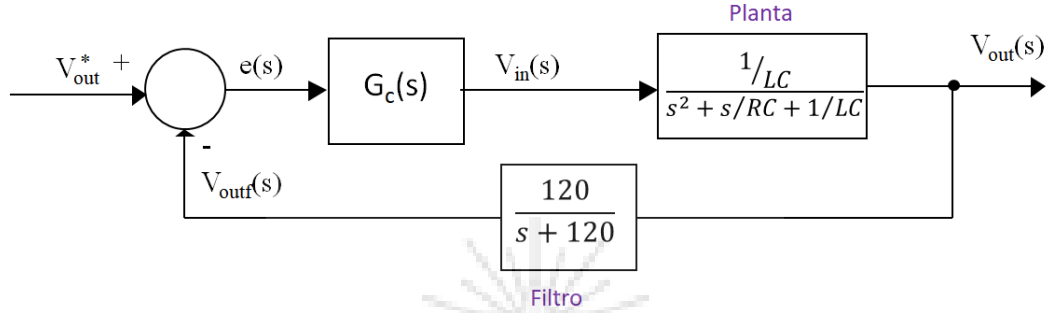


Figura 7.21: Sistema de control incluyendo la planta de (7.31) y el filtro de medición.

El diagrama de control del sistema, incluyendo filtro, se muestra en la Fig. 7.21. Considerando los valores de R , L y C definidos en la Fig. (7.20), la función de transferencia de la planta es mostrada en (7.32).

$$G_c(s) = \frac{2500}{s^2 + s + 2500} \quad (7.32)$$

Para el control del sistema de (7.32), se propone un control PID con un polo extra [ver (6.8)]. La función de transferencia del compensador propuesto, se muestra en la ecuación (7.33).

$$G_c(s) = K_c \frac{(s^2 + s/RC + 1/LC)}{s(s + a)} \quad (7.33)$$

Los grados de libertad de este controlador son la ganancia K_c y la posición del segundo polo ($s + a$). En este caso el numerador del *PID* se diseña para cancelar los polos mal amortiguados de la planta en (7.31). Para plantear las condiciones de módulo y ángulo del lugar de la raíz, se utiliza la Fig. 7.22.

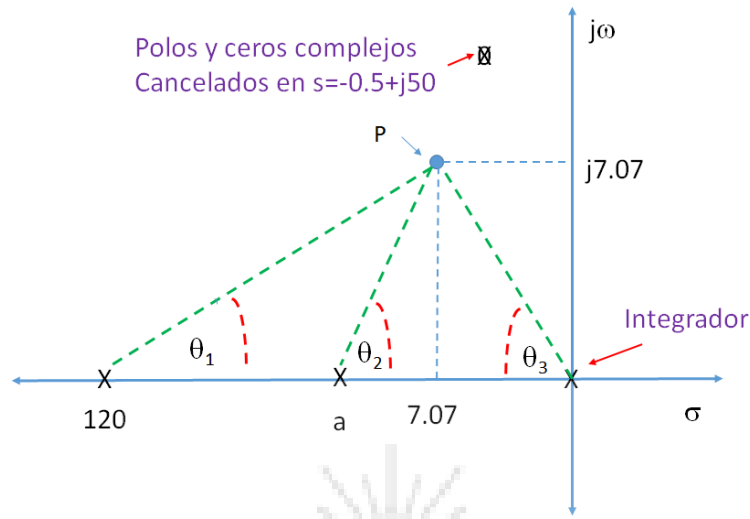


Figura 7.22: Punto de diseño y posición de los polos y ceros del sistema de control, incluyendo el controlador propuesto en (7.33).

La incógnita en (7.33) es la posición del polo en $s = -a$ y ese valor se encuentra utilizando la condición de ángulo de (3.7). El problema se plantea en (7.34):

$$180^\circ = \text{atan}[7.07/(120 - 7.07)] + \text{atan}[7.07/(a - 7.07)] + (180^\circ - 45^\circ) \quad (7.34)$$

Despejando la incógnita a en (7.34) se llega a:

$$180^\circ = 3.58^\circ + 135^\circ + \text{atan}[7.07/(a - 7.07)] \Rightarrow \frac{7.07}{a - 7.07} = \tan(41.418^\circ) \quad (7.35)$$

utilizando (7.35) se demuestra que la posición del polo extra del PID es

$a = 15.084$. El controlador propuesto es por lo tanto igual a (7.36):

$$G_c(s) = K_c \frac{(s^2 + s + 2500)}{s(s + 15.084)} \quad (7.36)$$

La ganancia K_C se calcula utilizando (3.13) considerando que la ganancia del sistema es igual a lo mostrado en la ecuación (7.37),

$$K_{sistema} = \frac{120}{LC} K_c \quad (7.37)$$

Donde el valor 120 corresponde a la ganancia del filtro (ver Fig. 7.21). Reemplazando las distancias a los polos en (3.13), y considerando el término $(120/LC)$ de (7.37) se llega a la ecuación (7.38):

$$K_c = \frac{LC}{120} \left[10 \sqrt{(120 - 7.07)^2 + 7.07^2} \sqrt{(15.084 - 7.07)^2 + 7.07^2} \right] \quad (7.38)$$

Usando (7.38) se obtiene que $K_c \approx 0.0403$.

7.3.2.2. Resolución 2

Debido a que los polos de la carga son móviles, habitualmente no se utiliza cancelación en el diseño del compensador utilizado con el filtro LC de la Fig. 7.20.

En una micro-red se utiliza frecuentemente una técnica denominada *active damping* (entre otras metodologías) para el diseño de compensadores aplicables a filtros *LC* y *LCL*. El estudio de estos tópicos está fuera de los objetivos de este curso, pero si se discuten estos temas en el curso de electrónica de potencia y accionamientos.

Retornando al problema; con el cambio de la resistencia de carga, la función de transferencia de la planta ha cambiado desde (7.32) a (7.39),

$$G_p(s) = \frac{2500}{s^2 + 5s + 2500} \quad (7.39)$$

El controlador de (7.36) tiene ceros complejos ubicados en $s = -0.5 \pm j50$. Al cambiar la resistencia de carga a $R = 200\Omega$ los polos de (7.39) quedan en $s = -2.5 \pm j49.937$. Por lo tanto al existir cancelación imperfecta, se produce una nueva función de transferencia [ver (7.40)] que contribuye con un ángulo extra en el punto de diseño $P = -7.07 \pm j7.07$.

$$G_{extra}(s) = \frac{s^2 + s + 2500}{s^2 + 5s + 2500} \quad (7.40)$$

Remplazando $s = -7.07 + j7.07$ en (7.40), se llega a (7.41),

$$G_{extra}(s = -7.07 + j7.07) = \frac{2492.9 - j92.9}{2464.7 - j64.62} \quad (7.41)$$

Calculando la fase del numerador y del denominador en (7.41) se concluye que la incorrecta cancelación de los polos de la planta produce una fase en atraso de $\approx 0.63228^\circ$ en el punto de diseño.

El término fase en atraso indica que, al evaluar en el punto P , la fase de los polos en (7.40)-(7.41) es numéricamente mayor a la fase de los ceros. Esto significa que en lugar de existir 180° en el punto de diseño, existen 179.37° .

7.3.2.3. Resolución 3

La pérdida de fase producida al evaluar (7.41) es despreciable y se podría ignorar (es lo que yo haría en una implementación física). Pero si fuera estrictamente necesario cumplir con las especificaciones de diseño, se debe agregar en el compensador una malla en adelante con la función de transferencia de (7.42),

$$G_{lead} = \frac{s + 15.084}{s + a_2} \quad (7.42)$$

y el cálculo del nuevo valor de a_2 se realiza utilizando (7.43)

$$\tan^{-1}[7.07/(15.084 - 7.07)] - \tan^{-1}[7.07/(a_2 - 7.07)] = 0.63228^\circ \quad (7.43)$$

El valor de $a_2=15.265$. El agregar la malla de (7.42), es equivalente a mover el polo extra de (7.33) ligeramente hacia la izquierda disminuyendo su fase en $\approx 0.63^\circ$ tal como se muestra en la parte derecha de la ecuación (7.44). La malla en adelante que se muestra en la parte izquierda de (7.44), sería igual a la función G_{lead} de (7.45).

$$G_c(s) = 0.0405 \frac{(s^2 + 1 + 2500)}{s(s + 15.084)} \frac{(s + 15.084)}{(s + 15.265)} = 0.0405 \frac{(s^2 + 1 + 2500)}{s(s + 15.265)} \quad (7.44)$$

$$G_{lead} = \frac{(s + 15.084)}{(s + 15.265)} \quad (7.45)$$

¿Qué se debería hacer? ¿Mover el polo desde $s = -15.084$ a $s = -15.265$ o agregar la malla en adelante de (7.45)?; matemáticamente, ambas soluciones son iguales y desde el punto de vista de implementación lo mas simple es mover el polo. Sin embargo, si existe un sistema de control que no se puede modificar o al que no se tiene acceso, podría ser necesario colocar otra malla en cascada con el controlador ya implementado.

El lugar de la raíz correspondiente a la parte 3 de esta pregunta, se muestra en la Fig. 7.23. El diagrama muestra claramente la influencia que tiene la cancelación imperfecta de los cero y polos complejos del controlador y planta respectivamente. El sistema tiene 5 polos de lazo abierto y dos ceros, por lo tanto existen tres asíntotas en $\pm 60^\circ$ y 180° respectivamente. Los polos dominantes se encuentran bien ubicados y cumplen con las especificaciones de diseño.

Finalmente, la Fig. 7.24 muestra respuesta a un escalón unitario en la entrada $V_{out}^*(s)$ de la Fig. 7.21. El sistema tiene un sobrepaso reducido con un tiempo de establecimiento que es muy similar a lo obtenido aplicando la fórmula para el cálculo de t_s [ver (2.6)].

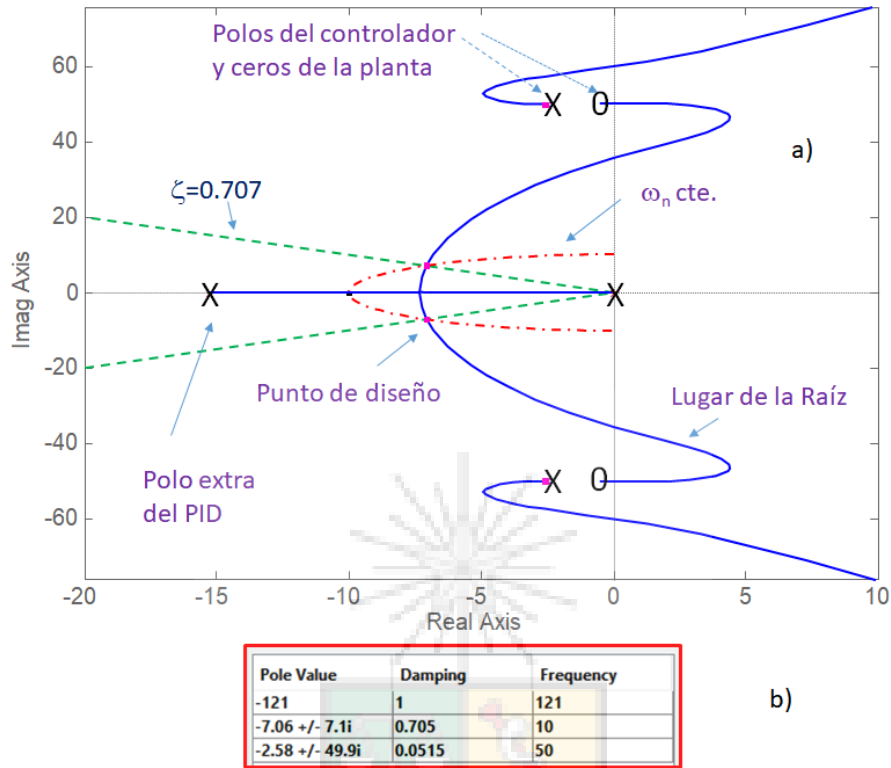


Figura 7.23: Lugar de la raíz obtenido al considerar el controlador de (7.44), la planta de (7.39) y el filtro de (7.28). El diagrama muestra solo el sector de los polos dominantes, por lo que no puede apreciar el filtro de (7.28) aunque su influencia en el lugar de la raíz está considerada. En la parte b) de esta figura se muestran las posiciones de los 5 polos de lazo cerrado obtenidos al utilizar $K_c \approx 0.0405$. Los polos dominantes se encuentran bien ubicados en el punto de diseño.

7.4. Primer Control 2021

Este control está compuesto de dos preguntas y ambas pueden ser resueltas utilizando las condiciones de módulo y ángulo del lugar de la raíz.

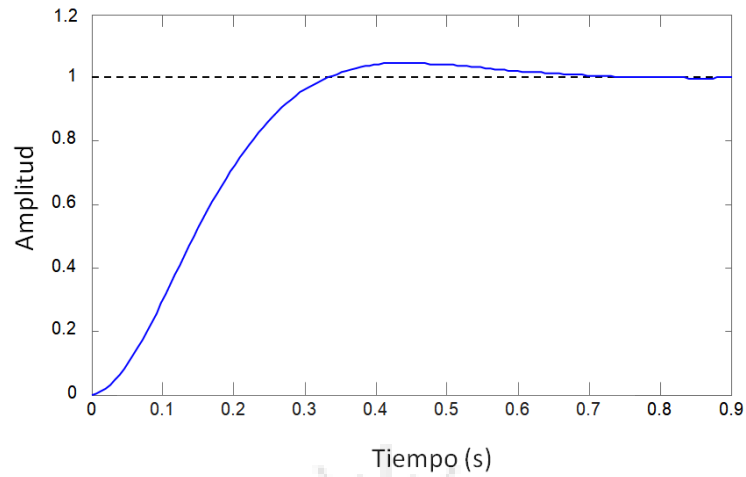


Figura 7.24: Respuesta a entrada escalón unitario obtenida al considerar el controlador de (7.44), la planta de (7.39) y el filtro de (7.28).

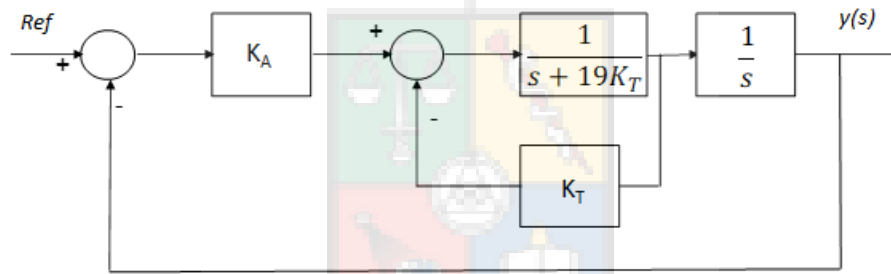


Figura 7.25: Lazo de control del problema uno, primer control del segundo semestre del 2021.

7.4.1. Primera pregunta

Dado el sistema de control de la Fig. 7.25, se pide responder las preguntas utilizando el método del lugar de la raíz:

1. Encuentre los valores de K_T y K_A requeridos para lograr cero error en estado

estacionario a entrada escalón, frecuencia natural de 20rad/seg y $\zeta=0.707$. Resuelva el problema de forma gráfica utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo del lugar de la raíz.

2. Debido a una deficiente implementación en el microprocesador, el integrador que se encuentra en la figura anterior (lado derecho) toma la forma $(s - 10K_T)/(5s)$.

Incluso con este error, ¿Es posible diseñar un sistema de control que sea estable y bajo qué condiciones? Si así lo cree, encuentre el rango de ganancia K_A que produce un sistema estable.

3. Un ingeniero con poca experiencia, esta seguro que el sistema mostrado se puede adecuar para obtener cero error en estado estacionario a la entrada $Ref = 10 + 100\cos(\omega_0 t) + 5t$, donde ω_0 es una constante. Reemplace el controlador proporcional K_A de la Fig. 7.16 con un compensador que pueda regular con cero error en estado estacionario a esta referencia. No se preocupe por estabilidad y asuma que un controlador como el que usted proponga puede funcionar.

7.4.1.1. Resolución 1.

Primero se obtiene la planta a lazo abierto $G(s)H(s)$. El equivalente es el mostrado en (7.46).

$$G(s)H(s) = K_A \frac{\frac{1}{s+19K_T}}{1 + \frac{K_T}{s+19K_T}} \frac{1}{s} = \frac{K_A}{s(s+20K_T)} \quad (7.46)$$

El lugar de la raíz de la ecuación $G(s)H(s)$ es mostrado en la Fig. 7.26.

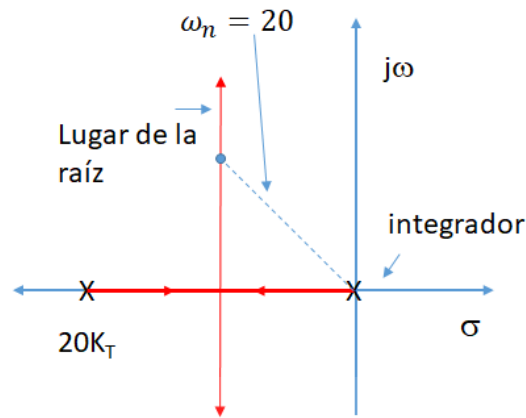


Figura 7.26: Lugar de la raíz correspondiente a la ecuación de lazo abierto de (7.46).

Aplicando la condición de ángulo y a partir de lo indicado en la Sección 3.3.8, se obtiene que el lugar de la raíz para esta configuración de polos es una línea vertical, paralela al eje imaginario, que parte desde el punto $s = -10K_T$. Además existe lugar de la raíz en el eje real entre $0 \leq s \leq 20K_T$.

Considerando que $\zeta=0.707$ corresponde a un ángulo de 45 grados (entre la línea de ω_n y el eje real negativo), es simple mostrar que el valor de K_T en el punto de diseño ($\omega_n = 20\text{rads/seg.}$), se calcula utilizando $10K_T\sqrt{2} = 20 \rightarrow K_T = \sqrt{2}$.

El valor de la ganancia K_A se calcula a partir de la condición de módulo de (3.13). Es decir $K_A = 20^2 = 400$

7.4.1.2. Resolución 2.

En este caso, el integrador se cambia por $\frac{(s-10K_T)}{5s}$. El nuevo sistema de lazo abierto $G(s)H(s)$ es mostrado en (7.47). El lugar de la raíz correspondiente a esta función se muestra en la Fig. 7.27.

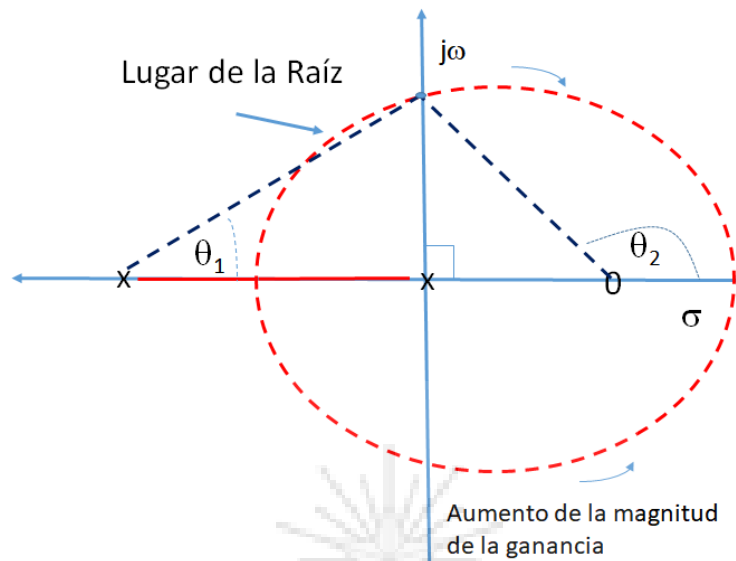


Figura 7.27: Lugar de la raíz correspondiente a la ecuación de lazo abierto de (7.47). Nótese que este lugar de la raíz se ha construido asumiendo ganancia negativa.

$$G(s)H(s) = \frac{K_A (s - 10K_T)}{5s (s + 20K_T)} \quad (7.47)$$

Por simple observación se puede concluir que el sistema es inestable para todo valor de ganancia positiva ($K_A > 0$). Por lo tanto, para que el sistema sea estable, se debe operar con ganancia negativa (o sea la sumatoria de los ángulos debe dar igual a 0 grados, ya que la ganancia tiene los 180 grados incluidos). Asumiendo que el borde entre estabilidad e inestabilidad se produce al cruzar el eje imaginario en un punto $\mathbf{x}$, se aplica la condición de ángulo en (7.48),

$$\theta_1 + 90^\circ - \theta_2 = 0 \rightarrow \theta_1 - \theta_2 = -90^\circ \rightarrow \text{atan} \left(\frac{x}{20K_T} \right) - \left[180^\circ - \text{atan} \left(\frac{x}{10K_T} \right) \right] = -90^\circ \quad (7.48)$$

desarrollando el termino a la derecha de (7.48) se llega a la expresión (7.49),

$$\text{atan}\left(\frac{x}{20K_T}\right) + \text{atan}\left(\frac{x}{10K_T}\right) = 90^\circ \quad (7.49)$$

Utilizando la identidad (3.30) [que por simplicidad se repite en (7.50)], se llega a la ecuación (7.51).

$$\text{atan}(x) \pm \text{atan}(y) = \left[\frac{x \pm y}{1 \mp xy} \right] \quad (7.50)$$

$$\text{atan}\left[\frac{\left(\frac{x}{20K_T} + \frac{x}{10K_T}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{200K_T^2}\right)}\right] = 90^\circ \quad (7.51)$$

Dado que la tangente es discontinua en 90° , el denominador de (7.51) debe tender a cero. Es decir,

$$200K_T^2 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{200K_T} \quad (7.52)$$

Aplicando la condición de módulo y utilizando la siguientes variables auxiliares:

- D1=distancia desde el punto al polo en $20K_T = \sqrt{200K_T^2 + 400K_T^2} = \sqrt{600}K_T$.
- D2 = distancia desde el punto al integrador = $\sqrt{200} K_T$
- D3=distancia desde el punto al cero en $10K_T = \sqrt{200K_T^2 + 100K_T^2} = \sqrt{300}K_T$

se puede calcular la ganancia del sistema como:

$$|K_{\text{sistema}}| = \frac{|K_A|}{5} = \frac{D_1 D_2}{D_3} \rightarrow |K_{\text{sistema}}| = 20K_T \quad (7.53)$$

Es decir el sistema es inestable cuando el módulo de la ganancia $|K_A| > 101.84K_T$ y cuando $K_A > 0$.

7.4.1.3. Utilizando Routh-Hurwitz

Utilizando la ecuación (7.47), se puede plantear la ecuación característica como se muestra en (7.54).

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K_A(s - 10K_T)}{5s(s + 20K_T)} \quad (7.54)$$

El numerador de la ecuación característica queda como:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 5s^2 + (100 \cdot K_T + K_A)s - K_A \cdot K_T = 0 \quad (7.55)$$

Como ya sabemos, todos los coeficientes de la ecuación (7.55) deben ser mayores que cero para que el sistema cumpla con lo establecido en el criterio de Routh. Analizando el coeficiente de menor orden, se debe cumplir que $-K_A \cdot K_T > 0$, lo que implica que $K_A < 0$ (lo que ya sabíamos del lugar de la raíz mostrado en la Fig. 7.27).

El término de orden uno nos indica que $100 \cdot K_T + K_A > 0$ por lo tanto $K_A > -100K_T$. Resumiendo, la magnitud de la ganancia debe ser $0 < |K_A| < 100K_T$, que es el mismo resultado obtenido en aplicando la condición de módulo en (7.53) (no podía ser de otra manera).

7.4.1.4. Resolución 3

Considerando que la planta de (7.47) ya tiene un integrador en el denominador, el controlador debe tener la siguiente estructura para cumplir con el principio del modelo interno:

$$G_c(s) = \frac{K \prod (s + z_i)}{s (s^2 + \omega_0^2)} \quad (7.56)$$

Donde el término $\prod (s + z_i)$ es la productoria de los ceros del controlador. El denominador contiene el término s para obtener cero error en estado estacionario a entrada rampa y escalón (ya existe un integrador en la planta). Finalmente, se utiliza el término $(s^2 + \omega_0^2)$ en el denominador de (7.56) para obtener cero error en estado estacionario a la entrada $\cos(\omega_0 t)$.

¿Qué elementos se deben utilizar en el numerador?, no lo sé. Probablemente sería muy difícil encontrar esos ceros (tres como máximo) y obtener un sistema que funcione bien, o al menos sea estable, considerando el sistema de lazo abierto $G(s)H(s)$ de (7.47). Pero esa no era la pregunta y por este motivo se indicaba que no se debían preocupar por la estabilidad del sistema.

7.4.2. Segunda pregunta

Un sistema tiene la siguiente planta:

$$G(s) = \frac{(s + a)}{s^2 - 2as + a^2} \quad (7.57)$$

Donde a es una variable que depende de la potencia nominal de la planta y que

se puede asumir como un valor de diseño. Un diseñador con poca experiencia decide implementar un sistema de control considerando un lazo de realimentación unitario y un controlador proporcional. Se pide:

1. Utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo, en forma gráfica plantee el problema y determine el rango de ganancia proporcional que produce inestabilidad.
2. El diseñador añade un nuevo requerimiento al sistema de control. El tiempo de establecimiento del 2 % definido como $4/(\omega_n\zeta)$ debe ser igual al $4/a$. Utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo, en forma gráfica determine la ganancia proporcional que entrega el tiempo de establecimiento solicitado.
3. Para la pregunta 2), encuentre la frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento obtenido con la solución propuesta.
4. Con el controlador proporcional diseñado en 2) ¿Cuál sería el error en estado estacionario para un escalón de magnitud A?
5. Después de calcular 4), el diseñador se da cuenta que no es posible obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón. Por lo tanto, en el controlador decide colocar (en cascada con la ganancia proporcional) la malla en atraso;

$$G_{PI}(s) = \frac{s+a}{s} \quad (7.58)$$

Utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo, encuentre en forma gráfica la ganancia proporcional que debe utilizar en conjunto con esta malla en atraso para mantener el tiempo de establecimiento del 2 % igual a $4/a$. ¿Cuál es el nuevo coeficiente de amortiguamiento en este caso?

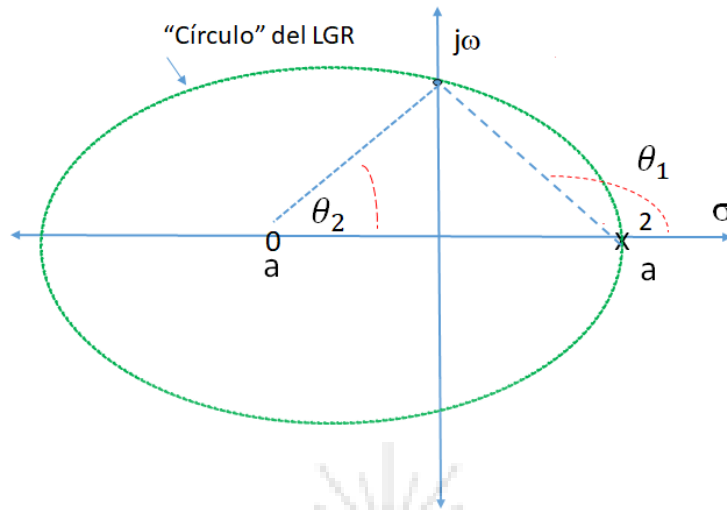


Figura 7.28: Lugar de la raíz correspondiente a la ecuación de lazo abierto de (7.57). El gráfico no está a escala y el lugar de la raíz no parece un círculo perfecto aunque lo es.

7.4.2.1. Resolución 1.

El lugar de la raíz en este caso es un círculo centrado en el cero que se encuentra en el semiplano izquierdo. La Fig. 7.28 muestra el lugar de la raíz obtenido (no está a escala). Utilizando la condición de ángulo se tiene:

$$2\theta_1 - \theta_2 = \pm 180^\circ \quad (7.59)$$

Observando la posición de los polos y ceros en la Fig. 7.28 es fácil comprobar que por simetría $\theta_1 = 180^\circ - \theta_2$ y $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1$. Se utiliza la condición de ángulo para encontrar θ_2 reemplazando $\theta_1 = 180^\circ - \theta_2$ en (7.60),

$$2(180^\circ - \theta_2) - \theta_2 = \pm 180^\circ \rightarrow -3\theta_2 = -180^\circ \quad (7.60)$$

El ángulo $\theta_2 = 60$ grados. Utilizando $\text{atan}(x/a) = 60^\circ$, se obtiene el lugar en que el lugar de la raíz cruza el eje complejo como $x = a\sqrt{3}$. Aplicando Pitágoras se puede calcular la distancia del punto de cruce del eje $j\omega$ a los polos como:

$$D = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a \quad (7.61)$$

que es la misma distancia que existe desde este punto al único cero. Finalmente aplicando (3.13), que por simplicidad se repite en (7.62) se tiene,

$$K_{\text{sistema}} = \frac{\prod \text{distancia a los polos}}{\prod \text{distancia a los ceros}} = 2a \quad (7.62)$$

se obtiene que la ganancia del controlador proporcional debe cumplir con $K_p \geq 2a$ para obtener un sistema asintóticamente estable.

Comprobación utilizando **Routh Hurwitz**.

La ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ [ver (7.57)] es:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow s^2 + (K_p - 2a)s + a(K_p + a) = 0 \quad (7.63)$$

Para que el sistema de control sea asintóticamente estable, todos los coeficientes de la ecuación característica deben ser positivos. Esto se cumple en (7.63) si $K_p \geq 2a$, es decir el valor que ya habíamos encontrado utilizando un desarrollo algo más complejo, a través de las condiciones de módulo y ángulo. Sin embargo, recuerde que el criterio de Routh nos entrega el valor de K_p que produce inestabilidad, pero no entrega el punto de cruce en el eje $j\omega$. Si se usa el criterio de Routh se deben plantear

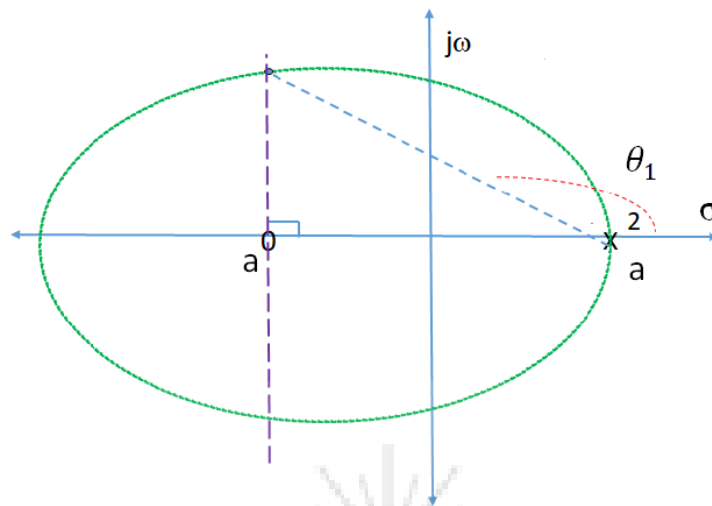


Figura 7.29: Lugar de la raíz correspondiente a (7.57) y locus de tiempo de establecimiento (t_s constante).

ecuaciones adicionales para encontrar este punto de cruce.

7.4.2.2. Resolución 2.

El locus de un sistema con tiempo de establecimiento constante es una línea en el semiplano izquierdo, paralela al eje imaginario (ver Fig. 7.29). La línea está ubicada en un valor $\sigma = \omega_n \zeta$; este locus fue en su momento discutido en clases.

Utilizando la condición de ángulo en el punto de diseño mostrado en la Fig. 7.29 se llega a la ecuación (7.64) la que muestra que la coordenada imaginaria x , del punto de diseño, es igual a $2a$.

$$2 \left[180^\circ - \operatorname{atan} \left(\frac{x}{2a} \right) \right] - 90^\circ = 180^\circ$$

$$2 \operatorname{atan} \left(\frac{x}{2a} \right) = 90^\circ \quad (7.64)$$

$$x = 2a$$

Por lo tanto el punto que entrega un tiempo establecimiento igual a lo solicitado se encuentra ubicado en $-a \pm j2a$. La ganancia del sistema es fácil de encontrar considerando que:

- Distancia del punto al cero= $2a$.
- Distancia del punto a los polos= $2\sqrt{2}a$

Finalmente utilizando (3.13), se concluye que la ganancia del sistema en el punto de diseño es $4a$.

7.4.2.3. Resolución 3.

Muy fácil, el punto de diseño se encuentra ubicado en el punto $-a \pm j2a$. Por lo tanto la frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$. El coeficiente de amortiguamiento es el coseno del ángulo que forma la línea que une el punto de diseño con el origen, con respecto al eje real, es decir $\zeta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447$.

7.4.2.4. Resolución 4.

Se aplica el teorema del valor final. Por lo tanto:

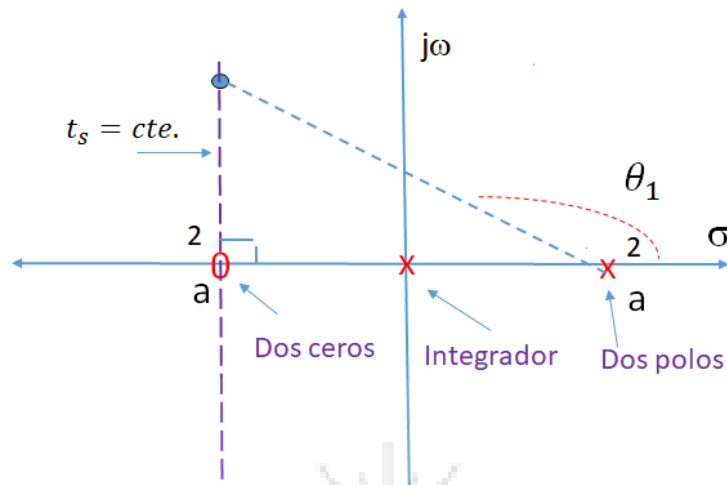


Figura 7.30: Lugar de la raíz correspondiente a una función de lazo abierto compuesta de (7.57) más la malla lag $(s + a)/s$.

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{4a(s+a)}{s^2 - 2as + a^2}} = \frac{1}{5} \quad (7.65)$$

7.4.2.5. Resolución 5.

La nueva malla que se utiliza para obtener cero error en estado estacionario, produce la configuración de polos y ceros que se muestra en la Fig. 7.30.

El requisito es mantener el tiempo de establecimiento. En este caso la función de lazo abierto tiene tres polos y dos ceros. La nueva ecuación de ángulo se puede plantear como se muestra en (7.66)

$$2 \left(180^\circ - \operatorname{atan} \left(\frac{x}{2a} \right) \right) + \left(180^\circ - \operatorname{atan} \left(\frac{x}{a} \right) \right) - 2(90^\circ) = \pm 180^\circ \quad (7.66)$$

Donde el punto de diseño P tiene las coordenadas $P = -a \pm jx$, con x como la incógnita que se debe calcular. Además se tiene:

1. el ángulo $2(180^\circ - \text{atan}(\frac{x}{2a}))$ corresponde al ángulo de los dos polos que se encuentran en semiplano derecho de la Fig. 7.30.
2. el ángulo $(180^\circ - \text{atan}(\frac{x}{a}))$ corresponde al integrador.
3. el ángulo $-2(90^\circ)$ corresponde al ángulo de los dos ceros que se encuentran en el semiplano izquierdo de la Fig. 7.30.

simplificando (7.66) se llega a :

$$-2 \text{atan}\left(\frac{x}{2a}\right) - \text{atan}\left(\frac{x}{a}\right) = \pm 180^\circ \quad (7.67)$$

se define como variable auxiliar $Z = \frac{x}{2a}$. Por lo tanto desde (7.67) se llega a:

$$2 \text{atan}(Z) + \text{atan}(2Z) = 180^\circ \quad (7.68)$$

Utilizando la identidad entregada en el control [ver (7.50)], se reduce $2 \text{atan}(Z)$ y se llega a:

$$\text{atan}\left(\frac{2Z}{1-Z^2}\right) + \text{atan}(2Z) = 180^\circ \quad (7.69)$$

aplicando (7.50) en (7.69) se llega a:

$$\text{atan}\left(\frac{\frac{2Z}{1-Z^2} + 2Z}{\text{Denominador}}\right) = 180^\circ \quad (7.70)$$

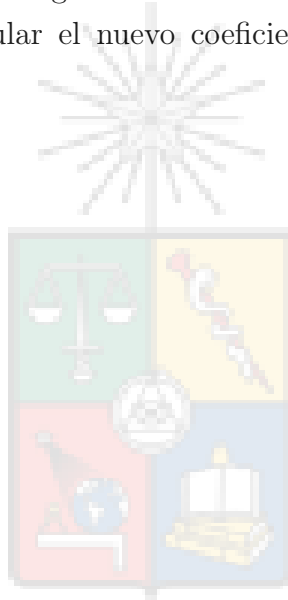
aplicando el operador tangente a ambos lados de (7.70) y considerando que $\tan(\pi) = 0$, se llega a:

$$\frac{2Z}{1-Z^2} + 2Z = 0 \rightarrow Z = \sqrt{2} \rightarrow x = 2\sqrt{2}a \quad (7.71)$$

para calcular la ganancia del sistema se utiliza nuevamente (3.13) utilizando:

- Distancia a los dos polos= $3.4641a$
- Distancia a los dos ceros= $2.8284a$
- Distancia al polo del origen= $3a$

Utilizando (3.13) se llega a que la ganancia del sistema es $K_{sistema} \approx 4.5a$. Con los datos disponibles es fácil calcular el nuevo coeficiente de amortiguamiento como $\zeta = a/(3a) = 0.333$.



Capítulo VIII

DISEÑO DE COMPENSADORES II



Algunos Tópicos Adicionales de Diseño de Compensadores

8.1. Anti-windup

En los sistemas de control, la energía está limitada físicamente por los actuadores o la capacidad del sistema. Por ejemplo la corriente de un devanado debe ser limitada para evitar sobrecalentamientos, el voltaje máximo a aplicar depende de las especificaciones de los dispositivos de electrónica de potencia, la energía a aplicar a un sistema por unidad de tiempo (potencia) está limitada por las capacidades de tuberías, transformadores, capacidad de corriente de los bobinados, aislación de los dieléctricos etc. Es decir existen límites físicos importantes que deben ser considerados en el diseño de un sistema de control.

8.1.1. Límites del Actuador

Infortunadamente, cuando se utilizan métodos de diseño de controladores como Lugar de la Raíz, los límites físicos de la planta no participan en el proceso de

diseño. Por ejemplo, el sistema de control podría ser diseñado para un tiempo de establecimiento t_s o frecuencia natural ω_n imposibles de lograr.

Como un ejemplo, para visualizar la potencia requerida por un actuador considerando un tiempo de establecimiento dado, se muestra el condensador de $2000\mu F$ de la Fig. 8.1. Si el diseñador de un sistema de control busca cambiar el voltaje de este condensador de 20V a 200V con un tiempo de establecimiento de $\approx 1ms$. ¿Cuál debería ser la potencia media del actuador?. Este es un cálculo simple que se muestra en la ecuación (8.1),

$$P \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{C (200^2 - 20^2)}{1ms} = 39.6 \text{ kW} \quad (8.1)$$

En el cálculo efectuado en (8.1) se han despreciado las pérdidas de potencia producidas en la resistencia intrínseca del condensador (ver Fig. 8.1).

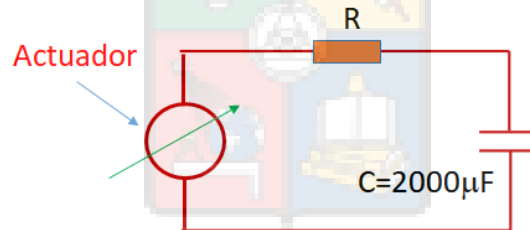


Figura 8.1: La figura muestra un condensador de $2000\mu F$. Los condensadores de alto valor demandan mucha energía en la carga y descarga, por lo tanto si se requiere cargar el condensador rápidamente, se necesita un actuador de alta potencia. La resistencia en serie con el condensador puede ser externa o intrínseca al condensador no-ideal.

Si el actuador tiene una potencia de 5kW, no sería posible cumplir con las condiciones de diseño. Mas aún, no solo el actuador debe cumplir con los requerimientos, también debe hacerlo la planta. En el ejemplo mostrado en la Fig.

8.1, el condensador debería soportar la circulación de una corriente transitoria con un máximo peak superior a 200A, producidas al operar a 20V (punto de origen) y una potencia de 40kW.

Para representar los límites de los actuadores, límites de corrientes máximas, temperaturas nominales de operación, etc. en los diagramas de control se utiliza generalmente el elemento que se muestra en Fig. 8.2.

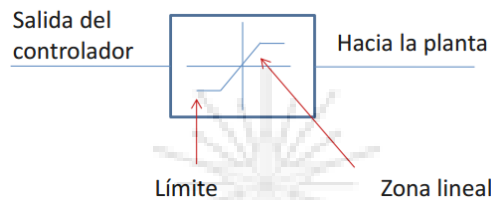


Figura 8.2: Representación de un saturador o limitador habitualmente utilizada en un sistema de control

Los controladores con elementos integradores como controladores PI u otros, habitualmente tienen problemas al ser utilizados con limitadores. Haciendo una analogía con Análisis de Circuitos, un integrador, o polo en el origen, es equivalente a un *condensador* integrando corriente [$C \frac{dV(t)}{dt} = i(t)$]. En el caso de un controlador la *corriente* sería análoga al error $e(s)$. Por lo tanto se debe evitar que este condensador siga integrando cuando el actuador ya se encuentra en el máximo valor de salida. De lo contrario se produce una zona de operación donde el sistema de control queda a lazo abierto. Más aún, descargar este *condensador* (es decir el integrador del PI) requiere un tiempo, a veces considerable, durante el cual el controlador tendrá un mal desempeño.

8.1.2. Desempeño sin Considerar Anti-Winding Up

Esto se puede demostrar con un ejemplo. Suponiendo una planta que tiene una función de transferencia dada por (8.2);

$$G(s) = \frac{10}{s + 10} \quad (8.2)$$

El rango de operación a la entrada de la planta está entre -2 y 2 (unidades cualesquiera). Se diseña un controlador PI considerando $\omega_n=300$ rads/seg., $\zeta=0.707$. Uno de los controladores posible es el de la ecuación (8.3);

$$G_c(s) = 41.83 \frac{(s + 212.13)}{s} \quad (8.3)$$

Inmediatamente un diseñador debería percatarse de que algo podría estar mal con las especificaciones de diseño. La frecuencia natural de la planta a lazo abierto es de 10 rads/seg y se pide que a lazo cerrado el sistema alcance una frecuencia natural de $\omega_n = 300$ rads/seg., es decir 30 veces más rápido que la planta. Se necesita un actuador muy grande para mover con esta velocidad a una planta muy lenta.

Se simula el sistema utilizando el modelo en Simulink que se encuentra en la figura 8.3. La respuesta del sistema considerado entrada escalón unitario se muestra en la Fig. 8.4 y 8.5. El gráfico superior de la Fig. 8.4, muestra la evolución del error. La parte proporcional del controlador, que no tiene dinámica (ver gráfico medio) tiene exactamente la misma forma que el error. Finalmente en el gráfico inferior se muestra la salida integral, que es la que ocasiona el problema ya que tiene una dinámica lenta. Cuando el error cruza por cero (ver línea horizontal), la salida integral ha alcanzado un valor superior a las 200 unidades, en circunstancias que el actuador está diseñado para solo dos. La curva de descarga del integrador es relativamente lenta y termina de descargarse en $t=0.28$ seg. aproximadamente.

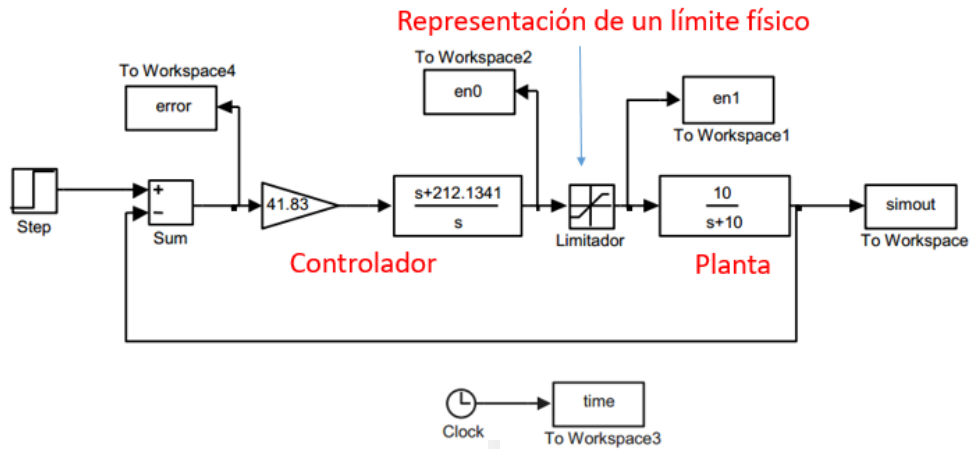


Figura 8.3: Modelo en Simulink de la planta mostrada en (8.2) controlado utilizando el compensador de (8.3) y realimentación unitaria. El limitador esta ajustado para entregar una salida lineal entre -2 y 2.

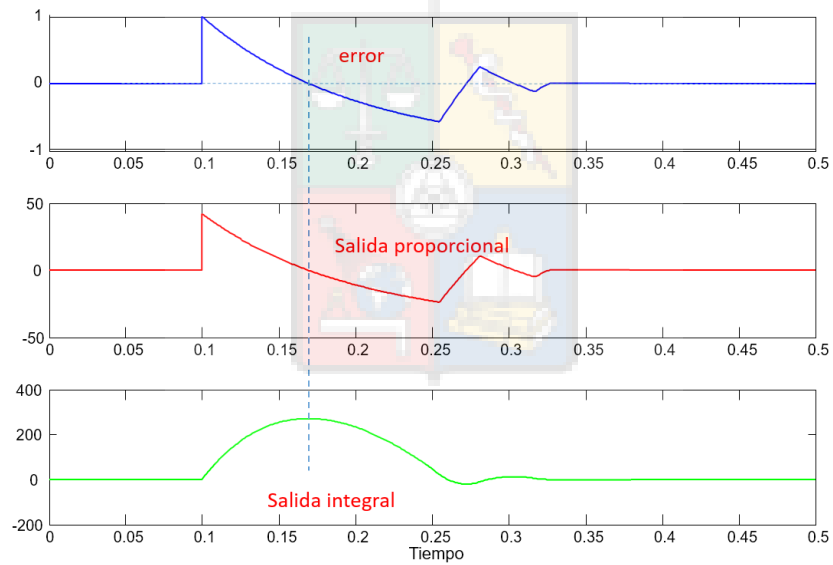


Figura 8.4: Respuesta del sistema de la Fig. 8.3. El primer gráfico muestra la evolución del error. El segundo muestra la salida de la parte proporcional del controlador P, el tercer gráfico muestra la salida del integrador.

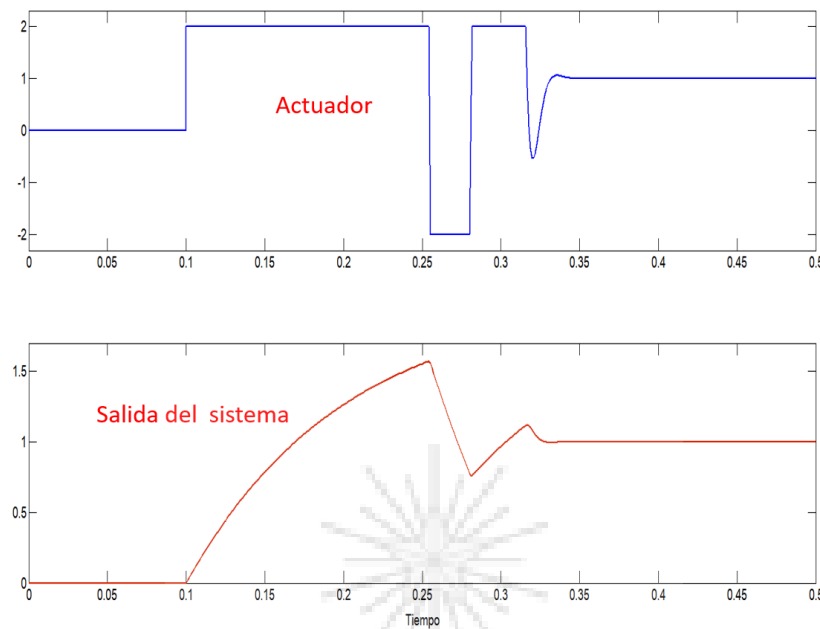


Figura 8.5: Salida del actuador y de la variable controlada correspondientes al sistema de la Fig. 8.3. El primer gráfico muestra la salida del actuador. El segundo muestra la salida del lazo de control.

La salida del actuador se muestra en la parte superior de la Fig. 8.5. Debido a la alta dinámica del controlador el actuador se comporta casi como un controlador de histéresis u On/Off (llamado también controlador bang-bang en la literatura anglosajona). Cuando el actuador está saturado el sistema ya no es lineal y es equivalente a tener la planta a lazo abierto conectada a una fuente de excitación fija.

La salida del sistema se muestra en la parte inferior de Fig. 8.5. La respuesta es lenta y con un sobrepaso alto de 60% aproximadamente.

8.1.3. Desempeño Considerando un Método de Anti-WindUp para Controladores Tipo PI

Las respuestas mostrada en las figuras 8.4 y 8.5 son inadecuadas y los problemas están relacionados principalmente con un incorrecto diseño. Como se señaló anteriormente y se repite a continuación, al fijar el punto de diseño se debe tener en cuenta los límites físicos del sistema, capacidad del actuador, potencia nominal de la planta, etc. Para reducir los problemas relacionados con la saturación de los integradores se utilizan esquemas de anti-winding up (llamados también anti-windup), pero eso por supuesto no sustituye las buenas prácticas de diseño, solo aminora algunos de los efectos negativos de diseñar incorrectamente.

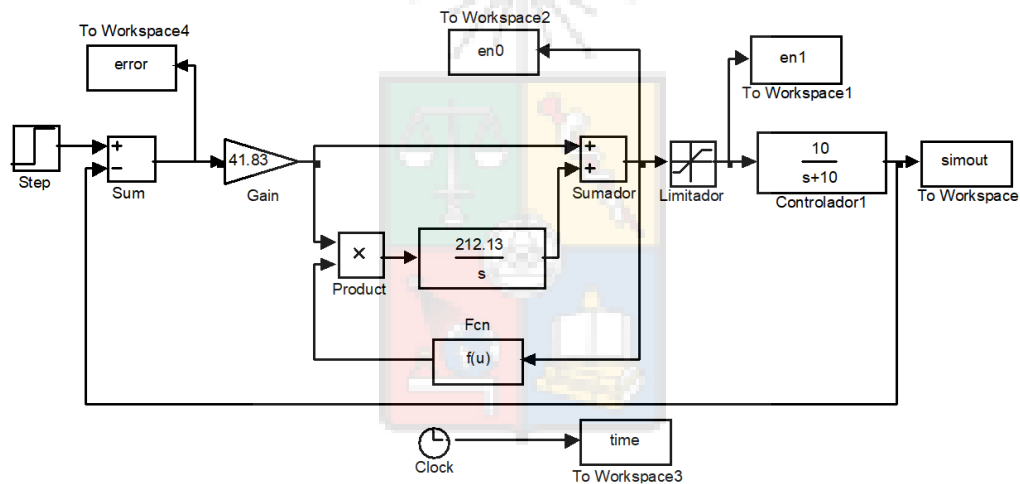


Figura 8.6: Sistema de control correspondiente a la figura 8.3 pero considerando anti-windup. Este modelo es válido para fines de simulación solamente ya que la implementación en un sistema de control real se efectúa a través de código, por ejemplo en lenguaje *C* y usualmente es bastante simple de implementar (menos complicado que lo que parece en la figura). El antiwinding-up mostrado es aplicable principalmente a controladores PI.

Para implementar antiwindup de un controlador PI, el controlador se separa en su parte proporcional e integral de la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_p \frac{(s + a)}{s} = K_p \left[1 + \frac{a}{s} \right] = K_p + K_p \frac{a}{s} \quad (8.4)$$

Para evitar los problemas relacionados con el integrador se utiliza anti-windup, lo que significa que el integrador se detiene cuando la salida del controlador esta fuera de rango que permite el actuador o la planta. Fig. 8.6 muestra el sistema de control de la Fig. 8.3 considerando antiwindup. Como se mencionó anteriormente, el controlador PI se ha dividido en dos partes. La parte proporcional y la parte integral. La entrada al componente integral se multiplica por uno o cero, dependiendo si la salida del controlador esta en el rango permitido a la entrada de la planta. La función $f(u)$ utilizada en la figura es una función lógica de la forma:

$$f(u) = (u < \max)^*(u > \min) \quad (8.5)$$

y en este caso $\max = 2$ y $\min = -2$.

La Fig. 8.7 muestra la respuestas obtenidas con el esquema de control propuesto. La principal diferencia es que el componente integral casi no funciona en la parte inicial (después que se aplica el escalón unitario), debido a que el componente proporcional por sí solo satura el actuador. El componente integral actúa al final de la respuesta dinámica para asegurar cero error en estado estacionario.

La función $f(u)$ de (8.5) es igual a uno cuando $u(t)$, la salida del controlador, esta en el rango $[\min, \max]$ del saturador mostrado en la fig. 8.2; en todo otro caso $f(u)=0$. Por supuesto que otras funciones pueden ser utilizadas pero este esquema antiwinding-up funciona relativamente bien en simulación (para controladores PI). Además la función $f(u)$ se utiliza solo para fines de simulación con Simulink. La implementación de un anti-windup en un sistema de control programado en C (por ejemplo) se realiza habitualmente utilizando instrucciones de programación como *if*,

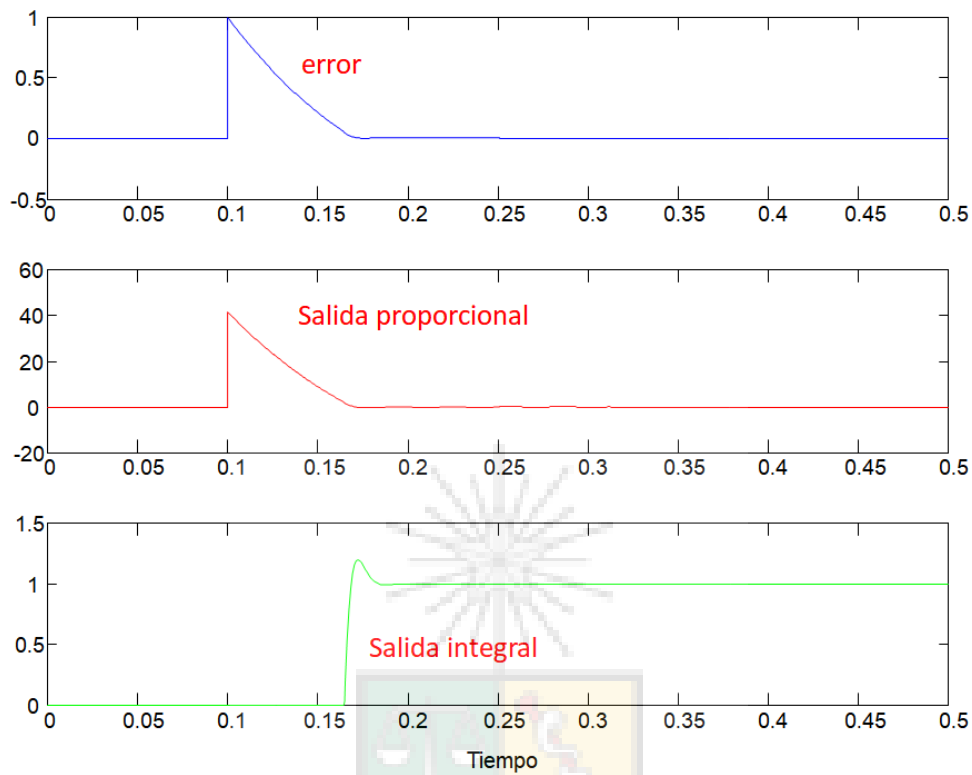


Figura 8.7: Respuesta del sistema de la Fig. 8.6 que considera un esquema básico de anti-windup. El primer gráfico muestra la evolución del error. El segundo muestra la salida de la parte proporcional del controlador P, el tercer gráfico muestra la salida del integrador. Se puede observar las apreciables diferencias existentes con respecto a las respuestas mostradas en la Fig. 8.4.

else then, etc. y es más simple de implementar que lo que se encuentra en la Fig. 8.6.

Finalmente la Fig. 8.8, muestra la salida del actuador y la salida del sistema de control. El tiempo de establecimiento se ha reducido considerablemente, desde $t \approx 0.25$ s a $t \approx 0.07$ s. El tiempo que el actuador se encuentra saturado también se ha reducido ostensiblemente.

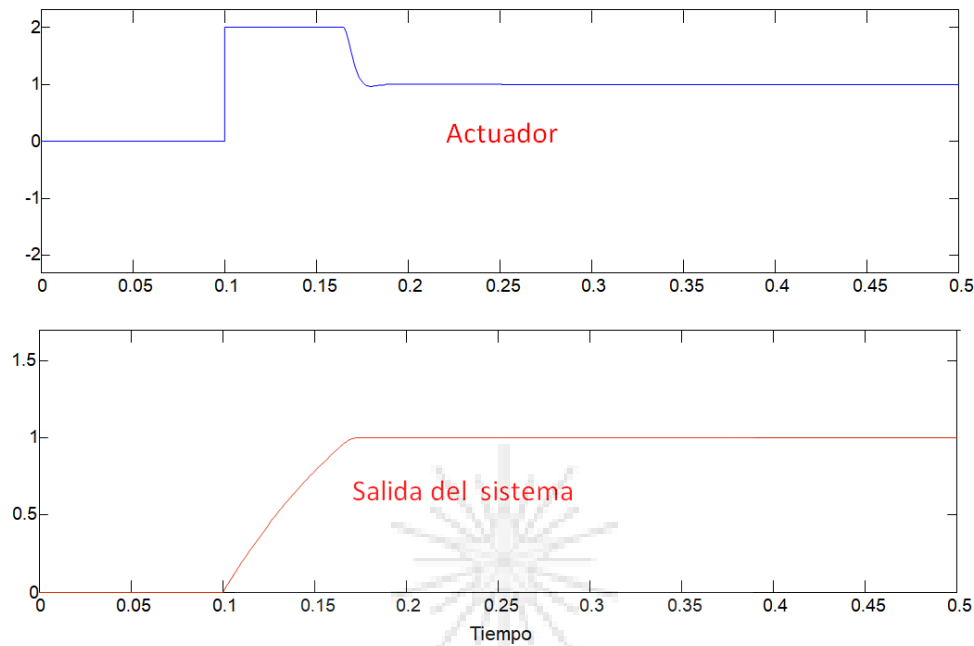


Figura 8.8: Respuesta del sistema de la Fig. 8.6 que considera un esquema básico de anti-windup. El primer gráfico muestra la salida del actuador. El segundo muestra la salida del sistema de control. Se puede observar que el tiempo de establecimiento y sobrepaso son substancialmente menores a los valores alcanzados en la Fig. 8.5.

8.2. Un Esquema de Anti-WindUp más General

El esquema antiwinding-up enseñado anteriormente es aplicable a controladores PI pero tiene problemas de implementación cuando se utilizan otras topologías de controladores. Esto se debe a que pueden existir varios polos lentos, además de integradores y es difícil separar el compensador de la forma realizada en la ecuación (8.4). Si se utiliza por ejemplo el controlador con redes de adelanto atraso propuesto en la ecuación (6.20), no se podría utilizar adecuadamente el esquema anti-windup mostrado en la Fig. 8.6.

Existen algunos esquemas de control anti-windup generalizados, que pueden ser aplicados a más topologías de controladores. En esta sección se discute uno de ellos aplicable a controladores bipropios y que está basado en apuntes de la Universidad de Newcastle (Australia).

Sea $K(s)$ la función de transferencia del controlador y ésta es bipropia, lo que significa que el controlador y su inversa son funciones propias. La función de transferencia se puede separar en dos partes, tal como se muestra en la ecuación (8.6);

$$\begin{aligned} K(s) &= K_{\infty} + \bar{K}(s) \\ K_{\infty} &= \lim_{s \rightarrow \infty} K(s) \end{aligned} \quad (8.6)$$

El esquema de anti-windup sugerido se basa en la Fig. 8.9. El controlador se ha separado en dos partes, toda la parte dinámica se encuentra en el lazo de realimentación, mientras que en el lazo directo se encuentra una constante.

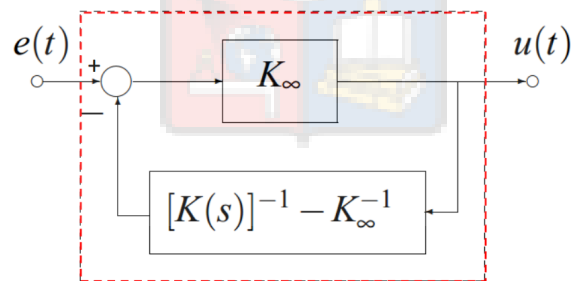


Figura 8.9: Diagrama de bloques equivalente a la función de transferencia de (8.6)

Es posible demostrar que el esquema mostrado en la Fig. 8.9 es igual al controlador original. Esto se realiza en la ecuación (8.7);

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{K_{\infty}}{1 + ([K(s)]^{-1} - K_{\infty}) K_{\infty}} \\ &= \frac{K_{\infty}}{[K(s)]^{-1} K_{\infty}} = K(s). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Además de ser bipropio, el controlador no debe poseer polos o ceros en el semiplano derecho, para evitar que $K(s)^{-1}$ sea inestable [ver (8.7)]. La forma en que opera el anti-windup en este esquema, es limitando el esfuerzo de control de la parte dinámica del compensador. El término K_{∞} es una constante proporcional que tiene dinámica instantánea; la otra parte del sistema de control $([K(s)]^{-1} - K_{\infty})$, puede contener elementos con dinámica lenta como integradores y polos ubicados cerca del origen. Limitar la entrada de señal al término lento, es similar a lo realizado en la Fig. 8.6.

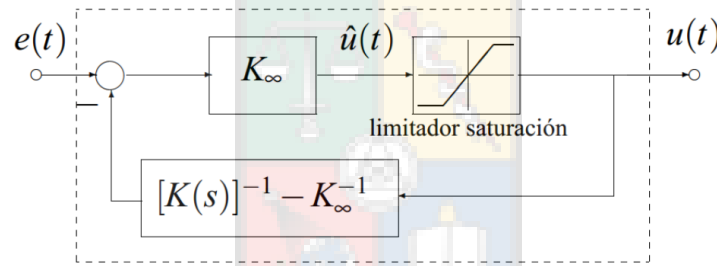


Figura 8.10: Implementación del esquema de anti-windup propuesto para controladores con funciones de transferencias que son bipropias.

La Fig. 8.10 muestra el sistema de control incluyendo anti-windup. Una representación del limitador físico se utiliza en cascada con el término K_{∞} , limitando la señal entregada a la parte dinámica del controlador.

8.2.0.1. Implementación del Antiwinding-Up para un Controlador PI

Considerando que el controlador PI es muy utilizado en algunas áreas de trabajo, en esta subsección se muestra la implementación de este algoritmo antiwinding-up aplicado a este controlador.

Suponiendo un simple controlador PI, que tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_p \frac{(s + a)}{s} \quad (8.8)$$

El diagrama de la Fig. 8.10 se implementa para el caso del controlador PI, en la Fig. 8.11.

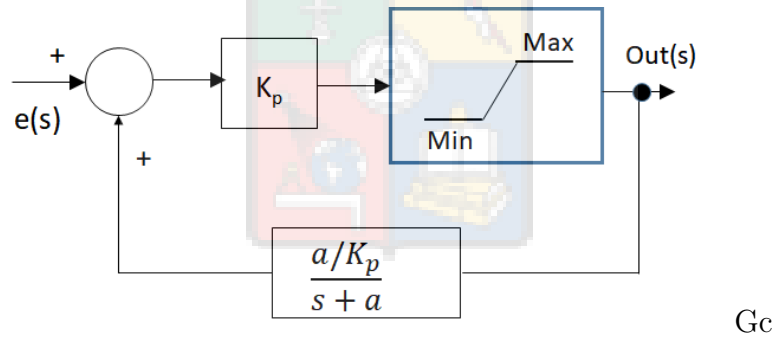


Figura 8.11: Implementación del esquema de anti-windup propuesto para el controlador PI con la función de transferencia de (8.8).

El uso de este esquema de anti-windup, aplicado a un controlador PI, se discute en la Sección 9.2.

8.2.1. Ejemplo de Aplicación Para un PID con un Polo Extra

Se tiene la planta de (8.9)

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)} \quad (8.9)$$

Se diseña un controlador PID con un polo extra ($\omega_n \approx 10\text{rads/seg}$, $\zeta=0.65$) con la función de transferencia mostrada en (8.10)

$$K(s) = \frac{50(s+1)(s+2)}{s(s+13)} \quad (8.10)$$

Utilizando las ecuaciones (8.6) y (8.10), se tiene que $K_\infty = 50$ y la parte dinámica del controlador es entregada por (8.11):

$$[K(s)]^{-1} - K_\infty^{-1} = \frac{(10s-2)}{50(s+1)(s+2)} \quad (8.11)$$

Finalmente la implementación del sistema de control, incluyendo anti-windup, es mostrado en la Fig. 8.12. Se aplica una entrada escalón unitario, considerando que el actuador a la entrada de la planta limita su salida entre ± 3 unidades. Los resultados sin considerar y considerando anti-windup se muestran en la Fig. 8.13 y Fig. 8.14 respectivamente. La perturbación en esta prueba se considera como $d(t) = 0 \forall t$.

En este caso las diferencias entre sin considerar/considerar anti-windup no son tan pronunciadas como las que se producen en el caso anterior, en que existía una muy alta diferencia entre la respuesta de frecuencia de la planta a lazo abierto con respecto a la respuesta a lazo cerrado (30 veces). Para este caso la diferencia de velocidades es ≈ 10 veces. No obstante lo anterior, el tiempo de establecimiento mostrado en la

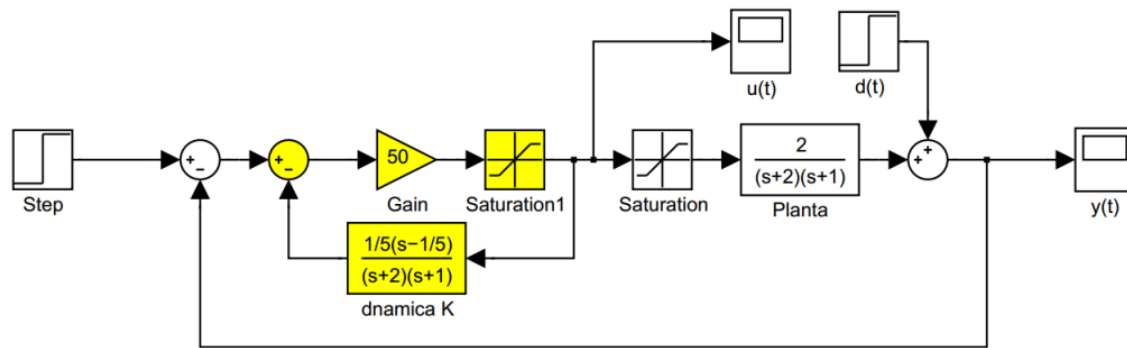


Figura 8.12: Implementación del esquema de anti-windup generalizado para el controlador de (8.10). En amarillo se encuentra todo lo que se implementa en el compensador. El resto corresponde a la planta. La entrada $d(t)$ es una perturbación (d es por disturbance).

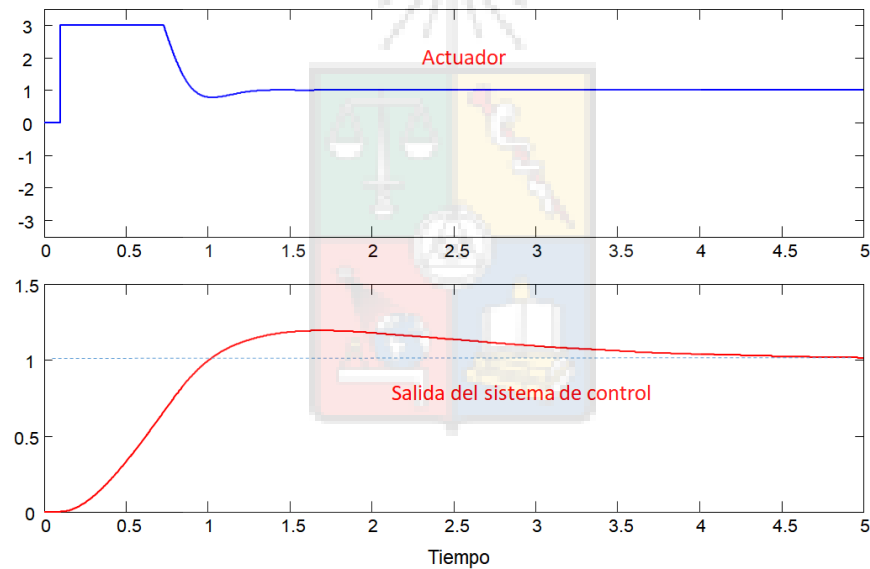


Figura 8.13: Resultados de simulación sin considerar anti-windup para el sistema de control de la Fig. 8.12.

Fig. 8.13 es cercano a los 4 segundos. En el otro caso, cuando se utiliza el esquema anti-windup (ver la Fig.8.14) el tiempo de establecimiento es menor a 1.25 segundos.

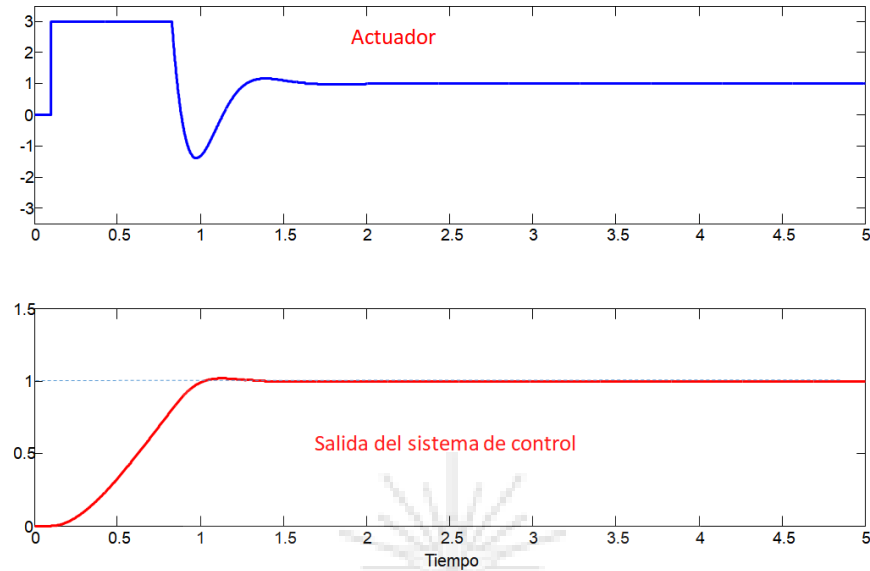


Figura 8.14: Resultados de simulación considerando el esquema de anti-windup generalizado aplicado al sistema de control mostrado en la Fig. 8.12.

8.2.2. Consideraciones de Ruido en Sistemas con Alta Frecuencia Natural

El diseñar un sistema de control, con una velocidad de respuesta mucho mayor a la que permite el actuador, produce otros problemas. Al aumentar la frecuencia natural de un sistema de control, se aumenta también su ancho de banda. Sin embargo, esto no necesariamente se refleja en una alta velocidad de respuesta ya que el actuador no cuenta con la potencia necesaria para lograr ésto.

Aumentar el ancho de banda innecesariamente no es adecuado. Esto se debe a que existe siempre ruido de alta frecuencia que proviene de los transductores, electrónica de potencia, etc. Al aumentar la respuesta de frecuencia se permite la entrada de mayores fuentes de ruido al sistema, tal como se muestra la Fig. 8.15. Ese ruido se amplifica y puede propagarse por los distintos componentes del sistema de control,

produciendo una respuesta inadecuada.

En conclusión, un diseño más rápido que lo que permiten los componentes del sistema de control, no logra aumentar la velocidad de respuesta del sistema y puede redundar en un sistema bastante más ruidoso.

Esto no es nuevo para nosotros y ya fue discutido en la la Sección 3.6 utilizando la Fig. 3.22 y las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria. La Fig. 8.15 es otra forma de ver lo mismo ya analizado.

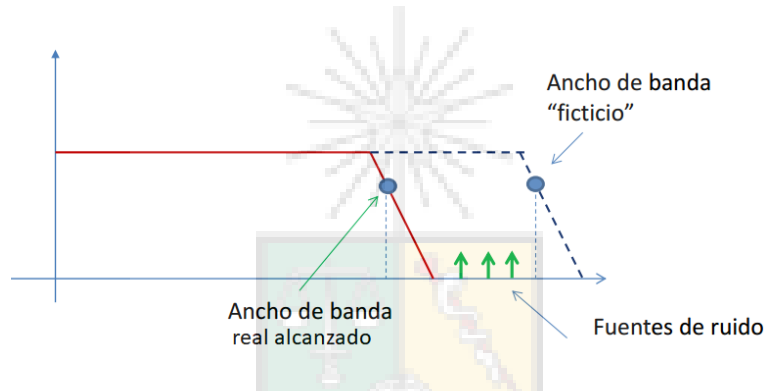


Figura 8.15: Efectos de aumentar el ancho de banda del sistema de control y que debido a las limitaciones físicas del sistema no necesariamente se reflejará en mejorar la velocidad de respuesta. Con mayor ancho de banda se aumenta innecesariamente el ruido. En este gráfico la abscisa es la frecuencia de las señales de ruido y la ordenada es la amplitud o ganancia a la salida del sistema SISO.

8.3. Lazos de Control Anidados

Existen algunas aplicaciones donde se necesitan lazos de control anidados. Los ejemplos mas típicos son los controladores de máquinas eléctricas y también en filtros LC y LCL (inductancia-condensador-inductancia) que son muy utilizados en micro-redes, ya que tienen mejor desempeño.

Los lazos anidados son la solución existente en los diseños SISO (a Single-Input-Single-Output), para controlar sistemas que son MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output). Por ejemplo, en el caso de las máquinas eléctricas se deben regular dos salidas, la corriente y la velocidad, y en los filtros L-C, también se deben regular dos salidas, el voltaje y la corriente.

¿Cómo se puede controlar con herramientas SISO de control lineal (ver Fig. 6.1) una planta que tiene dos o más salidas que requieren regulación?. La respuesta es simple, se asume que los lazos están desacoplados por velocidad de respuesta. Si un lazo de control es muy rápido y el otro es muy lento, cuando se diseña el lazo lento, se puede asumir que el lazo rápido es instantáneo; en el otro caso, cuando se diseña el lazo rápido, se puede asumir que el lazo lento tiene una salida constante. Esta estrategia se puede utilizar por ejemplo en máquinas eléctricas que pueden tener hasta tres lazos de control anidados, aunque normalmente se utilizan dos. Estos lazos son:

1. Lazo de velocidad, el de más baja frecuencia natural.
2. El lazo de control del flujo, velocidad de respuesta intermedia.
3. El lazo de corriente, el de mayor velocidad de respuesta.

La figura 8.16 muestra el sistema de control típicamente utilizado para regular la velocidad de una máquina eléctrica. Internamente siempre se encuentran los lazos mas rápidos, en este caso existe un solo lazo interno que es el de control de corriente; externamente se encuentra el lazo de velocidad que es el más lento. En los sistemas SISO normalmente se utiliza un solo actuador que está ubicado en el lazo interno.

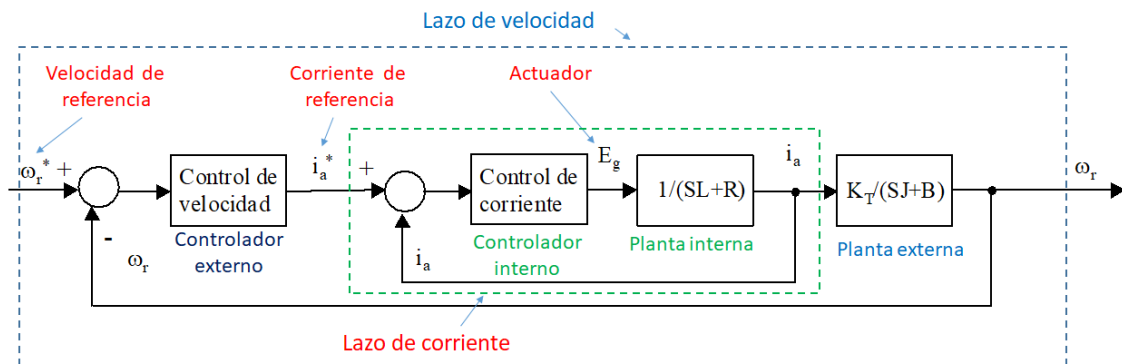


Figura 8.16: Sistema de lazos anidados habitualmente utilizado para regular la velocidad y corriente de una máquina eléctrica.

8.3.1. Ejemplo. Metodología de Diseño del Sistema de Control de una Máquina de Corriente Continua

Para ilustrar el funcionamiento de lazos de control en cascada se analizará el caso de un sistema de control para una máquina de corriente continua con excitación separada. La máquina se muestra en la figura 8.17; se asume que todos los alumnos de este curso conocen la teoría básica de máquinas eléctricas.

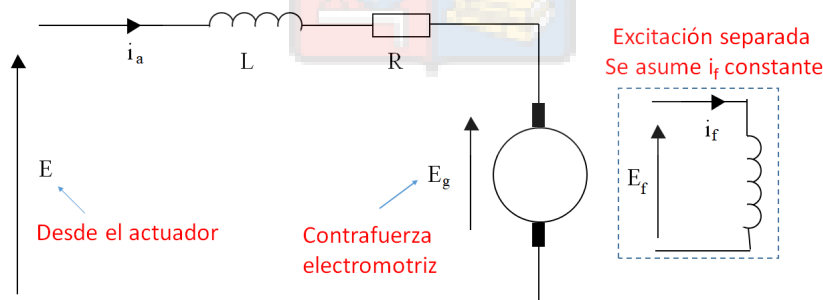


Figura 8.17: Componentes de una máquina de corriente continua. La excitación se asume separada y se muestra en la parte derecha de la figura. La armadura y sus componentes se encuentran en la parte izquierda.

Las ecuaciones de la máquina de corriente continua son mostradas en (8.12).

$$\begin{aligned}
 E_g &= K_T \omega_r \\
 E &= R i_a + L \frac{di_a}{dt} + K_T \omega_r \\
 T_e &= K_T i_a \\
 T_e &= J \frac{d\omega_r}{dt} + B \omega_r
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Donde:

- K_T es una constante que depende de aspectos constructivos del motor y del flujo de operación. Si se opera con flujo constante, que es lo más utilizado entonces, al menos teóricamente, K_T no varía.
- T_e es el torque eléctrico o par producido en el eje.
- Las constantes R y L son la resistencia e inductancia de la armadura. Son parámetros de la puerta eléctrica de la máquina de corriente continua.
- La carga mecánica puede diferir dependiendo de la aplicación. En (8.12) se asume una carga mecánica de primer orden, donde las constantes J y B representan la inercia rotacional y el coeficiente de fricción viscoso respectivamente.
- ω_r es la velocidad rotacional de la máquina.

El diagrama de bloques del control de una máquina de corriente continua se muestra en la figura 8.18. Se tienen dos lazos, el externo regula la velocidad y el interno regula la corriente. El actuador se encuentra en el lazo interno.

Existe un acoplamiento entre el lazo interno y el lazo externo que se obtiene al analizar (8.12), segunda ecuación desde arriba. Sin embargo eso es habitual en lazos

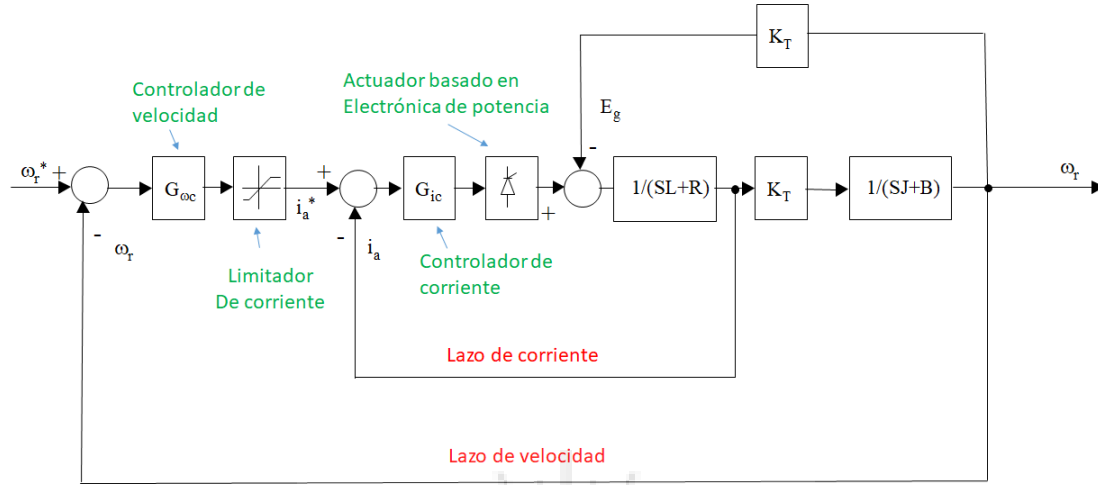


Figura 8.18: Diagrama de control de una máquina de corriente continua utilizando lazos anidados.

anidados y no produce un problema para efectuar el diseño considerando que los lazos están desacoplados. Para realizar un diseño ideal se supone lo siguiente:

1. El lazo interno es instantáneo y entrega cero error en estado estacionario a la referencia de entrada.
2. El lazo externo es extremadamente lento comparado con la velocidad del lazo interno.

Evidentemente esas condiciones no son realizables, pero si la velocidad del lazo interno es 10 veces (o más) superior a la del lazo externo, entonces se pueden asumir que ambos lazos están efectivamente desacoplados. En el caso de la máquina de corriente continua, es posible obtener esta diferencia de velocidades entre lazos, ya que habitualmente la constante de tiempo mecánica τ_m es mucho mayor a la constante de tiempo eléctrica τ_e . Esto se muestra matemáticamente en (8.13):

$$\frac{L}{R} \ll \frac{J}{B} \quad (8.13)$$

Para ejemplarizar el significado físico de (8.13), se puede señalar que en una máquina de tamaño medio (kW), la corriente de armadura se podría cambiar entre $0 - I_n$ en 5ms-10ms; sin embargo, debido a los límites propios del sistema (incluyendo el actuador) es difícil cambiar la velocidad entre $0 - \omega_n$ en menos de 0.5 seg. Para el diseño de los lazos de control se utiliza habitualmente una frecuencia de 50Hz a 150Hz (depende del actuador y del ruido) para el lazo de corriente y alrededor de 5-15Hz para el lazo de velocidad. El coeficiente de amortiguamiento utilizado es habitualmente cercano a [0.7-0.8] pero esto depende de la aplicación.

8.3.2. Diseño del Lazo Externo de la Máquina de Continua

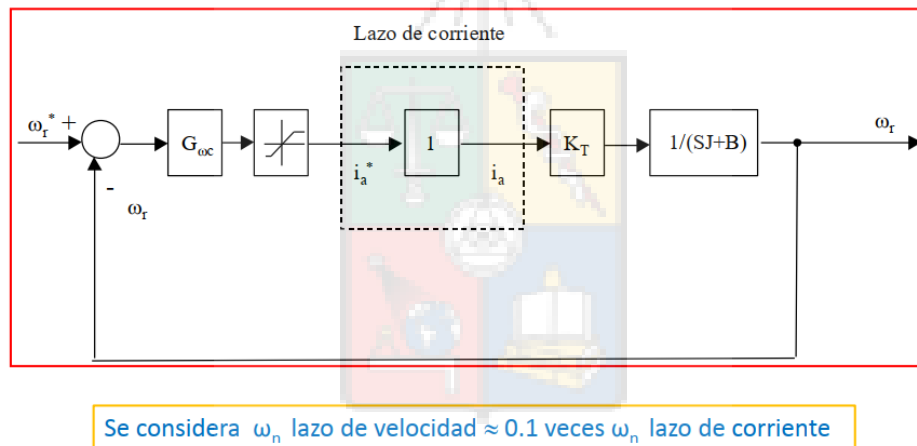


Figura 8.19: Diagrama de control de una máquina de corriente continua asumiendo que el lazo interno es instantáneo

El diseño del lazo de velocidad se realiza considerando que el lazo de corriente es muy rápido y que además se encuentra diseñado para cero error en estado estacionario a entrada escalón (ver Fig. 8.19). En este caso se puede considerar el lazo de corriente como un bloque de ganancia unitaria. En otras palabras, desde el punto de vista del lazo de velocidad, toda corriente de referencia i_a^* a la entrada del lazo de corriente

aparece instantáneamente a la salida del lazo. En estas condiciones el lazo de corriente es representado como un bloque de ganancia uno (ver Fig. 8.19) y el lazo de velocidad puede ser analizado como de una entrada, una salida.

Si se utiliza un controlador PI (otras soluciones son posibles), se puede diseñar muy fácilmente el sistema de control de velocidad utilizando el lugar de la raíz que se muestra en la Fig. 8.20.

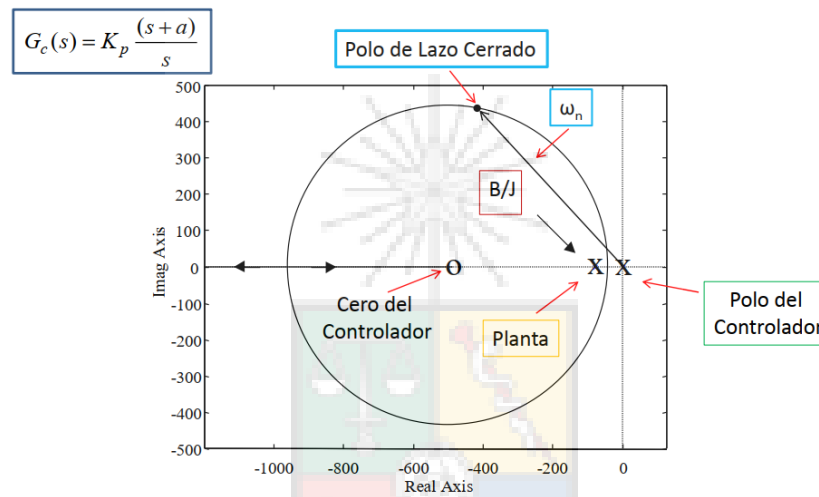


Figura 8.20: Lugar de la raíz utilizado para diseñar el lazo externo.

¿Qué sucede si el lazo es de alta dinámica y no tiene cero error en estado estacionario?. En este caso el bloque que representa al lazo interno (ver Fig. 8.19) es equivalente a una ganancia K (ver Fig. 8.21) igual a $\frac{\partial i_a}{\partial i_a^*}$. Esta ganancia adicional debe ser tomada en cuenta para calcular la ganancia del controlador del lazo externo. Sin embargo, desde el punto de vista de la dinámica el diseño sigue siendo desacoplado. Es decir, si el diseño se realizó utilizando una alta diferencia de velocidades entre el lazo interno y externo, entonces el lazo interno puede representarse como *instantáneo* con respecto al externo.

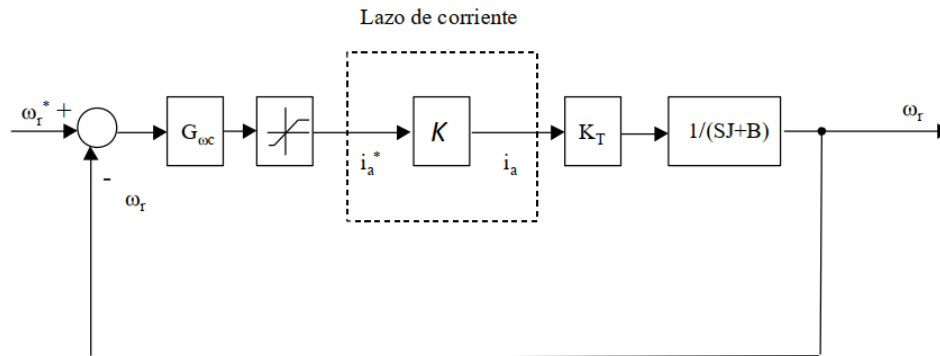


Figura 8.21: Representación del sistema cuando el lazo interno no tiene cero error en estado estacionario.

Cuando el lazo interno no tiene cero error en estado estacionario, ¿se logra cero error en estado estacionario en la velocidad de rotación?. Si el controlador externo tiene un integrador, entonces existe cero error en estado estacionario (a entrada escalón) en el lazo externo. Sin embargo, el seguimiento de la referencia de corriente, por parte del lazo interno, será imperfecto.

Un ejercicio que muestra el desempeño de lazos anidados, considerando que el lazo interno no tiene cero error en estado estacionario al seguimiento de la referencia, se discute en la Sección 9.1.

En una aplicación de control de máquinas, habitualmente ambos lazos poseen cero error en estado estacionario y los controladores consideran anti-windup en la implementación.

8.3.3. Diseño del Lazo Interno de la Máquina de Continua

Para efectuar el diseño del lazo interno de control, se asume que el lazo externo es lento y puede asumirse que la velocidad no cambia. Por lo tanto E_g se mantiene constante y el acoplamiento entre lazos se puede considerar como una entrada aislada del lazo de velocidad o una perturbación, que como tal no afecta la posición de los polos de lazo cerrado. Esto ya se discutió en la Sección 3.5, [ver Fig. 3.21 y (3.49)]. Con estas consideraciones el lazo interno queda como se muestra en la Fig. 8.22; donde la corriente de entrada al lazo, i_a^* , se asume constante.

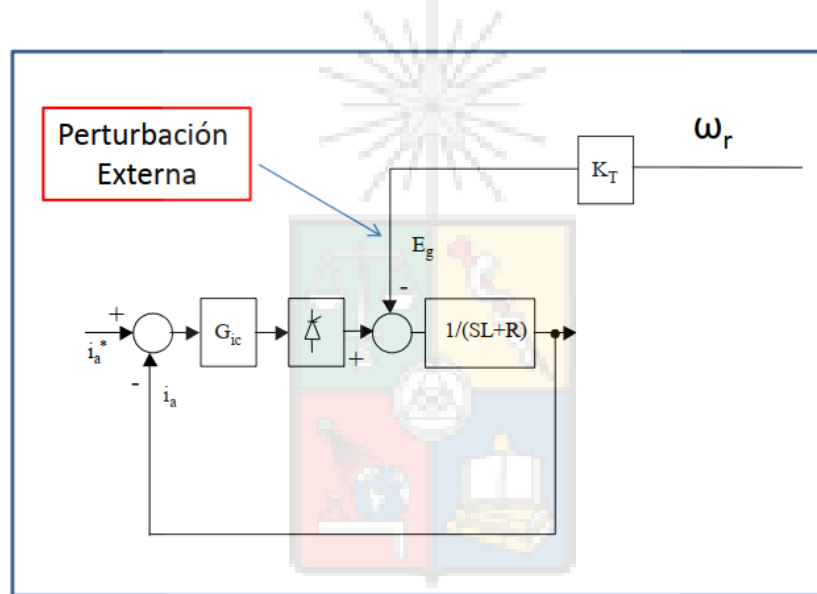


Figura 8.22: Lazo interno simplificado, considerando que el lazo externo es muy lento.

Utilizando la Fig. 8.22, se obtiene el lugar de la raíz que se encuentra en la Fig. 8.23, donde el controlador utilizado es un PI, por supuesto otras soluciones son posibles.

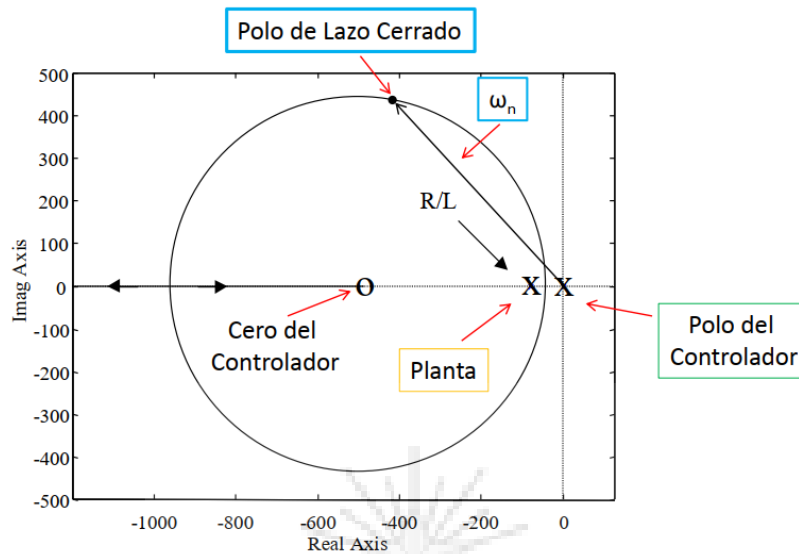


Figura 8.23: Lugar de la raíz utilizado para diseñar el controlador del lazo interno

8.3.4. Comentarios Acerca de la Diferencia de Velocidades Entre Lazo Interno y Externo

Como ya se discutió al inicio de esta sección, el utilizar frecuencias naturales muy diferentes en el lazo interno y externo, permite que se pueda diseñar utilizando técnicas SISO sistemas en que se debe regular, a veces con cero error en estado estacionario, varios estados simultáneamente. Esto es apropiado, por ejemplo, en máquinas eléctricas donde la diferencia de constantes de tiempo entre la puerta mecánica y la puerta eléctrica es alta. Infortunadamente esto no es así en todos los sistemas; por ejemplo, en motores de baja inercia, como servomotores, probablemente no es posible asumir que la dinámica de la velocidad sea considerablemente más lenta que la dinámica del lazo de corriente. Si las dinámicas son comparables, entonces el lazo interno no puede representarse como uno o una constante como se muestra en las figuras 8.19 y 8.21; tampoco se puede despreciar la influencia del lazo externo en el interno, como se hizo en la Fig. 8.22. En este caso lo aconsejable es utilizar

técnicas de diseño MIMO.

La sugerencia de utilizar una razón de 10 entre la velocidad del lazo interno con respecto al externo es una *receta*. Dependiendo del sistema, una razón de 7 o incluso 5 veces, podría funcionar adecuadamente. Sin embargo, se debe tener presente que mientras más se baje la razón entre las velocidades de los lazos internos y externos, menos desacoplados estarán estos lazos y mas imperfecto es el diseño SISO de la estructura MIMO.

Un ejemplo de diseño y simulación del control de una máquina de corriente continua se encuentra en la Sección 9.2.

8.4. Retardos de Transporte

Un retardo de transporte está definido matemáticamente como:

$$G(s) = e^{-sT} \quad (8.14)$$

Donde T es el retardo en segundos. Cuando a una señal se le aplica un retardo, la señal no cambia su forma pero se retarda en T segundos. A modo de ejemplo se aplica un retardo a un función de lazo abierto de la forma mostrada en (8.15);

$$\frac{a}{s + a} e^{-sT} \quad (8.15)$$

En este caso la respuesta tendría la forma que se muestra en la Fig. 8.24. La misma respuesta pero considerando un tiempo de retardo $T = 0$ se muestra en la Fig. 8.25

Cómo se observa en la Fig. 8.24, el sistema con retardo no responde

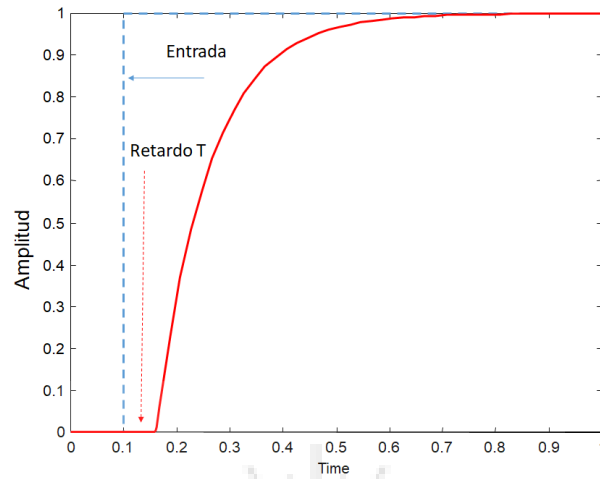


Figura 8.24: Respuesta de un sistema compuesto de una planta de primer orden y un retardo de transporte a un escalón unitario. Se puede observar como el retardo de T segundos utilizado en (8.15) afecta la respuesta. Aparte de ese retardo la respuesta no tiene diferencias con respecto a la obtenida con el mismo sistema de primer orden, pero sin retardo.

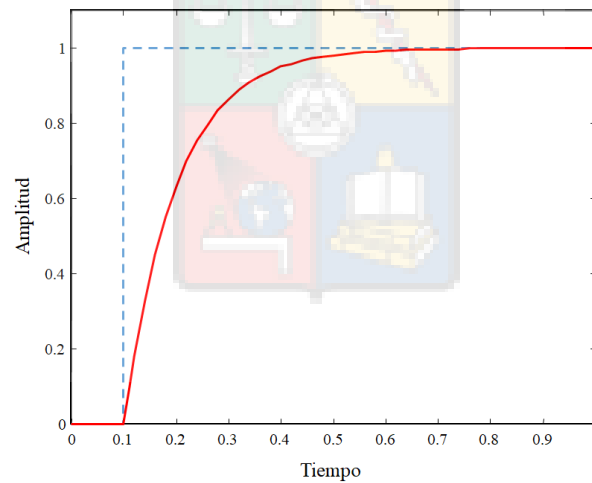


Figura 8.25: Respuesta del sistema considerando $T = 0$ en (8.15). Como se mencionó, la forma de la respuesta es idéntica a la obtenida en la Fig. 8.24, pero la respuesta de la planta comienza en el instante en que se aplica la entrada escalón.

instantáneamente a la excitación de entrada sino que retarda en T segundos su respuesta. Los retardos son comunes en los sistemas de control; por ejemplo en el ámbito de micro-redes las condiciones de un canal de comunicaciones puede retardar el intercambio de acciones de control desde un punto a otro existiendo retardos de tiempo variable. En otros ámbitos de la ingeniería eléctrica, los retardos pueden ser producidos por dispositivos como tiristores, choppers, conversores que utilizan electrónica de potencia y otros elementos.

Los retardos y sus efectos en los sistemas de control, no puede analizarse fácilmente cuando se utiliza lugar de la raíz. Este método utiliza polos y ceros para efectuar el análisis y el retardo e^{-sT} no los contiene. Para llevar el retardo e^{-sT} a una función de transferencia, habitualmente se utiliza la aproximación de Padé.

8.4.1. Aproximación del retardo utilizando Padé

Las aproximaciones de Padé fueron propuesta por el matemático francés Henri Padé en 1892. A diferencia de otras series, como las de Taylor por ejemplo, las aproximaciones de Padé son racionales y se puede demostrar que dado un orden, las aproximaciones de Padé son las mejores aproximaciones racionales posibles.

La aproximación del retardo, utilizando Padé de primer orden se obtiene como:

$$e^{-sT} = \frac{e^{-\frac{sT}{2}}}{e^{\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} \quad (8.16)$$

y utilizando Padé de segundo orden se tiene:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{12}s^2}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{12}s^2} \quad (8.17)$$

Padé no es la única aproximación polinomial de e^{-sT} . Existen otros métodos utilizados como por ejemplo series de Taylor truncadas. Debe recordarse que al utilizar (8.16)-(8.17) se está aproximando el retardo y eso es válido cuando el retardo es relativamente pequeño comparado con la frecuencia natural.

Aproximaciones de Padé de mayor orden son posibles. MATLAB utiliza el comando *pade*(T, n) para generar representaciones de Padé de orden n y T seg. de retardo en forma simple. El principal problema de utilizar expansiones de alto orden, es que la aproximación de Padé agrega n ceros y n polos a $G(s)H(s)$, complicando el lugar de las raíces y haciendo más complejo el diseño gráfico. Sin embargo, la ventaja de aproximaciones de alto orden es exactitud de la aproximación con respecto a (8.14).

Resultados exactos de la influencia del retardo en un sistema de control, se pueden obtener al diseñar utilizando métodos de respuesta de frecuencia, por ejemplo diagramas de Bode. Con los métodos de respuesta de frecuencia, no se necesario utilizar aproximaciones y el retardo se expresa en forma exacta.

Usando (8.16) se puede observar que la aproximación de Padé de primer orden es una malla que empeora las características dinámicas de un sistema. Esto se debe a:

- Un polo en el semiplano izquierdo que desplaza el lugar de la raíz hacia el semiplano derecho.

- Un cero en el semiplano derecho que atrae el lugar de la raíz hacia ese semiplano.

Por lo tanto un retardo desplaza el lugar de la raíz hacia el semiplano derecho disminuyendo la velocidad y estabilidad del sistema. Esto también es obvio si analizamos el sistema desde el punto de vista físico. No es posible que un retardo, que disminuye la velocidad de respuesta del sistema, mejore las características dinámicas de éste.

8.4.2. Errores en la Aproximación de Padé

La aproximación de Padé de primer orden es válida solo cuando los retardos son pequeños. Para analizar el error cometido por la aproximación de Padé de primer orden se utilizará la transformada de Fourier y la identidad de Euler. La representación en módulo y ángulo de un retardo en su expresión exacta es mostrada en (8.18)

$$\begin{aligned} e^{-j\omega T} &= \cos(\omega T) - j \sin(\omega T) \\ \text{Modulo} &= \sqrt{(\cos(\omega T))^2 + (\sin(\omega T))^2} = 1 \\ \text{Angulo} &= -\omega T \end{aligned} \quad (8.18)$$

El módulo y ángulo de una función de Padé de primer orden es obtenido desde (8.16). Las expresiones se muestran en (8.19);

$$\begin{aligned} \text{Modulo} \left[\frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} \right] &= \frac{\sqrt{1 + \frac{(\omega T)^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{(\omega T)^2}{4}}} = 1 \\ \angle \left[\frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} \right] &= -2 \operatorname{atan}(\omega T/2) \end{aligned} \quad (8.19)$$

De la ecuación (8.18) se concluye que un retardo exacto, como el de (8.14), no afecta al módulo de la respuesta pero si produce un retardo de fase. La aproximación de Padé de primer orden también tiene módulo unitario [ver (8.19)] pero su respuesta de fase es diferente a la de un retardo ideal. La Fig. 8.26 muestra el error de fase producida entre el retardo y la aproximación de Padé considerando aproximaciones de primero, segundo y tercer orden (el error de fase se define como la fase del retardo exacto menos la fase de la aproximación de Padé). Se puede concluir que la aproximación

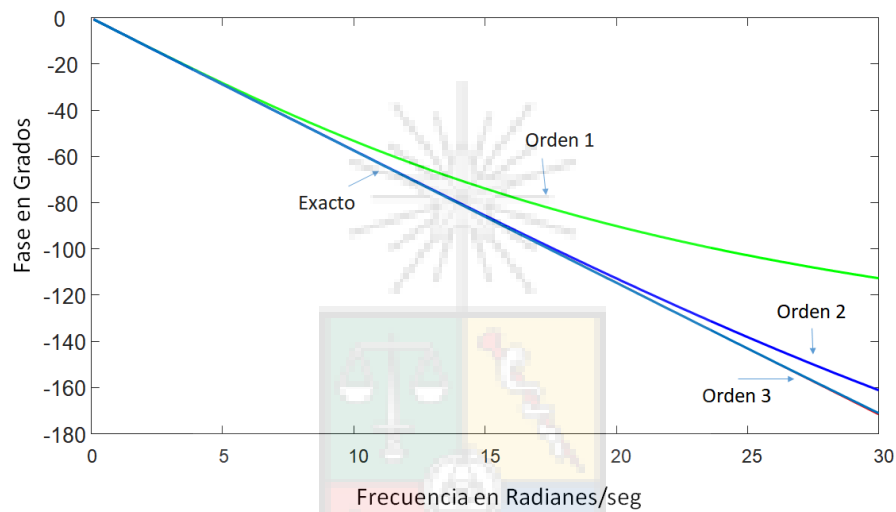


Figura 8.26: Fase exacta y fase de las aproximaciones de Padé de orden 1 a 3. Se considera un retardo de $T=100\text{ms}$

de Padé de primer orden no funciona bien a frecuencias altas. El error de fase obtenido entre las aproximaciones de Padé y la fase exacta se muestra en la Fig.8.27. Si se requiere por ejemplo un error de fase de menos de 5° la aproximación de Padé de primer orden no debería ser utilizada con una frecuencia mayor a $\approx 12 \text{ rad/seg}$ para $T = 100\text{ms}$. La última figura muestra un error *normalizado* por frecuencia. Esta frecuencia normalizada se obtiene como:

$$f_n = \frac{\omega T}{2\pi} \quad (8.20)$$

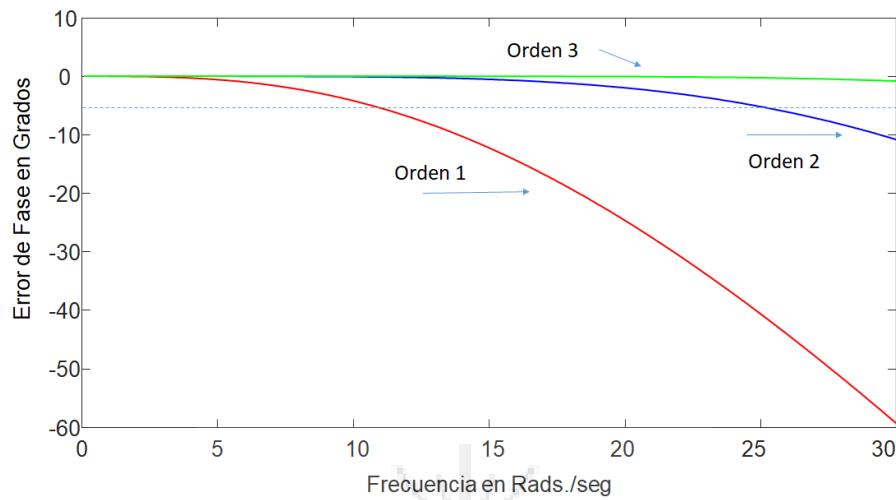


Figura 8.27: Error de fase de las aproximaciones de Padé de orden 1 a 3. Se considera un retardo de $T=100\text{ms}$. La línea punteada indica un error de cinco grados.

Este indicador muestra la relación entre la frecuencia natural en Hz y una frecuencia ficticia llamada *frecuencia del retardo*, igual a $1/T$. La figura 8.28 muestra el error de fase obtenido por las distintas aproximaciones considerando la frecuencia normalizada.

Los gráficos de error de fase mostrados en la figuras 8.27 y 8.28 permiten concluir que la aproximación de Padé de primer orden puede utilizarse con retardo pequeños solamente. Por otra parte aproximaciones de orden mayores, por ejemplo la de orden tres, tienen un mejor desempeño en un rango de frecuencias normalizadas más amplio. Sin embargo, como se discutió anteriormente, el lugar de la raíz se hace más complejo en este caso ya que existirán seis elementos adicionales en $G(s)H(s)$, (tres polos y tres ceros) y el diseño del controlador es más complejo.

Aunque se utilizara una representación exacta del retardo no es simple la tarea de diseñar sistemas de alta dinámica cuando se tienen retardos considerables. Como ya se mencionó, representaciones exactas del retardo son

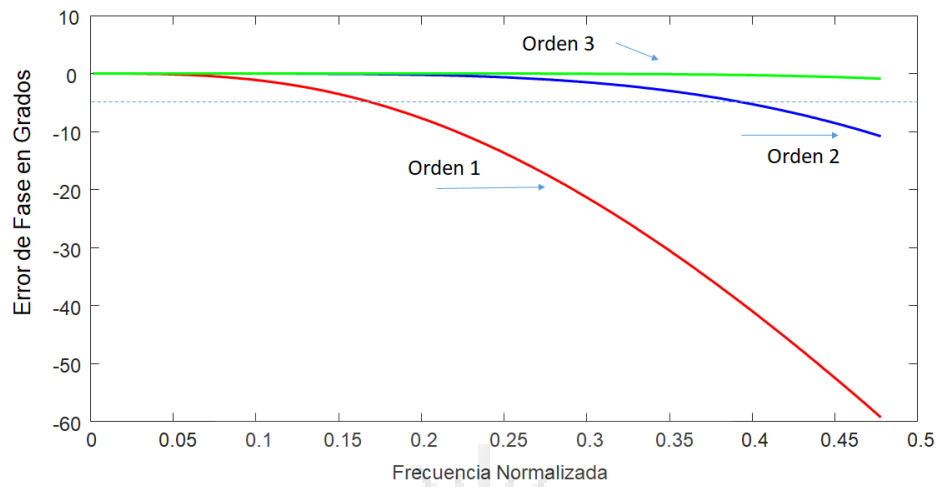


Figura 8.28: Error de fase de las aproximaciones de Padé de orden 1 a 3 considerando la frecuencia normalizada definida en (8.20). La línea punteada indica un error de cinco grados.

posibles de utilizar al diseñar sistemas de control utilizando métodos como diagramas de Bode y Nyquist. Sin embargo, eso no significa que sea fácil de lograr condiciones de diseño que consideren altas dinámicas de operación.

8.4.3. Ejemplo de Diseño de Sistemas de Control Considerando Retardos

Se tiene el sistema de control que se encuentra en la Fig: 8.29. El valor de a es 20 y el retardo de transporte es de $T = 30ms$. El sistema debe ser diseñado para cero error a estado estacionario, entrada escalón, frecuencia natural de 15 rads/seg y coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.8$. Considerando que el retardo es pequeño y la frecuencia natural a lograr no es muy alta, se utilizará una aproximación de Padé de primer orden. La función de transferencia del retardo sería aproximada como:

$$G_p(s) = \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2} = \frac{-s + 66.67}{s + 66.67} \quad (8.21)$$

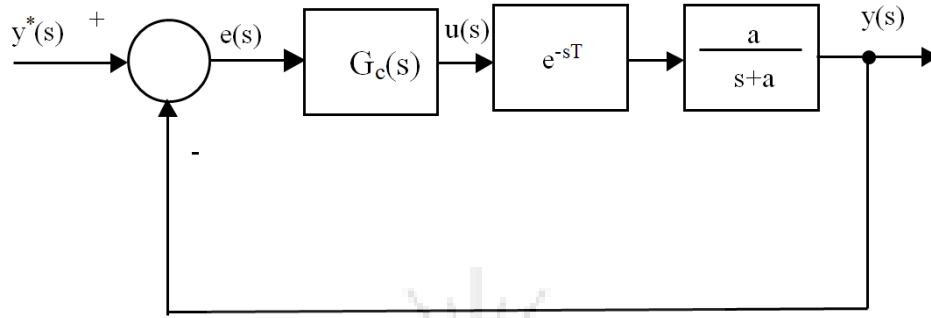


Figura 8.29: Ejemplo de un sistema simple que considera retardos. El valor del polo de la planta es $a = 20$

Al considerar (8.21) y la planta, la función de lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = G_c(s)e^{-sT} \frac{a}{s+a} \approx G_c(s) \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2} \frac{a}{s+a} = -G_c(s) \frac{(-1 + sT/2)}{(1 + sT/2)} \frac{a}{(s+a)} \quad (8.22)$$

La ecuación (8.22) indica que el compensador debe diseñarse utilizando el Lugar de la Raíz para sistemas con ganancia negativa. Para la función de transferencia de la ecuación (8.22) el lugar de la raíz es mostrado en la Fig. 8.30. El controlador obtenido utilizando Matlab y la Fig.8.30 se muestra en la ecuación (8.23);

$$G_c(s) = \frac{0.313(s + 30)}{s} \quad (8.23)$$

Considerando las curvas de errores de fase mostradas anteriormente (ver Figs. 8.27-8.28), se debe tener presente que el lugar de la raíz de la Fig. 8.30 es más exacto en zonas donde existe una baja frecuencia natural, por ejemplo cerca del punto de diseño. Si se utiliza este diagrama para, por ejemplo, conocer el valor de ganancia

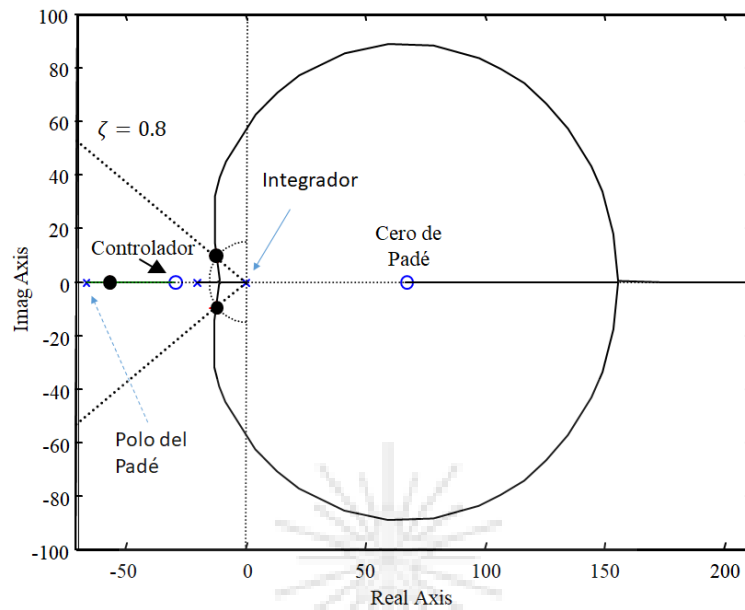


Figura 8.30: Lugar de la raíz correspondiente al sistema mostrado en la Fig. 8.29 y la función de lazo abierto mostrada en (8.22). Nótese que el LGR corresponde a un sistema de ganancia negativa, ya que la aproximación de Padé de primer orden de (8.21), introduce un signo negativo.

crítica, entrega un valor incorrecto o en el mejor caso una mala aproximación. Esto se analiza en la sección 8.4.3.1.

El desempeño del controlador obtenido en (8.23) se verifica utilizando simulación. Al construir el modelo, se debería considerar que simplificaciones o aproximaciones son herramientas utilizadas para fines de diseño. Sin embargo, al momento de simular se debe utilizar un modelo exacto si es que existe. Afortunadamente Simulink cuenta con un bloque que modela retardos en forma exacta.

Si diseña utilizando la aproximación de Padé, no simule el retardo del sistema utilizando la misma aproximación de Padé ya que lo mas probable es que todo funcione bien. Utilice algún modelo exacto del retardo disponible en las plataformas

de simulación.

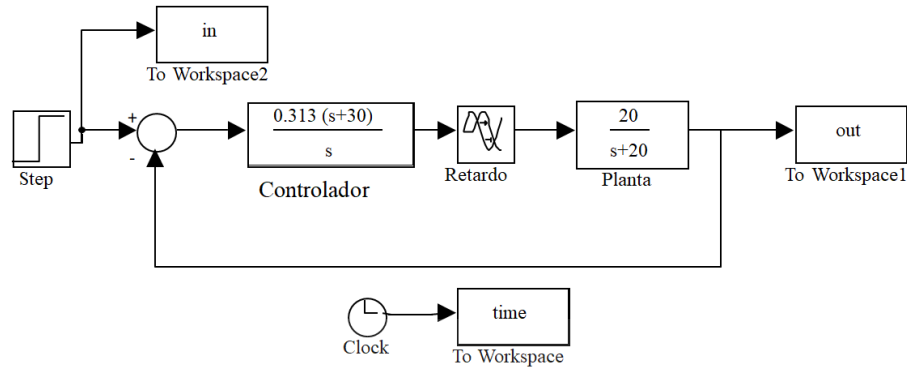


Figura 8.31: Modelo en Simulink del sistema mostrado en la Fig. 8.29 y considerando el controlador de la ecuación (8.23)

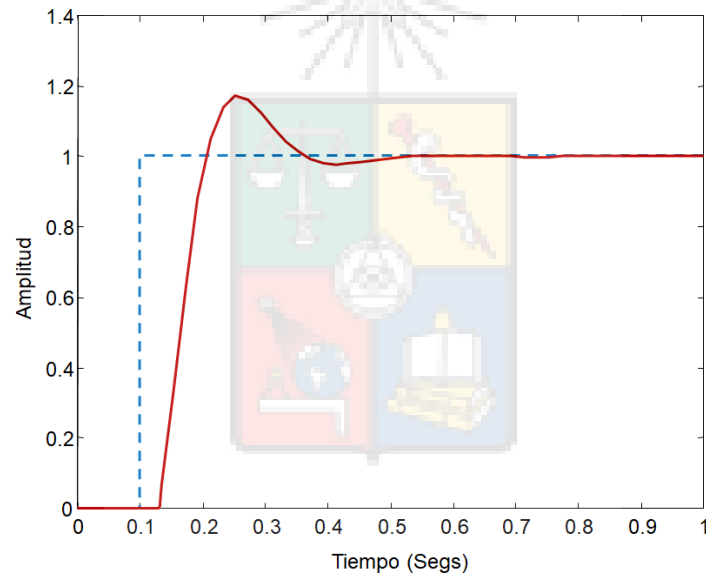


Figura 8.32: Respuesta del sistema mostrado en en la Fig. 8.31 considerando una entrada escalón unitaria.

El modelo Simulink utilizado para verificar el desempeño del sistema mostrado en la Fig. 8.29, se muestra en la Fig. 8.31. La respuesta del sistema se encuentra en la Fig. 8.32. El escalón se aplica en $t=0.1$ seg y el tiempo de establecimiento es

de aproximadamente $t_s \approx 0.36$ seg., lo que coincide con el t_s calculado utilizando $\omega_n = 15$ rads/seg. y $\zeta = 0.8$.

8.4.3.1. Diseño Utilizando una Aproximación de Padé de Tercer Orden

En esta sección, el diseño obtenido con la aproximación de Padé de primer orden es comparada en complejidad y exactitud con el obtenido al utilizar una aproximación de Padé de tercer orden. La aproximación de Padé de tercer orden para un retardo de 30ms es:

$$G_p(s) = \frac{-s^3 + 400s^2 - 66667s + 4.44 \cdot 10^6}{s^3 + 400s^2 + 66667s + 4.44 \cdot 10^6} \quad (8.24)$$

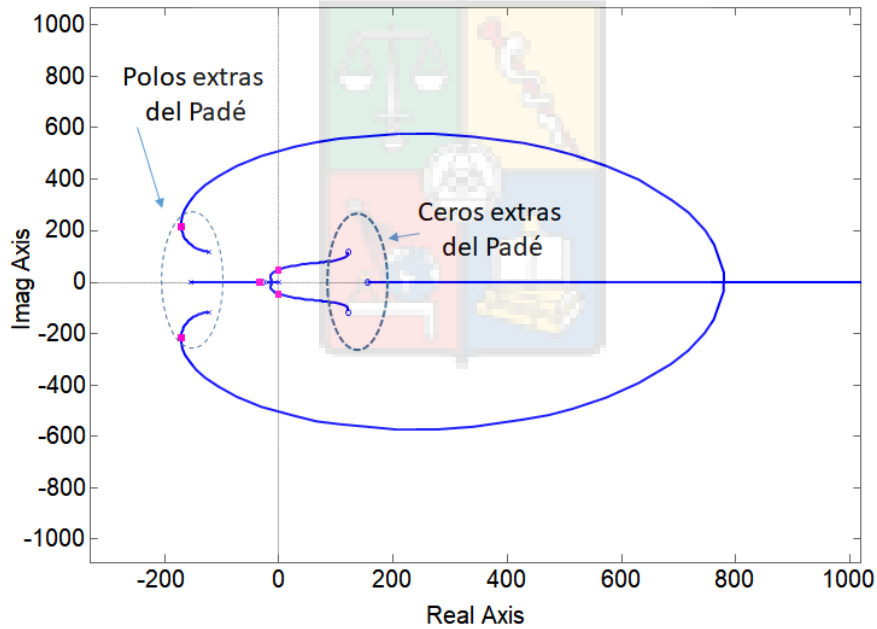


Figura 8.33: Lugar de la raíz considerando que la aproximación de Padé de primer orden en (8.22) es reemplazado por una aproximación de tercer orden.

Reemplazando en la función de lazo abierto [ver (8.22)], la aproximación de Padé de primer orden de (8.21), por la mostrada en la ecuación (8.24), se obtiene el lugar de la raíz de la Fig. 8.33.

Debido a que la frecuencia natural de diseño corresponde a una frecuencia normalizada de ≈ 0.071 (ver Fig. 8.28), se obtiene casi el mismo controlador al utilizar la aproximación de Padé de orden uno o tres. Como ya se mencionó, la diferencia se encuentra al intentar obtener otros datos, por ejemplo la ganancia crítica y la frecuencia de cruce. Al utilizar Padé de primer orden y el lugar de la raíz de (8.30), la ganancia crítica obtenida es un 30 % mayor a la real. La frecuencia de cruce obtenida con el Padé de (8.21) es 58 rad/seg.; la real es aproximadamente 46.8 rad/seg, o sea un error de $\approx 23\%$.

A utilizar el Padé de tercer orden de (8.24) y el lugar de la raíz de la Fig. 8.33, la frecuencia de cruce y la ganancia crítica calculadas son prácticamente iguales a las reales. Sin embargo, como ya mencionó anteriormente, la ecuación (8.24) agrega tres polos y tres ceros de lazo abierto a $G(s)H(s)$. Por lo tanto, el diseño sin herramientas computacionales se vuelve considerablemente más complejo.

Los valores exactos de ganancia crítica y frecuencia de cruce fueron calculadas utilizando métodos de respuesta de frecuencia, los cuales permiten utilizar representaciones exactas de los retardos. Estos métodos serán estudiados en otra sección del curso.

8.5. Compensación Feedforward o Prealimentación

Los lazos de control son habitualmente diseñados para que los polos de lazo cerrado del sistema se encuentren en una posición adecuada, con un ancho de banda y coeficiente de amortiguamiento apropiados. Para esto, normalmente se utiliza la función de transferencia salida/entrada del sistema y no se considera el efecto de las perturbaciones. Por lo tanto, el efecto de las perturbaciones es controlado por el sistema SISO, después de que éstas se manifiestan en la salida. Sin embargo, las variaciones en la salida pueden ser inadecuadas, por ejemplo si las perturbaciones son muy frecuentes y/o el controlador es lento; la variable de salida podría ser afectada y alcanzar desviaciones no menores con respecto a la referencia. Para este tipo de situaciones se puede aplicar pre-alimentación.

A modo de ejemplo, se analizará nuevamente el caso de la máquina eléctrica discutida en la sección anterior. La perturbación en este caso podría ser un impacto de carga en el eje del motor. El aumento de carga produce un desbalance ya que el torque eléctrico es temporalmente menor al torque mecánico y la máquina comienza a desacelerarse. Al bajar la velocidad, el lazo de control externo detecta y procesa el error $(\omega_r^* - \omega_r)$, aumentando la corriente de referencia i_a^* (ver Fig. 8.18), hasta que la velocidad rotacional sigue correctamente a su referencia.

El sistema de control compensó el efecto de las perturbaciones después que máquina cambió su punto de operación y la velocidad se redujo; esta reducción de velocidad se puede evitar, al menos parcialmente, utilizando prealimentación. La compensación feed-forward o pre-alimentación consiste en medir las perturbaciones y utilizarlas en el controlador (en lo posible el más rápido del sistema) para que este compense las perturbaciones evitando grandes cambios en la salida de la planta.

8.5.1. Sistema de Control de un Filtro LC Considerando/Sin Considerar Prealimentación

La Fig. 8.34 muestra un filtro LC alimentando una carga resistiva. Este filtro es muy utilizado en aplicaciones de micro-redes para alimentar cargas aisladas y tiene como función eliminar los armónicos que se producen a la salida de convertidores de potencia y en cargas no lineales. El sistema de control del filtro LC generalmente utiliza lazos anidados ya que la dinámica del voltaje en el condensador es habitualmente bastante más lenta que la dinámica de la corriente en la bobina. La estructura de control propuesta es la de utilizar dos lazos, uno de corriente y otro

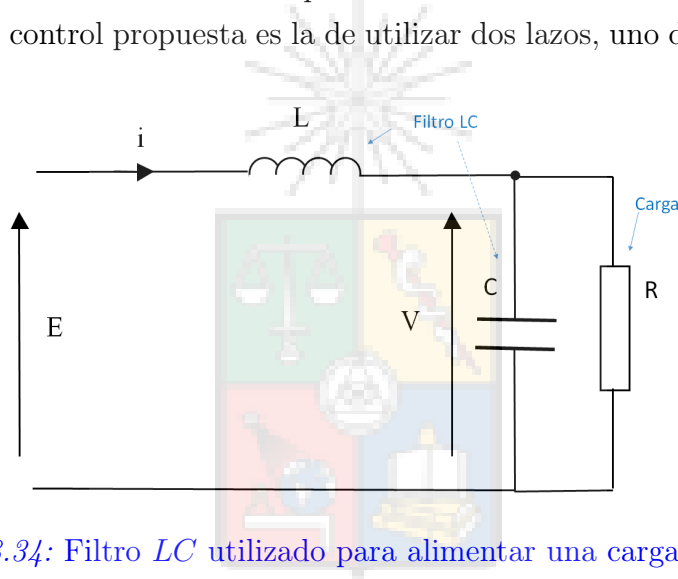


Figura 8.34: Filtro LC utilizado para alimentar una carga resistiva.

de tensión.

Las ecuaciones diferenciales del sistema se muestran en la ecuación (8.25). Dado que la resistencia de la bobina es pequeña, se ha despreciado ésta en (8.25) y la Fig. 8.34.

$$V = i \frac{R/sC}{R + 1/sC} = i \frac{R}{1 + sRC}$$

$$i = \frac{E - V}{sL}$$
(8.25)

El sistema de control se implementa utilizando una estructura de dos lazos que se muestra en la Fig. 8.35.

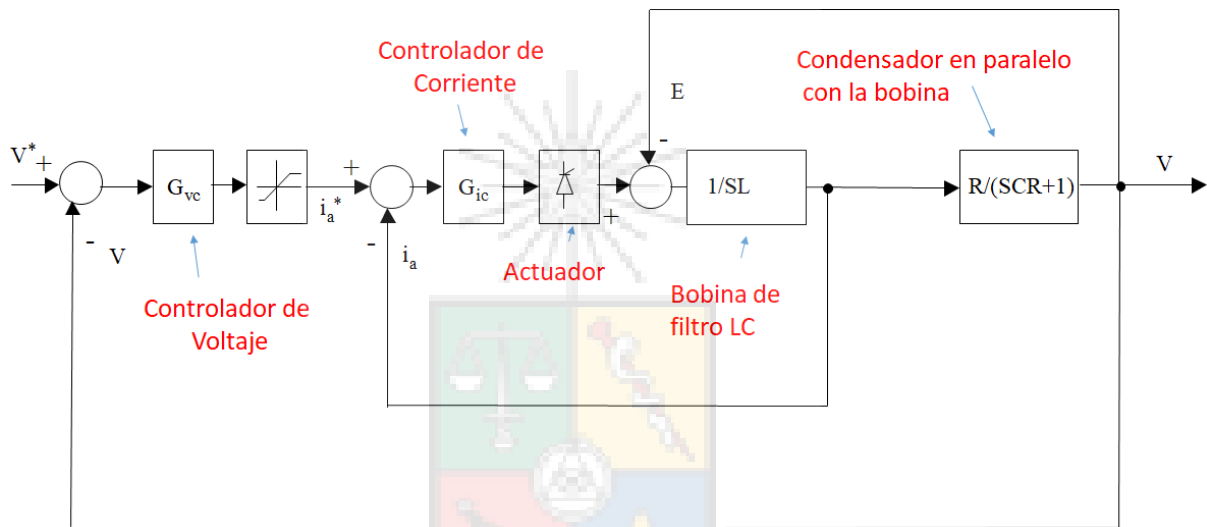


Figura 8.35: Sistema de control de la corriente y voltaje en un filtro LC considerando una estructura de dos lazos y regulando el voltaje en la carga.

Para ilustrar el efecto de la compensación feed-forward se simulará un transiente que consiste en la conexión de una resistencia en paralelo con la ya existente. El lazo de corriente se encuentra diseñado para una frecuencia natural de 300rads/seg. mientras que el lazo de voltaje se encuentra diseñado con una frecuencia natural de 30rads/seg. Para ambos lazos el coeficiente de amortiguamiento es 0.707. El diseño sigue un procedimiento idéntico al utilizado para el caso de la máquina de corriente continua. Este caso se asume $R = 200\Omega$ $L = 12mH$ $C = 2000\mu F$.

El controlador de voltaje y de corriente obtenidos utilizando lugar de la raíz, son mostrados en la ecuación (8.26) en el orden en que han sido mencionados.

$$\begin{aligned} G_v &= 0.076411 \frac{(s + 22.96)}{s} \\ G_I &= 5.0171 \frac{(s + 215.34)}{s} \end{aligned} \quad (8.26)$$

El diagrama de bloques implementado en Simulink se muestra en la Fig. 8.36. El bloque que se encuentra a la derecha se utiliza para implementar un cambio escalón en la resistencia. Este bloque requiere más explicación y se utilizará la Fig. 8.37 para realizarla.

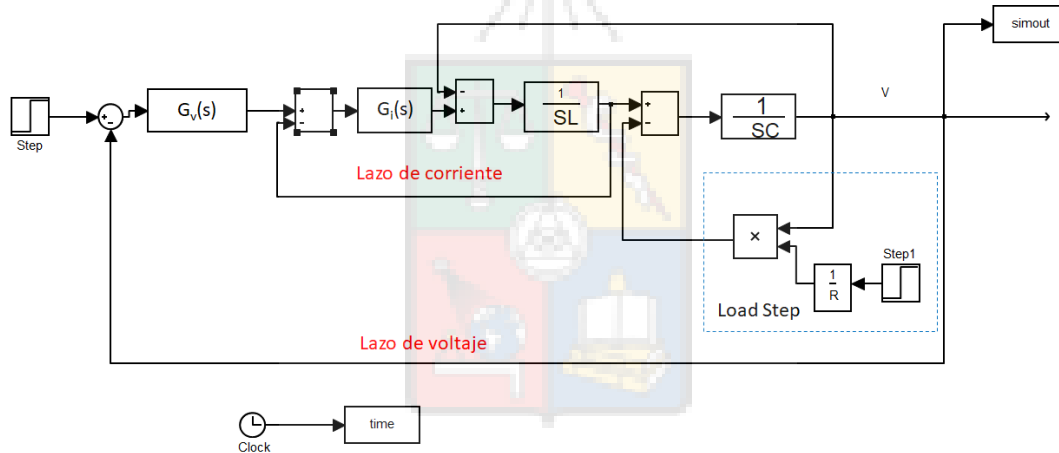


Figura 8.36: Sistema implementado en Matlab y Simulink para simular el desempeño del sistema de control de la Fig. 8.35 considerando un impacto de carga.

Una resistencia en paralelo con un condensador tiene una impedancia igual a la expresión mostrada a la derecha de la Fig. 8.37. Utilizando álgebra de bloques es simple de demostrar que el diagrama ubicado en la parte inferior de Fig. 8.37 es equivalente a la impedancia equivalente de una resistencia en paralelo con el condensador. Por lo tanto si es que se cambia, durante la simulación, la señal

a la salida del bloque $1/R$ (ver figuras 8.36-8.37) utilizando un multiplicador, es equivalente a efectuar un cambio escalón en la resistencia del sistema.

Se incluye la Fig. 8.37 ya que frecuentemente los alumnos de este y otros cursos recurren a algoritmos bastante complicados (y que no funcionan) para representar los cambios bruscos de la carga en paralelo con un condensador o impactos de carga mecánica en una máquina.

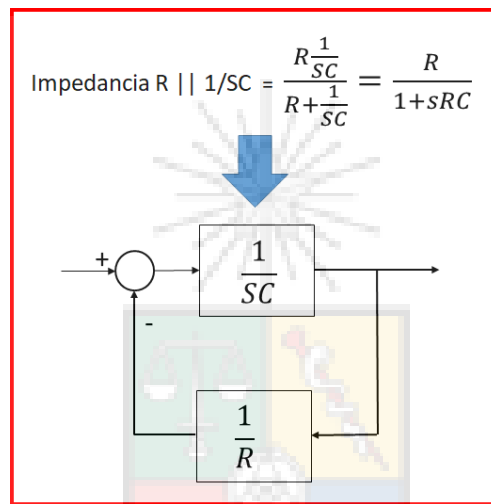


Figura 8.37: Visión ampliada del diagrama de bloques de la Fig. 8.36 que se utiliza para producir un cambio tipo escalón en la carga R .

8.5.2. Resultados sin Incluir Prealimentación

El sistema mostrado en la Fig. 8.36 se simula considerando un cambio tipo escalón de 200Ω a 50Ω en $t = 2s$. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 8.38; en $t=0.1$ seg. se cambia la referencia de voltaje a $400V$ y en $t=2$ seg se aplica el escalón de carga ya mencionado. La figura 8.38(b) muestra un detalle de la perturbación

producida al aplicar el escalón de carga. El voltaje se reduce en casi cuarenta volts al aplicarse el impacto resistivo.

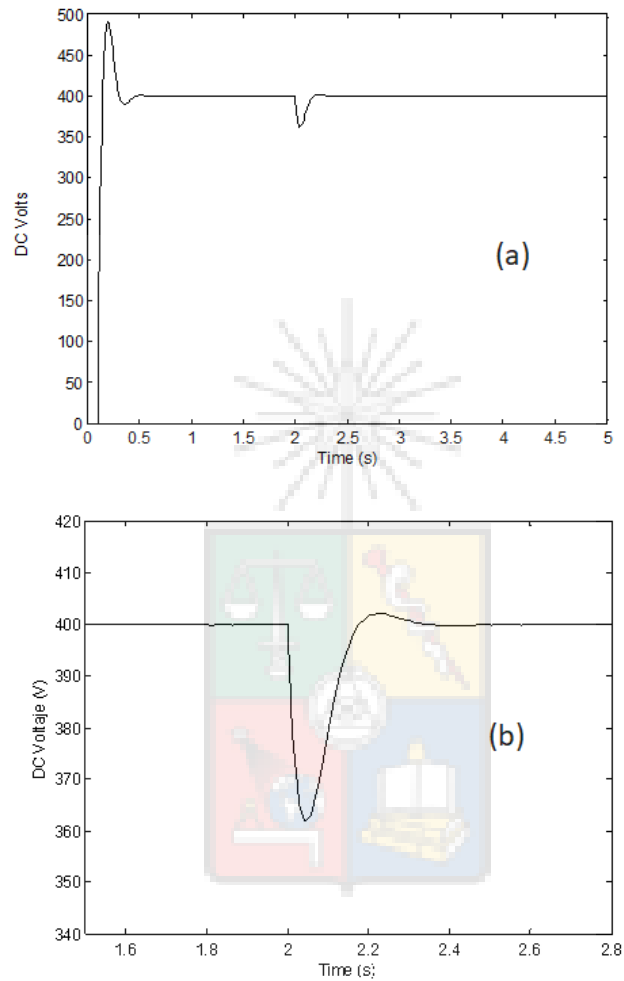


Figura 8.38: Resultados obtenidos al simular el sistema de la Fig. 8.36 considerando un impacto de carga y sin considerar prealimentación. a) desempeño del sistema de control considerando todo el período de operación. b) visión ampliada del desempeño cuando se produce el impacto de carga.

8.5.3. Resultados con Prealimentación

Efectuar la prealimentación en este sistema es simple, solo se debe medir la corriente de la carga conectada al condensador y utilizarla para aumentar la referencia del lazo interno. Para efectuar prealimentación se utiliza el sistema mostrado en la Fig. 8.39; la corriente de carga se conecta a la salida del bloque que representa $1/R$ y se ingresa como parte de la referencia al lazo de corriente. En este caso el efecto de la prealimentación es que inmediatamente después que aumenta la corriente de carga, el controlador del lazo interno comienza a aumentar la corriente de salida. No es el lento lazo externo el que realiza la compensación, es principalmente el lazo interno.

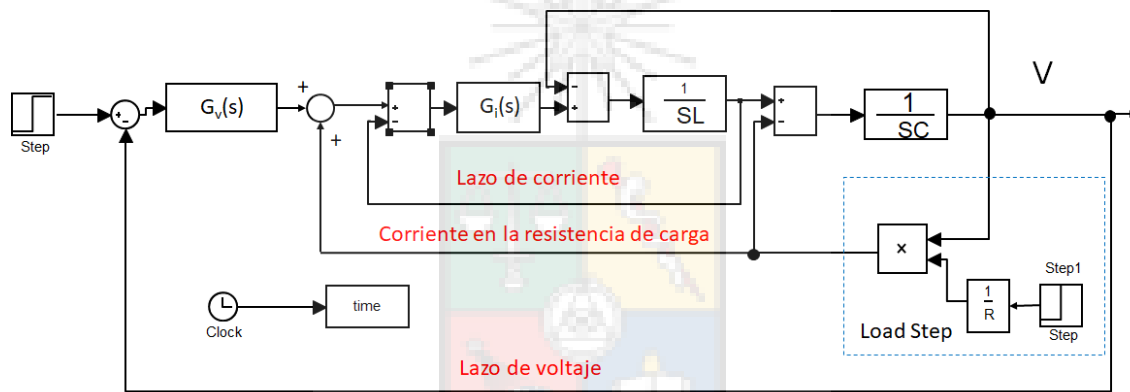


Figura 8.39: Sistema implementado en Matlab y Simulink para simular el desempeño del sistema de control de la Fig. 8.35 considerando un impacto de carga y prealimentación.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 8.40. En $t=0.1$ seg se cambia la referencia de voltaje a 400V y en $t=2$ seg se aplica el escalón de carga ya mencionado. La figura 8.40(b) muestra un detalle de la perturbación producida al aplicar el escalón de carga. El voltaje se reduce solo 5 volts al incluir prealimentación para compensar el impacto resistivo. Esto es casi un 12.5 % de la caída de voltaje producida anteriormente, cuando no se utilizó prealimentación.

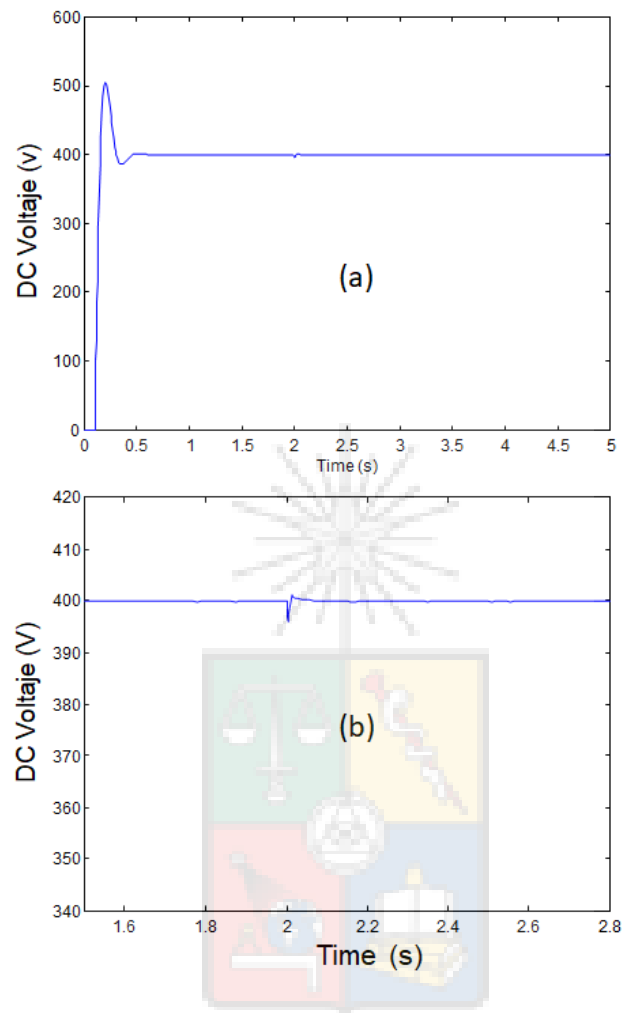


Figura 8.40: Resultados obtenidos al simular el sistema de la Fig. 8.39 considerando un impacto de carga y aplicar prealimentación. a) Desempeño del sistema de control considerando todo el período de operación. b) Visión ampliada del desempeño cuando se produce el impacto de carga.

8.5.4. ¿Qué Efectos Produce la Prealimentación?

El efecto de la prealimentación puede analizarse considerando que el lazo de corriente es muy rápido y que el voltaje V es dinámicamente más lento. Además se considera que el lazo interno produce cero error en estado estacionario y por lo tanto el lazo de corriente tiene una función de transferencia igual a uno. El diagrama de bloques considerado corresponde al mostrado en la Fig. 8.41, en este caso la corriente en la carga se calcula instantáneamente como V/R y se ingresa al lazo de corriente.

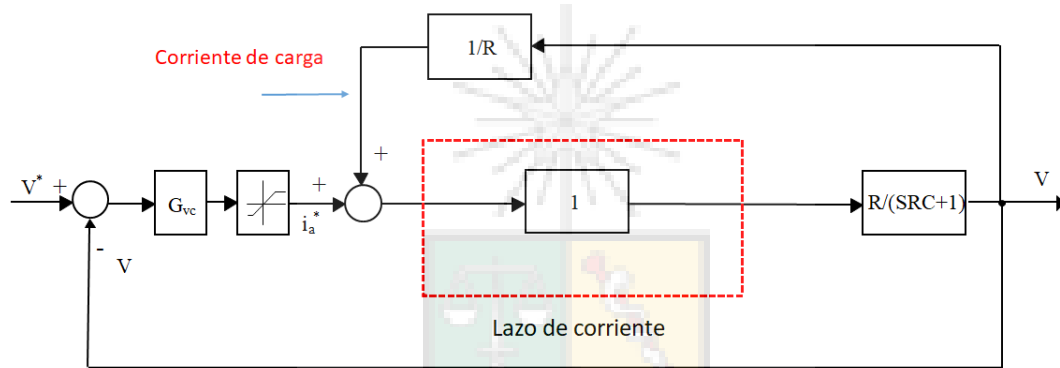


Figura 8.41: Simplificación del diagrama de bloques de la Fig. 8.39 utilizada para analizar matemáticamente la prealimentación

La función de transferencia $\frac{V(s)}{i_a^*(s)}$ se puede obtener como:

$$\frac{V(s)}{i_a^*(s)} = \frac{\frac{R}{SRC+1}}{1 - \frac{1}{R} \frac{R}{SRC+1}} = \frac{\frac{R}{SRC+1}}{\frac{SRC}{SRC+1}} = \frac{1}{SC} \quad (8.27)$$

Lo que significa que independiente de la magnitud del escalón, desde el punto de vista del lazo de voltaje la planta no varía. Esto, porque los cambios de cargas son instantáneamente compensados por el lazo de corriente y por lo tanto no producirían ningún efecto en la salida. Sin embargo, en una implementación real el lazo de corriente tiene una función de transferencia distinta a uno y generalmente la corriente

de carga debe medirse utilizándose transductores y filtros (que retardan la respuesta). Estos efectos combinados producen una compensación feed-forward que no es ideal ya que, por ejemplo, a pesar de que el lazo de corriente es rápido, no es instantáneo.

¿Cuál sería la alternativa a prealimentación, para compensar casi completamente las perturbaciones?. Recordando lo discutido en la sección 3.6, el valor de $S(s)$ de (3.50), debería cumplir con $|S(s)| \ll 1$ para lograr este objetivo. Para esto se debería aumentar drásticamente la frecuencia natural de los polos dominantes de lazo cerrado, pero al efectuar este aumento, el ancho banda de lazo cerrado se incrementa y se corre el riesgo de amplificar significativamente el ruido de alta frecuencia en la medición [es decir aumenta la magnitud de la sensibilidad complementaria $|T(s)|$ de (3.50)]. En resumen, prealimentación permite compensar las perturbaciones sin aumentar significativamente el ancho de banda.

La desventaja de aplicar prealimentación, es que las perturbaciones deben ser medidas u observadas utilizando por ejemplo un observador de Luenberger. Si es que se opta por medición (la alternativa más simple y efectiva pero de mayor costo), se debería colocar en la Fig. 8.34 un transductor adicional y enviar su salida al sistema de control.

Otra dificultad de aplicar prealimentación, es que existen perturbaciones que son difíciles de medir (u observar) y además encontrar una función de transferencia que las relacione con el lazo de control. Por ejemplo, si se tiene un sistema de calefacción de un recinto, teóricamente se podría efectuar prealimentación cada vez que se abre una ventana (perturbación) para inmediatamente ordenar al actuador que cambie el flujo calórico que se está utilizando para temperar la habitación (variando la potencia consumida por una resistencia de calefacción u otros). Para esto es necesario encontrar una función de transferencia que relacione la apertura de la ventana con el cambio de flujo calórico requerido; eso al menos a mi (como Ing. Eléctrico) me parece difícil de lograr.

8.6. Internal Model Control

Internal Model Control o IMC es una estructura de control de diseño algebraico, es decir a través de ecuaciones. En general IMC se ha utilizado con frecuencia en ingeniería química y control de procesos. La Fig. 8.42 muestra el diagrama de un

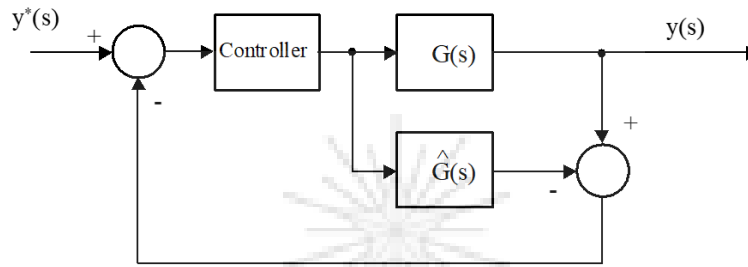


Figura 8.42: Sistema de control basado en IMC.

sistema de control basado en IMC. La planta es $G(s)$ y $\hat{G}(s)$ es una estimación de la planta (efectuado por el diseñador). Suponiendo un controlador con una función de transferencia $G_c(s)$, la función de transferencia de lazo cerrado puede escribirse como se muestra en la ecuación (8.28)

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)[G(s) - \hat{G}(s)]} \quad (8.28)$$

Si la planta se encuentra bien identificada, el denominador de la función de transferencia a lazo cerrado es unitario es decir se llega a (8.29):

$$G(s) - \hat{G}(s) \approx 0 \Rightarrow \frac{y(s)}{y^*(s)} = G_c(s)G(s) \quad (8.29)$$

Ecuación (8.29) permite el diseño algebraico de un controlador, debido a que se eliminó la ecuación característica del sistema $1 + G(s)H(s) = 0$. Por ejemplo, suponiendo una planta $G(s)$ de primer orden, se desea diseñar un controlador para

obtener una respuesta de lazo cerrado de segundo orden. Algebraicamente se tiene:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = G_c(s) \frac{a}{s + a} \quad (8.30)$$

Donde $a/(s + a)$ es la planta y $G_c(s)$ es el controlador que se desea diseñar. Resolviendo (8.30) el controlador a utilizar se obtiene como se muestra en la ecuación (8.31):

$$G_c(s) = \frac{(\omega_0^2/a)(s + a)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (8.31)$$

Este controlador entregará la respuesta apropiada si es que la estimación de la planta es correcta. En caso contrario la función de transferencia de lazo cerrado es $\neq$ del valor de $G_c(s)G(s)$ obtenido en (8.29) y el uso de IMC podría no tener mayores ventajas con respecto a otras técnicas de diseño.

Existen otras limitaciones de IMC que se detallan a continuación:

- Primero, el controlador debe ser realizable. Esto significa que el número de ceros del controlador debe ser menor o igual al número de polos. Por ejemplo si se desea una respuesta de lazo cerrado perfecta es decir $y(s)/y^*(s)=1$ para la planta de primer orden discutido anteriormente se tiene:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = 1 \Rightarrow G_c(s) = (1/a) \frac{s + a}{a} \quad (8.32)$$

Este controlador no es realizable y por supuesto no es posible obtener una respuesta a lazo cerrado igual a uno. Por lo tanto al seleccionar la respuesta de lazo cerrado que se quiere lograr con IMC, se debe verificar que el controlador es realizable.

- Segundo, IMC es un controlador que funciona por cancelación. El controlador obtenido en (8.31) tiene un cero que cancela el polo de la planta. Generalizando

se tiene que al diseñar un controlado IMC, los polos y ceros de la planta son cancelados por el controlador. Esto significa que la planta a controlar no debe tener polos o ceros de lazo abierto en el semiplano derecho (limitación que no se aplica a otros métodos de diseño de controladores). Cancelar polos en el semiplano derecho no es posible; como sabemos, la cancelación es imperfecta y se produce un polo de lazo cerrado inestable. Más aún, la aplicación de IMC a una planta con polos muy móviles podría entregar un bajo desempeño debido a la cancelación imperfecta, aunque el sistema sea estable.

Existen procedimientos de diseño de IMC que permiten obtener controladores en la presencia de elementos en el semiplano derecho o retardos de transporte en la planta evitando la cancelación. En general los procedimientos óptimos hacen perder en parte la simplicidad propia del diseño de controladores IMC.

Como todos los métodos de control discutido en este apunte, IMC tiene ventajas y desventajas. Es un método muy simple para diseñar controladores, aunque existen muy pocas aplicaciones de IMC en el área en que habitualmente me desenvuelvo, aunque ciertamente IMC tiene un nicho de aplicación. Mayor información acerca de IMC puede encontrarse en “The control handbook”, IEEE Press, editor William S. Levine.

Capítulo IX

DISEÑO DE COMPENSADORES UTILIZANDO MATLAB



Ejercicios Adicionales

9.1. Problema dos, Examen 2021

Se tiene un sistema de control compuesto de lazos anidados que se muestra en la Fig. 9.1. La entrada de referencia es un escalón. Las plantas del lazo interno y

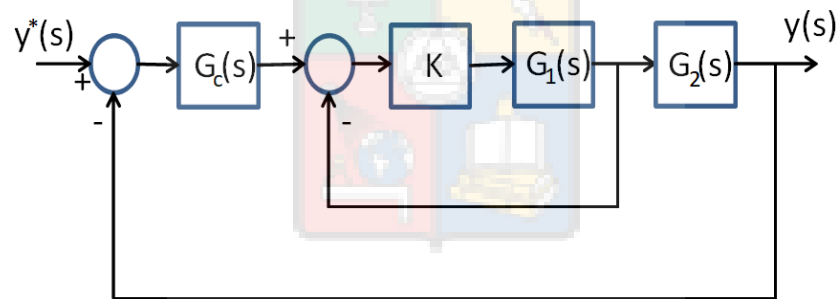


Figura 9.1: Sistema de lazos anidados, examen 2021, segundo semestre

externo son las mostradas en las ecuaciones (9.1) y (9.2) respectivamente.

$$G_1(s) = \frac{30}{(s + 10)(s + 60)} \quad (9.1)$$

$$G_2(s) = \frac{9}{1.5s - 6} \quad (9.2)$$

se pide:

1. Debido a problemas de costo, el lazo interno debe ser diseñado utilizando un controlador proporcional. Se debe obtener en el lazo interno la más alta velocidad de respuesta posible manteniendo una respuesta sobre amortiguada.
2. Diseñe el lazo externo de control. Considere en su diseño cero error en estado estacionario a entrada escalón, $\omega_n = 3 \text{ rads/seg}$, $\zeta = 0.707$. ¿Es necesario considerar el lazo interno al diseñar o están completamente desacoplados? Fundamente su respuesta y el diseño del controlador.
3. Debido a problemas de envejecimiento del sistema de control del lazo interno, la ganancia proporcional de este lazo comienza a variar. ¿Existe algún valor o rango de valores de K que puedan producir inestabilidad en el sistema mostrado en la Fig. 9.1?. Justifique su respuesta.

9.1.0.1. Resolución 1

Para mantener la respuesta sobre-amortiguada $\zeta \geq 1$, las raíces de lazo cerrado deben ser reales. Asumiendo desacople de velocidades (lazo interno mucho más rápido que el externo), el lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia de lazo abierto de (9.1) se muestra en la Fig. 9.2.

La máxima frecuencia natural que se puede obtener en los polos dominantes, manteniendo los polos de lazo cerrado reales, se puede calcular aplicando lo discutido

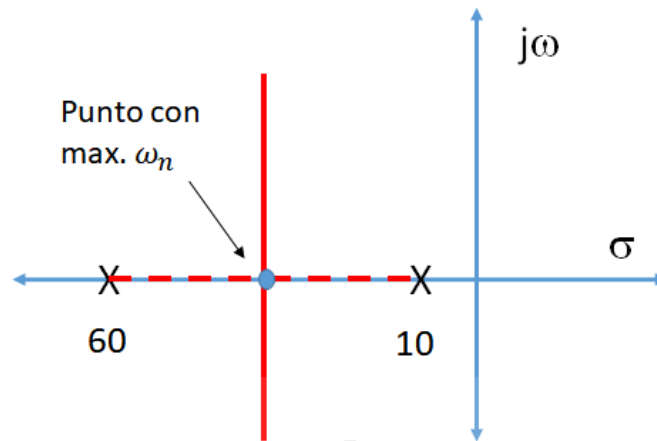


Figura 9.2: Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto de (9.1).

en la Sección 3.3.4. Es decir:

$$K = \frac{(s + 60) \cdot (s + 10)}{30} \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 0 \Rightarrow 2s + 70 = 0 \quad (9.4)$$

Por lo tanto la máxima frecuencia natural es $\omega_n = 35 \text{ rads/seg.}$. La ganancia del controlador proporcional, para lograr este valor de ω_n es $K = 20.83$. Esta ganancia K se obtiene utilizando la condición de módulo del lugar de la raíz.

9.1.0.2. Resolución 2

La función de transferencia a lazo abierto de la planta del lazo externo [ecuación (9.2)] se puede escribir como:

$$G_2(s) = \frac{9}{1.5s - 6} = \frac{6}{s - 4} \quad (9.5)$$

Para obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón, se propone agregar un controlador PI. El lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto de (9.5) mas el PI se muestra en la Fig. 9.3.

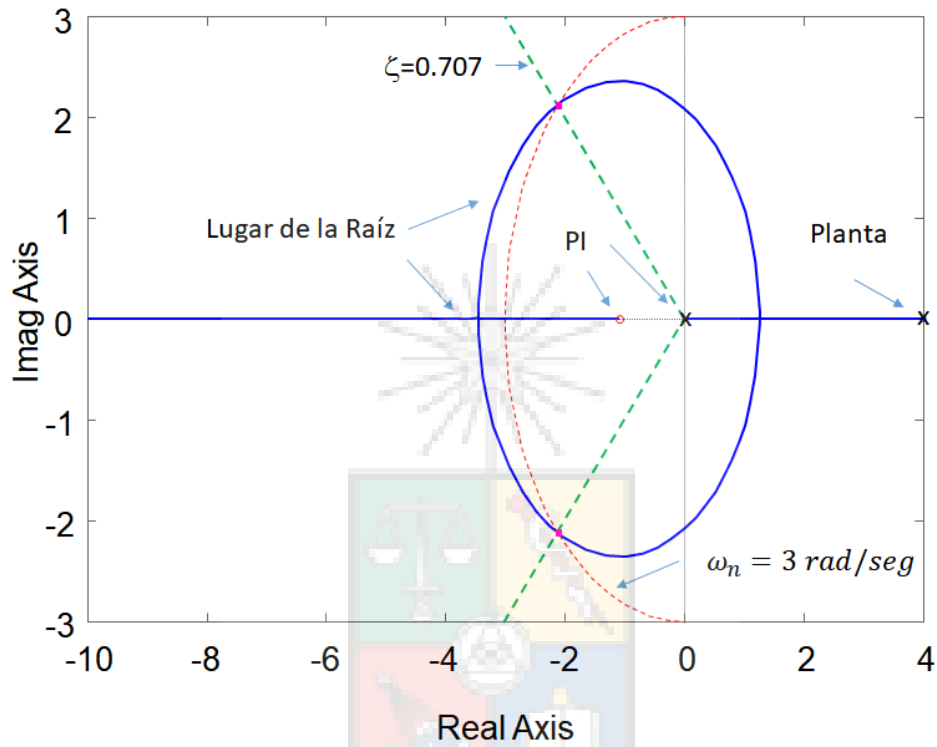


Figura 9.3: Lugar de la raíz correspondiente a la función de lazo abierto de (9.2) más un controlador PI.

El lugar de la raíz se obtuvo utilizando el comando RLTOOL (la herramienta del lugar de la raíz del SISO tool de Matlab). No se efectuó el diseño utilizando la condición de módulo y ángulo ya que esto fue realizado y discutido en el Capítulo 7.

Como ejercicio adicional se recomienda, sin utilizar Matlab, verificar que el diseño está correcto.

El controlador obtenido **sin considerar** la influencia del lazo interno se encuentra en la ecuación (9.6).

$$G_c(s) = 1.3693 \cdot \frac{s + 1.09}{s} \quad (9.6)$$

¿Influye el lazo interno?. Desde el punto de vista de velocidades ambos están suficientemente desacoplados ya que el lazo interno tiene una frecuencia natural de $\omega_n = 35$ rad/seg., mientras el lazo externo tiene una frecuencia de $\omega_n = 3$ rad/seg. Sin embargo, el lazo interno no puede entregar cero error en estado estacionario, por lo tanto contribuye con una ganancia en estado estacionario (ver Fig. 8.21). Esta ganancia, considerando entrada escalón al sistema, se calcula como:

$$K_{eq} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot G_1(s)}{1 + K \cdot G_1(s)} \quad (9.7)$$

Recuerde que $s = 0$ representa el estado estacionario a entrada escalón. Es decir la entrada se ha transformado en corriente continua ($s = j\omega = 0$).

En (9.7), K_{eq} es la ganancia equivalente del lazo interno, $K = 20.83$ es el controlador proporcional del lazo interno y $G_1(s)$ corresponde a la función de transferencia de (9.1). Reemplazando los valores en (9.7), se llega a $K_{eq} \approx 0.51$. Considerando esta ganancia equivalente, el controlador PI a utilizar es

$$G_c(s) = 2.684 \cdot \frac{s + 1.09}{s} \quad (9.8)$$

es decir la ganancia proporcional obtenida anteriormente se ajusta por un factor $1/K_{eq}$.

9.1.0.3. Resolución 3

¿Puede el sistema llegar a inestabilidad si se reduce la ganancia del lazo interno?. Al reducir la ganancia K_{eq} el lugar de la raíz del lazo externo se mueve hacia el semiplano inestable (derecho). Esto se muestra en la Fig. 9.4.

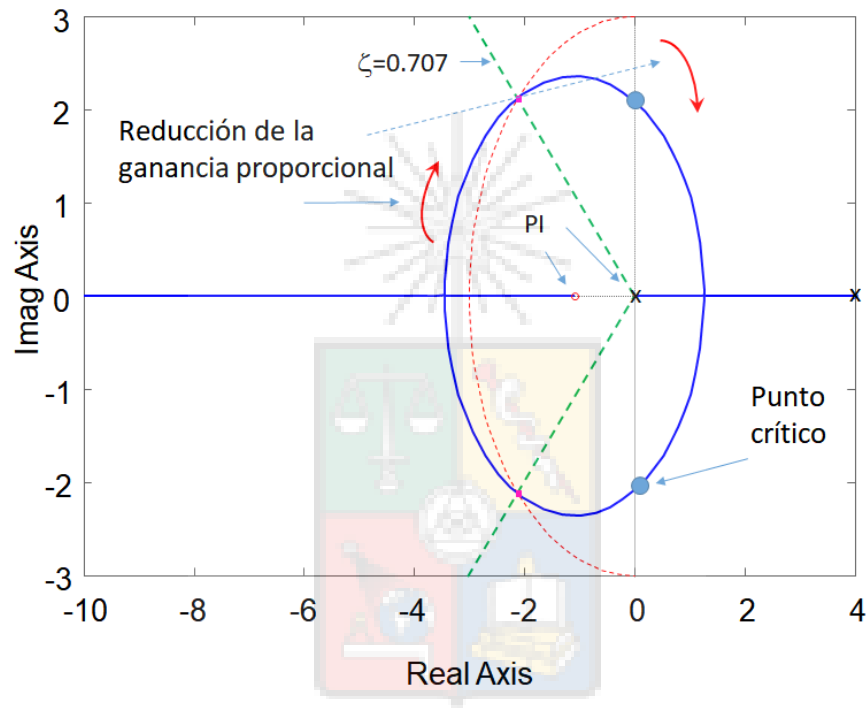


Figura 9.4: Efecto de reducir la ganancia en el lugar de la raíz del lazo externo.

El valor de ganancia crítica, que produce inestabilidad en el lazo externo, se calcula agregando el controlador PI a la ecuación (9.5) y aplicando el criterio de Routh. Se asume que K_T corresponde a $K_c \cdot K_{eq}$, con K_c como la ganancia del controlador en (9.8).

$$G(s) = K_T \cdot \frac{s + 1.09}{s} \cdot \frac{6}{s - 4} \Rightarrow 1 + G(s) = 0 \rightarrow s^2 + (6K_T - 4)s + 6K_T \cdot 1.09 = 0 \quad (9.9)$$

Dado que el criterio de Routh demanda que $6K_T - 4 > 0$ (para obtener un sistema asintóticamente estable), el valor de la ganancia crítica es de $K_T = 2/3$. Utilizando la ecuación (9.8) se concluye que $2.684 \cdot K_{eq} = 2/3$, por lo tanto cuando K_{eq} , la ganancia que representa el lazo interno (en estado estacionario) llega a $K_{eq} < 0.2483$ el sistema es inestable.

¿Cuál debería ser la nueva ganancia K , del controlador proporcional del lazo interno para llegar a inestabilidad?. Utilizando (9.7) es simple de concluir que el controlador proporcional deber reducirse desde $K = 20.83$ a $K = 6.6$ para llegar al punto crítico.

9.1.1. ¿Funcionará?

El ejemplo anterior de lazo anidados puede ser confuso y más de alguno de los lectores podría estar pensando que esto es innecesariamente complicado y que posiblemente el sistema de lazos anidados nunca se vuelve inestable.

Después de todo, ¿no se nos ha enseñado que los lazos están desacoplados por velocidad de operación, y que de esta forma se efectúa un diseño por separado de cada lazo?. Si así es, ¿por qué variaciones en la ganancia del lazo interno pueden llevar al lazo externo a inestabilidad?. La respuesta es simple, en este caso el lazo interno no se puede representar como un bloque de ganancia unitaria. La ganancia equivalente del lazo interno cambia los polos de lazo cerrado en el lazo externo. Si

algo ya sabemos muy bien, es que cambios en la ganancia de un sistema afectan la posición de los polos de lazo cerrado.

Para esclarecer cualquier duda vamos a validar el diseño utilizando simulación. Para esto se implementa el sistema de lazos anidados en Simulink, tal como se muestra en la Fig. 9.5.

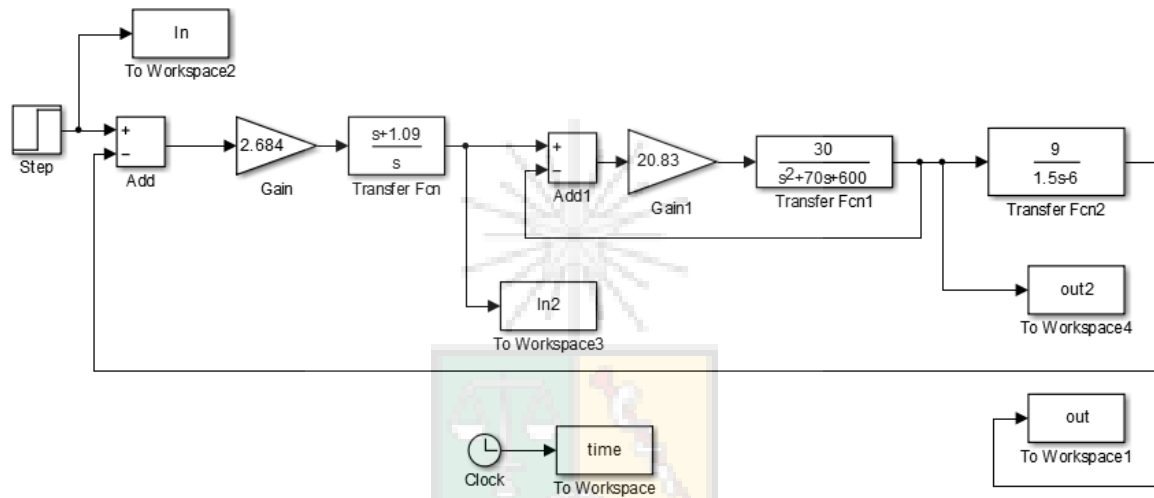


Figura 9.5: Sistemas de control de lazos anidados utilizando los controladores ya encontrados en la Sección 9.1.

En el lazo externo lado izquierdo de la Fig. 9.5 se encuentra el controlador descrito por la ecuación (9.8). En el lazo interno se encuentra el controlador proporcional con $K = 20.83$. En el lado derecho de la Fig. 9.5 se encuentra la planta del lazo interno de (9.2). Los bloques In , $In2$, out , $out2$ y $time$ son elementos de almacenamiento utilizados para graficar las variables del lazo interno y externo.

Al sistema de la Fig. 9.5 se le aplica un escalón unitario en $t = 0.1$ seg. y se observa el desempeño del lazo interno y externo. Los resultados se muestran en la Fig. 9.6.

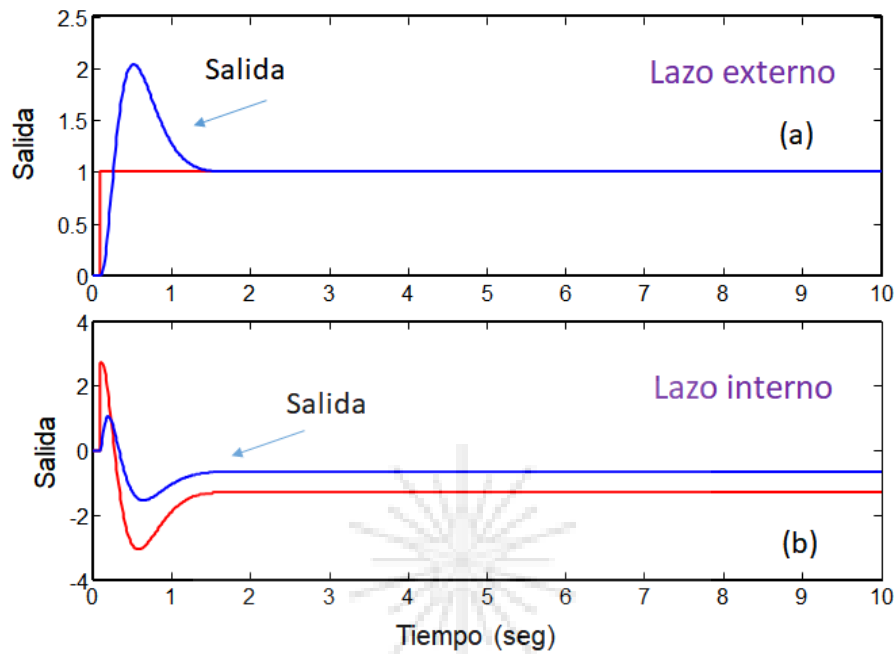


Figura 9.6: Respuesta del sistema de control con lazos anidados. (a) entrada y salida del lazo externo de control. (b) entrada y salida del lazo interno.

El lazo externo tiene cero error en estado estacionario a entrada escalón debido al integrador que se encuentra en el PI (principio del modelo interno). El lazo interno tiene valores negativos en estado estacionario, tal como muestra en la Fig. 9.6(b).

Obtener una salida negativa en el lazo interno no es precisamente una sorpresa en este problema, ya que la planta del lazo externo, en estado estacionario ($s = 0$), tiene una ganancia equivalente de $-3/2$. Por lo tanto para lograr una salida positiva en el lazo externo de control, el interno debe entregar un valor negativo en estado estacionario.

Al medir la entrada y la salida del lazo interno (utilizando la función gráfica *Ginput* de Matlab), en estado estacionario se obtienen valores de -0.64 para la salida y -1.3 para la entrada. De estos valores se obtiene una ganancia $K_{eq} \approx 0.497$, muy

cerca del valor de $K_{eq} \approx 0.51$ obtenido teóricamente [por medio de (9.7)] y utilizado para calcular la ganancia del controlador en la ecuación (9.8).

9.1.1.1. Verificando la operación inestable

De acuerdo a los resultados obtenidos después de aplicar el criterio de Routh-Hurwitz [ver ecuación (9.9)], la ganancia del controlador del lazo interno tiene que reducir su valor desde $K = 20.83$ a $K = 6.6$ para producir polos de lazo cerrado inestables en el lazo interno. Para verificar esta condición inestable realiza nuevamente la simulación del modelo mostrado en la Fig. 9.5 y se utiliza una rampa con pendiente negativa, para reducir la ganancia del controlador proporcional desde $K = 20.83$ a $K = 6.6$. Los resultados obtenidos por simulación se muestran en la Fig. 9.7.

De la Fig. 9.7 se concluye que el lazo externo mantiene cero error en estado estacionario casi hasta el punto en que la ganancia llega al valor crítico [ver Fig. 9.7(a)]. Cuando se llega al valor de $K = 6.6$ el sistema comienza a oscilar con un período cercano a $T = 2.7$ seg y se vuelve inestable [ver Figs. 9.7(a) y (b)]. El período de 2.7seg es similar al obtenido a partir de la frecuencia de cruce del lugar de la raíz mostrado en la Fig. 9.4.

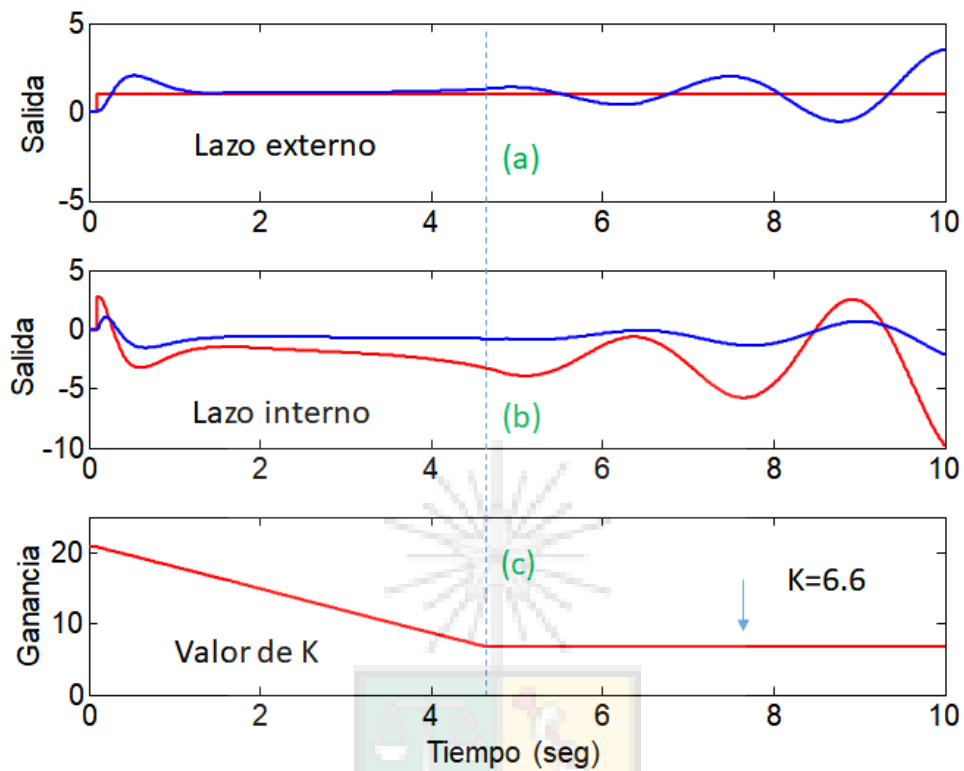


Figura 9.7: Respuesta del sistema de control con lazos anidados y una variación tipo rampa (con pendiente negativa) en la ganancia proporcional del lazo interno.(a) Entrada y salida del lazo externo de control.(b) Entrada y salida del lazo interno.(c) valor de la ganancia proporcional del controlador; su valor inicial es $K = 20.83$ y su valor final es $K = 6.6$.

9.2. Control de una Máquina de Corriente Continua Incluyendo Anti-Windup

Utilizando la metodología de diseño discutida en la Sección 8.3.1 se realizará el diseño y simulación de una máquina de corriente continua. Por simplicidad en (9.10) se repiten las ecuaciones ya mencionadas anteriormente. Además en la Fig. 9.8 se

repite el diagrama de la máquina controlada por corriente de armadura y con flujo regulado externamente y a un nivel constante.

$$\begin{aligned}
 E_g &= K_T \omega_r \\
 E &= R i_a + L \frac{di_a}{dt} + K_T \omega_r \\
 T_e &= K_T i_a \\
 T_e &= J \frac{d\omega_r}{dt} + B \omega_r
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

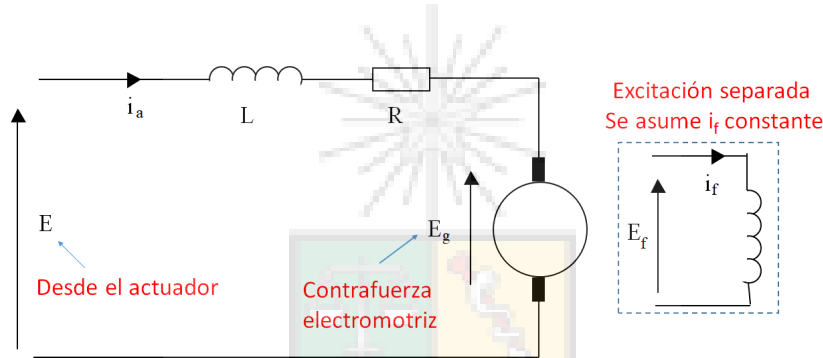


Figura 9.8: Componentes de una máquina de corriente continua. La excitación se asume separada y se muestra en la parte derecha de la figura. La armadura y sus componentes se encuentran en la parte izquierda.

Los parámetros de la máquina de continua a controlar son $L_a = 120mH$, $R_a = 0.7\Omega$, $J = 0.2Kgm^2$, $B = 2 \cdot 10^{-3}Nm \cdot seg/rad$ and $K_T = 2.5Nm/A$. Donde L_a es la inductancia de armadura, R_a es la resistencia de armadura, J es el momento de inercia rotacional, B es el coeficiente de fricción viscosa y K_T es la constante que relaciona el torque electromecánico con la corriente de la máquina. El voltaje nominal de la máquina es de 500V y el voltaje E a la salida del actuador puede alcanzar valores entre $-550V < E < 550V$. La corriente nominal de la armadura es de 14A y el actuador, basado en electrónica de potencia, tiene un retardo de transporte de 1ms. Se pide:

1. Diseñar el lazo de corriente de armadura para una frecuencia natural de 100Hz, cero error en estado estacionario a entrada escalón y coeficiente de amortiguamiento $\zeta=0.707$. Se debe considerar un algoritmo de anti-windup en su diseño.
2. Diseñar el lazo de velocidad rotacional para una frecuencia natural de 10Hz, cero error en estado estacionario a entrada escalón, $\zeta=0.707$, cero error en estado estacionario a entrada escalón y coeficiente de amortiguamiento $\zeta=0.707$. Se debe considerar un algoritmo de anti-windup en su diseño.

9.2.0.1. Diseño del Controlador del Lazo Interno

La metodología de diseño del lazo interno, sin incluir el retardo, ya fue discutida en la Sección 8.3.3. El diagrama de bloques, asumiendo total desacople entre el lazo interno y externo, se muestra en la Fig. 9.9.

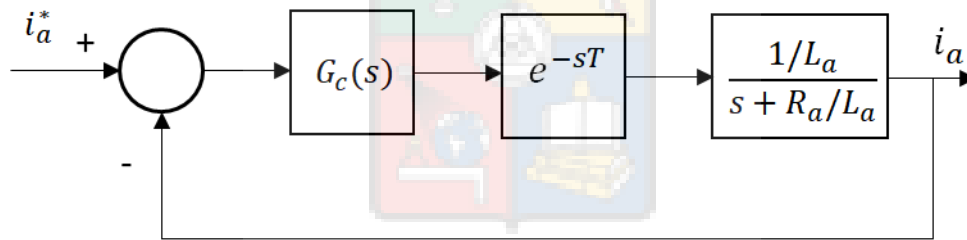


Figura 9.9: Diagrama de bloques del lazo interno, incluyendo retardo en el actuador.

Considerando el retardo de 1ms, representado utilizando Padé de primer orden, y los valores de resistencia e inductancia de armadura se obtiene el lugar de la raíz que se muestra en la Fig. 9.10. El controlador propuesto es un simple PI cuya función de transferencia se muestra en la ecuación (9.11).

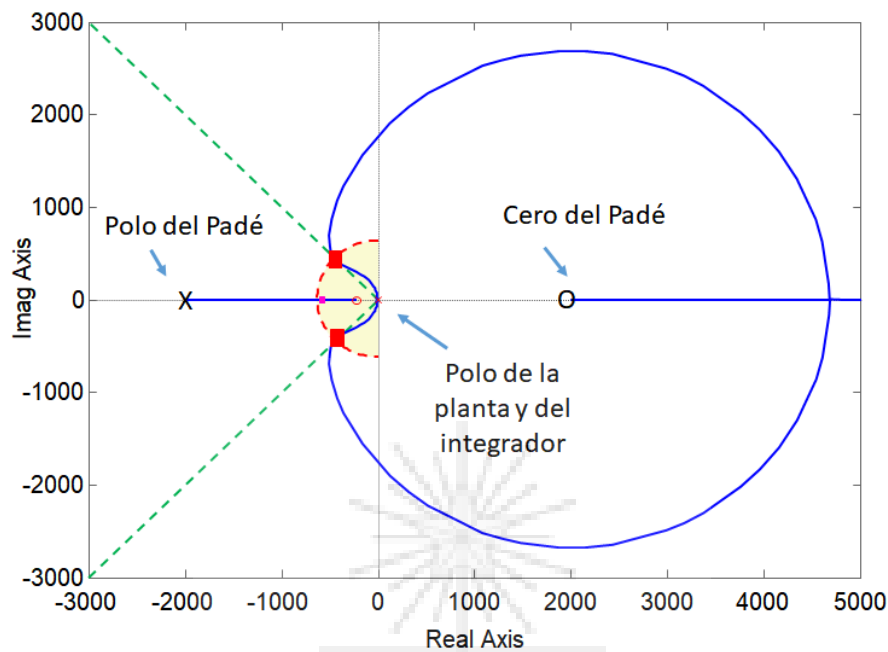


Figura 9.10: Lugar de la Raíz correspondiente al diagrama de bloques de la Fig. 9.9

$$G_c(s) = 61.611 \cdot \frac{(s + 224)}{s} \quad (9.11)$$

Probablemente el Padé de primer orden no sea suficientemente exacto para esta aplicación y se invita al lector a repetir el diseño considerando una aproximación de Padé de mayor orden.

9.2.0.2. Diseño del Controlador del Lazo Externo

La metodología de diseño del lazo interno, sin incluir el retardo, ya fue discutida en la Sección 8.3.2. El diagrama de bloques, asumiendo total desacople entre el lazo

interno y externo, se muestra en la Fig. 9.11. El lazo interno se asume como un bloque de ganancia unitaria.

Considerando los valores de K_T , inercia rotacional y coeficiente de fricción viscosa detallados anteriormente, se obtiene el lugar de la raíz que se muestra en la Fig. 9.12. El controlador propuesto es nuevamente un PI cuya función de transferencia se muestra en la ecuación (9.12).

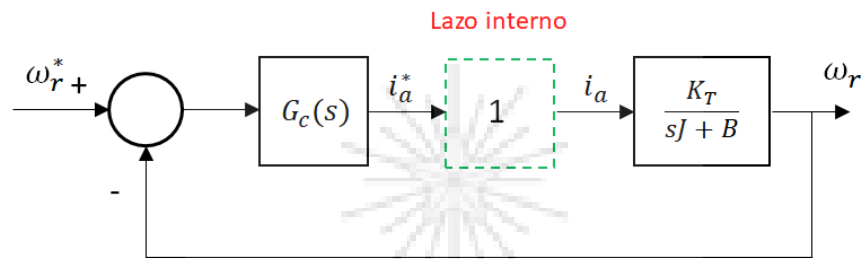


Figura 9.11: Diagrama de bloques del lazo externo.

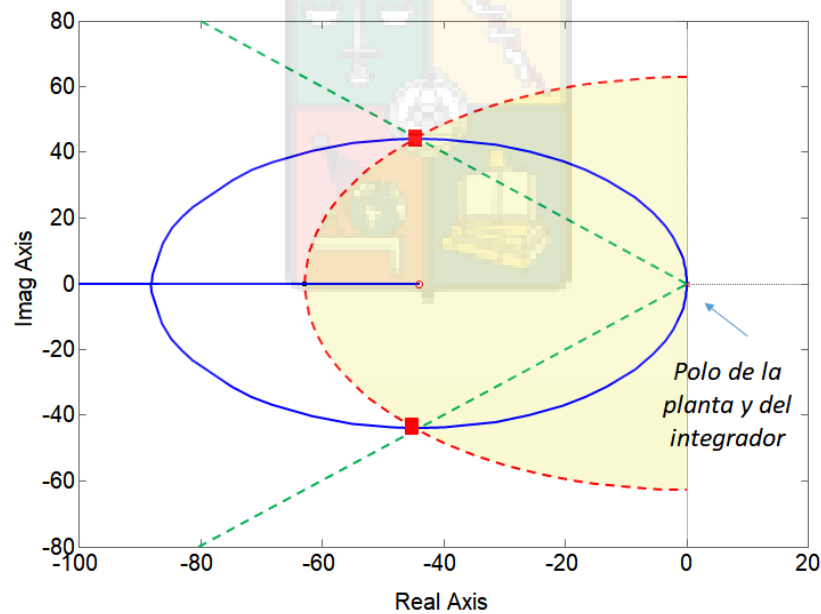


Figura 9.12: Lugar de la raíz correspondiente al controlador externo.

$$G_{\omega}(s) = 7.205 \cdot \frac{(s + 44)}{s} \quad (9.12)$$

9.2.0.3. Diseño del Algoritmo Antiwind-up Para Ambos Lazos

Para el caso del controlador PI se pueden aplicar los algoritmos anti-windup mostrados en la Fig. 8.6 y Fig. 8.11. Para esta aplicación se elige el anti-windup discutido en la Sección 8.2 que corresponde al presentado en las Figs. 8.10 y 8.11.

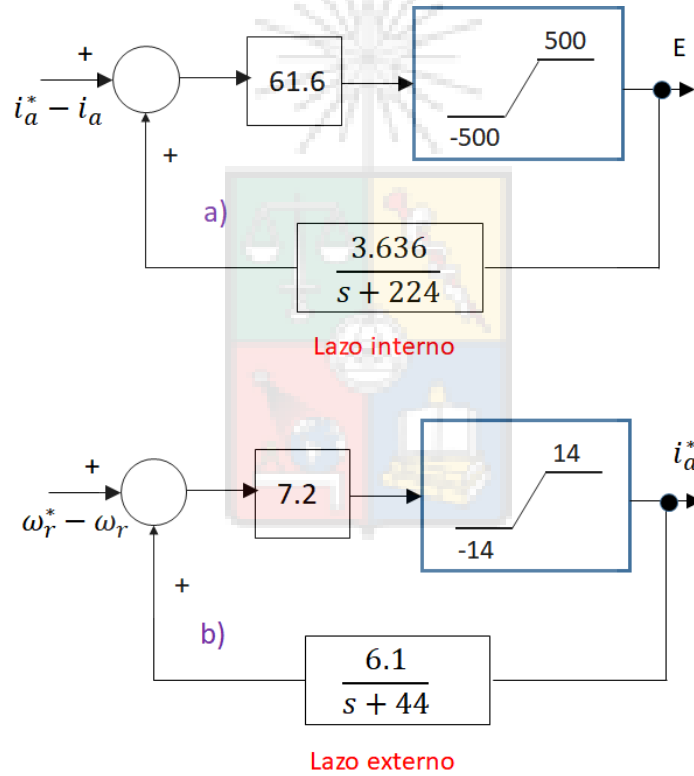


Figura 9.13: controladores de los lazos externo e interno implementados considerando anti-windinding up. a) Controlador del lazo interno, ecuación (9.11). b) Controlador del lazo externo, ecuación (9.12).

Los controladores encontrados para el lazo interno [ver (9.11)] y externo [ver (9.12)] se implementan utilizando la metodología discutida en la Sección 8.2 y se representan en la forma mostrada en la Fig. 9.13.

9.3. Validación del Diseño Utilizando Simulación

El sistema de control de la máquina de corriente continua, se muestra en la Fig. 9.14.

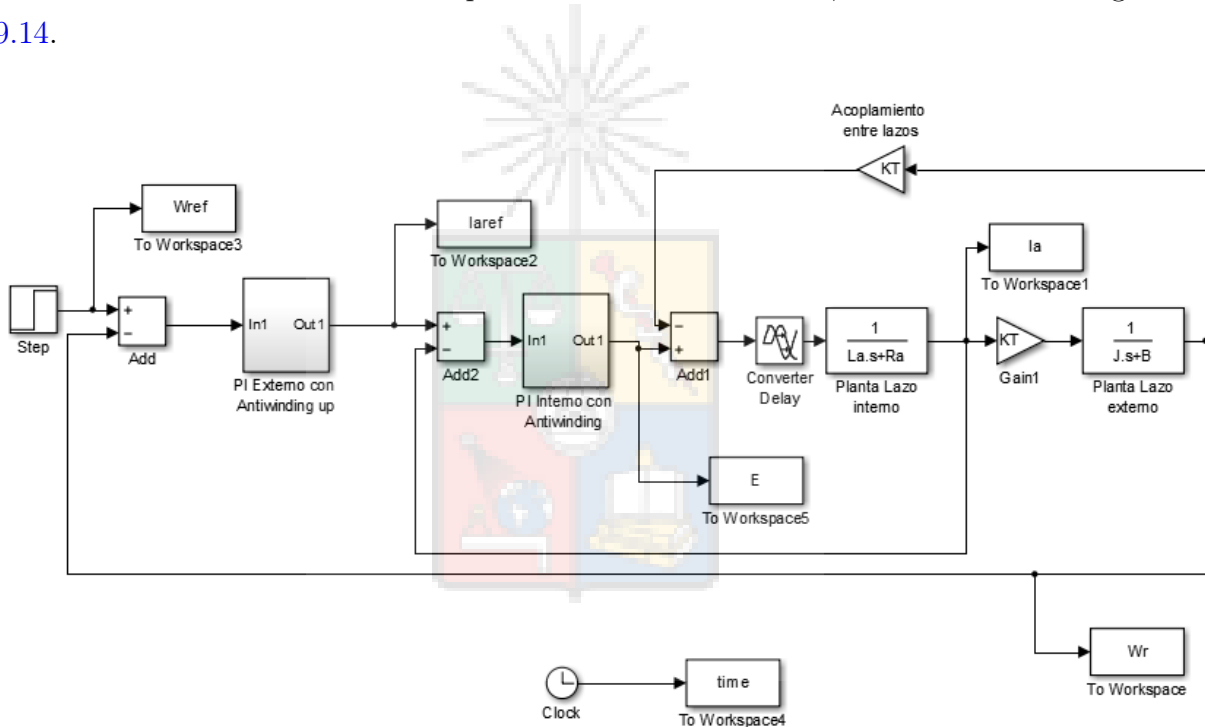


Figura 9.14: Sistema de control del lazo interno y externo implementado utilizando simulink. Los bloques PI externo y PI interno son utilizados para implementar los controladores mostrados en la Figs. 9.13(a) y 9.13(b) respectivamente.

Nótese que el retardo de transporte de $1ms$, se representa utilizando el modelo exacto disponible en la librería de Simulink. Nuevamente los bloques $Wref$, $Iaref$, Ia ,

E , Wr y $time$ representan unidades de almacenamiento utilizadas para fines gráficos y de análisis.

9.3.0.1. Seguimiento de Referencia de Velocidad y Corriente

La Fig. 9.15 muestra el seguimiento de la referencia de velocidad y de corriente para un cambio tipo escalón de la velocidad de referencia, entre 0-1500rpm, seguido por un cambio escalón de velocidad entre 1500rpm a -1500rpm. Usualmente, el

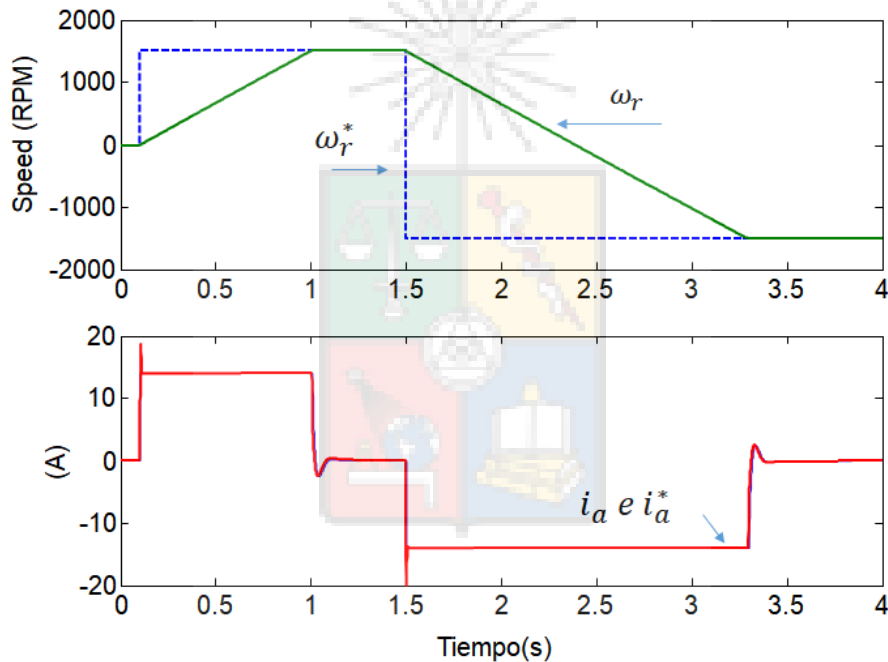


Figura 9.15: Seguimiento de la referencia de velocidad y corriente. Gráfico superior; velocidad rotacional y su referencia. Gráfico inferior; corriente de armadura y su referencia.

seguimiento de la referencia de velocidad depende de la razón entre el máximo torque electromagnético disponible (es decir $K_T \cdot I_{amax}$) y la inercia rotacional J .

Como se mencionó anteriormente la constante de tiempo del lazo externo es alta y el seguimiento tiene un relativamente alto tiempo de establecimiento, a menos que J tenga un valor pequeño. Nótese que para fines ilustrativos, se está utilizando un valor de J bastante superior a lo que habitualmente se encuentra en una máquina de continua de $7kW$.

El control de la corriente de armadura, mostrado en la parte inferior de la Fig. 9.15, es muy rápido y se encuentra limitado entre $\pm 14A$. El seguimiento es casi perfecto con algo de error durante los cambios en la velocidad de referencia. Este seguimiento indica que asumir que el lazo interno tiene una función de transferencia igual a la unidad es adecuado ya que esta es la situación que se produce en ausencia de perturbaciones.

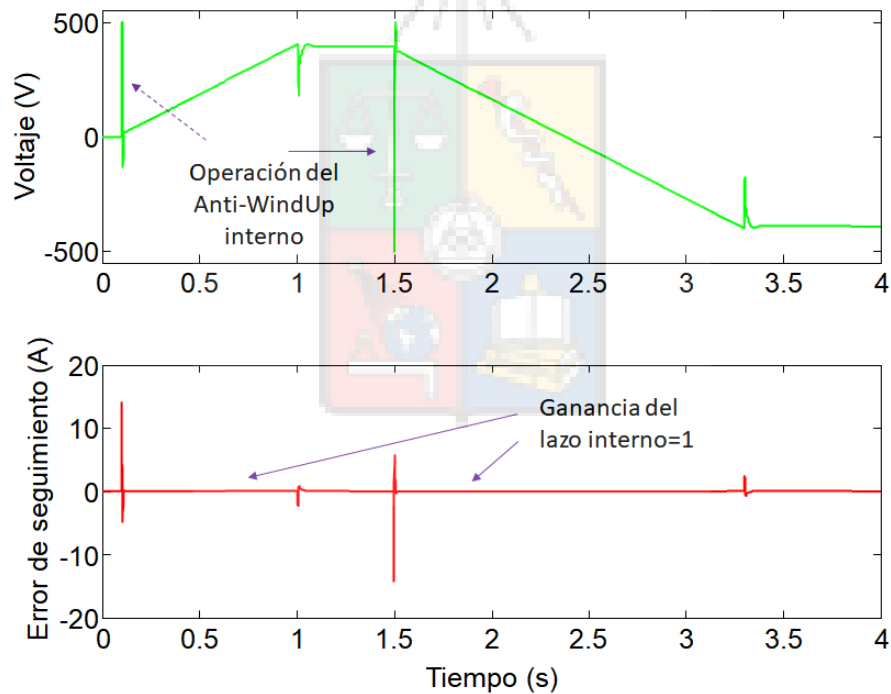


Figura 9.16: Voltaje E entregado por el actuador a la armadura (gráfico superior), y error de seguimiento de la corriente de armadura (gráfico inferior).

La Fig. 9.16 muestra el voltaje entregado por el actuador (ver gráfico superior). La zonas en que alcanza los valores máximos y mínimos de voltaje de salida actuador son aquellos en que el algoritmo anti-windup funciona. En general en una máquina de alta inercia el anti-windUp del lazo externo es aquel que opera mas frecuentemente ya que se requiere mayor tiempo operando con máxima/mínima corriente para compensar las perturbaciones (ver Fig. 9.15) o cambios bruscos en la referncia de velocidad. Sin embargo, aunque opere por poco tiempo, el anti-windup interno es necesario ya que de lo contrario el winding-up del integrador puede ocasionar sobrecorrientes o la operación de protecciones. Basta con que la protección de sobrecorriente de la máquina opere una vez para un proceso se detenta completamente y se deba reiniciar.

El error de corriente mostrado en la parte inferior de la Fig. 9.16 es cero en ausencia de perturbaciones, por lo tanto (como ya se mencionó anteriormente) el lazo interno puede ser representado como un bloque de ganancia unitaria. Sin embargo, durante las perturbaciones de velocidad tales como cambios bruscos en la referencia y/o perturbaciones en la carga, la ganancia deja de ser unitaria y ambos lazos estarían acoplados. Si esto produce un mal desempeño, o la planta del lazo externo tiene una dinámica comparable a la del lazo interno (debido a una muy baja inercia), entonces lo más adecuado es utilizar técnicas de diseño MIMO, en vez de SISO, ya que no es posible asumir que ambos lazos estarán desacoplados.

9.3.1. Control de un Sistema con Entrada Sinusoidal

Para la siguiente planta

$$G_p(s) = \frac{30}{(s + 30)} \quad (9.13)$$

se pide diseñar un sistema de control que tenga la capacidad de entregar cero error en estado estacionario a una entrada sinusoidal de 50Hz , coeficiente de amortiguamiento de $\zeta=0.6$ y frecuencia natural ω_n de 150 rad/seg . El diagrama de control propuesto se muestra en la Fig. 9.17.

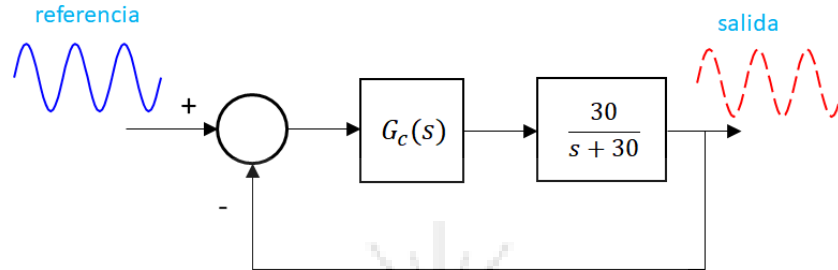


Figura 9.17: Sistema de control considerando referencia sinusoidal de 50Hz .

9.3.1.1. Control Utilizando un Controlador PI

Un controlador PI no puede entregar cero error en estado estacionario a entrada sinusoidal y eso se explica fácilmente utilizando el principio del modelo interno. Sin embargo este principio no es ampliamente conocido y cada cierto tiempo alumnos tesisistas e incluso investigadores con cierta experiencia intentan utilizar un controlador PI para lograr cero error en estado estacionario a entradas sinusoidales.

Para mostrar el desempeño obtenido utilizando un PI, se diseña este controlador para lograr el coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural solicitada. El lugar de la raíz correspondiente se muestra en la Fig. 9.18.

El controlador obtenido a partir del lugar de la raíz de Fig. 9.18 tiene la función de transferencia mostrada en (9.14).

$$G_c(s) = 5 \cdot \frac{(s + 151)}{s} \quad (9.14)$$

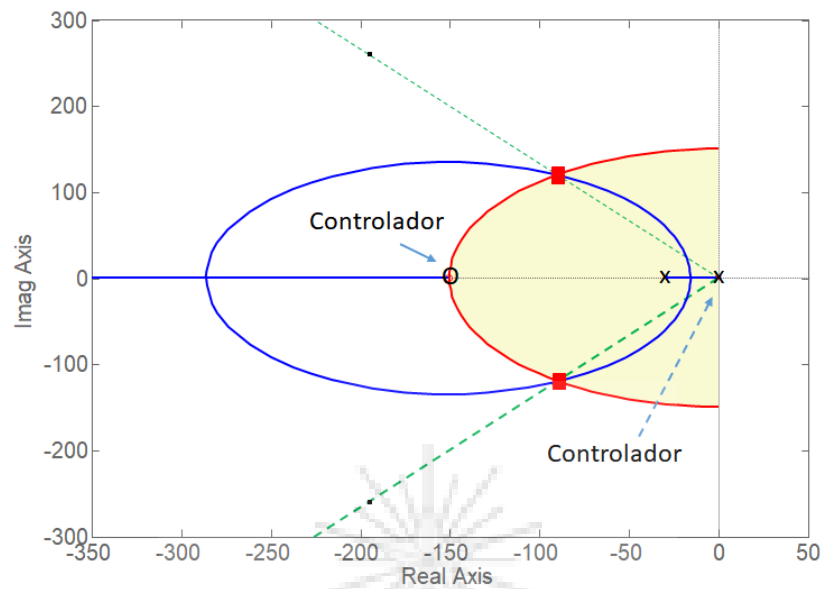


Figura 9.18: Lugar de la raíz para diseñar el sistema de control considerando un PI y la planta de (9.13)

Utilizando este controlador, se simula la operación del sistema considerando una entrada de referencia de 50Hz. Los resultados se muestran en la Fig. 9.19. Nótese la alta magnitud del error, la cual se debe a que la frecuencia natural es bastante menor a la frecuencia de entrada $\omega_e = 2\pi 50$. Si se aumenta la frecuencia natural es posible mejorar el seguimiento de la referencia pero nunca llevar el error a cero. Sin embargo, como ya se ha discutido anteriormente, aumentar la frecuencia natural de lazo cerrado en forma excesiva, produce un aumento en la amplificación del ruido de alta frecuencia que se encuentra en la medición- [ver la Sección 3.6 y la ecuación (3.50)].

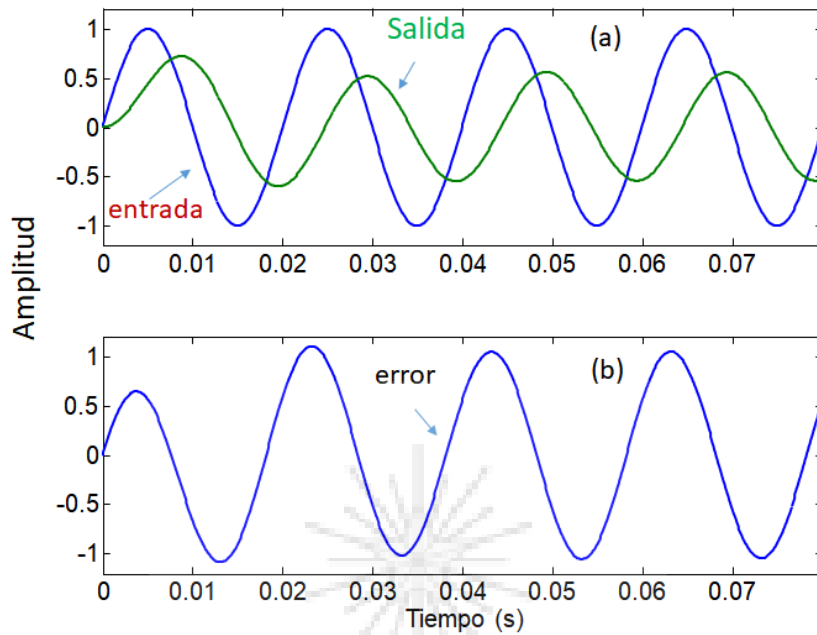


Figura 9.19: Resultados de simulación considerando la planta de (9.13) y el controlador PI de (9.14). a) Entrada de referencia de 50Hz y su correspondiente salida del sistema de control. b) Error de seguimiento de la referencia.

9.3.1.2. Control Utilizando un Controlador Resonante

Para lograr cero error en estado estacionario se debe cumplir con el principio del modelo interno. Para esto se debe recordar la transformada de Laplace de $\sin(\omega_e t)$, y que se muestra en (9.15).

$$\mathcal{L} [\sin(\omega_e t)] \Rightarrow \frac{\omega_e}{s^2 + \omega_e^2} \quad (9.15)$$

Por lo tanto, considerando el principio del modelo interno, inmediatamente se puede concluir que para lograr cero error en estado estacionario se debe utilizar, en el denominador del controlador, el término $s^2 + \omega_e^2$, donde la frecuencia a considerar

en este caso es $\omega_e = 2\pi 50$.

Para implementar este controlador existen muchas soluciones reportadas en la literatura, por ejemplo un controlador proporcional resonante. Sin embargo, como ya hemos discutido anteriormente, los requisitos para implementar un sistema de control es que las soluciones sean simples de implementar y que además cumplan con las especificaciones de diseño. Si logramos eso, entonces hemos logrado el diseño.

Utilizando ceros complejos conjugados en el numerador del controlador y polos resonantes en el denominador, se logra el lugar de la raíz que se muestra en la Fig. 9.20.

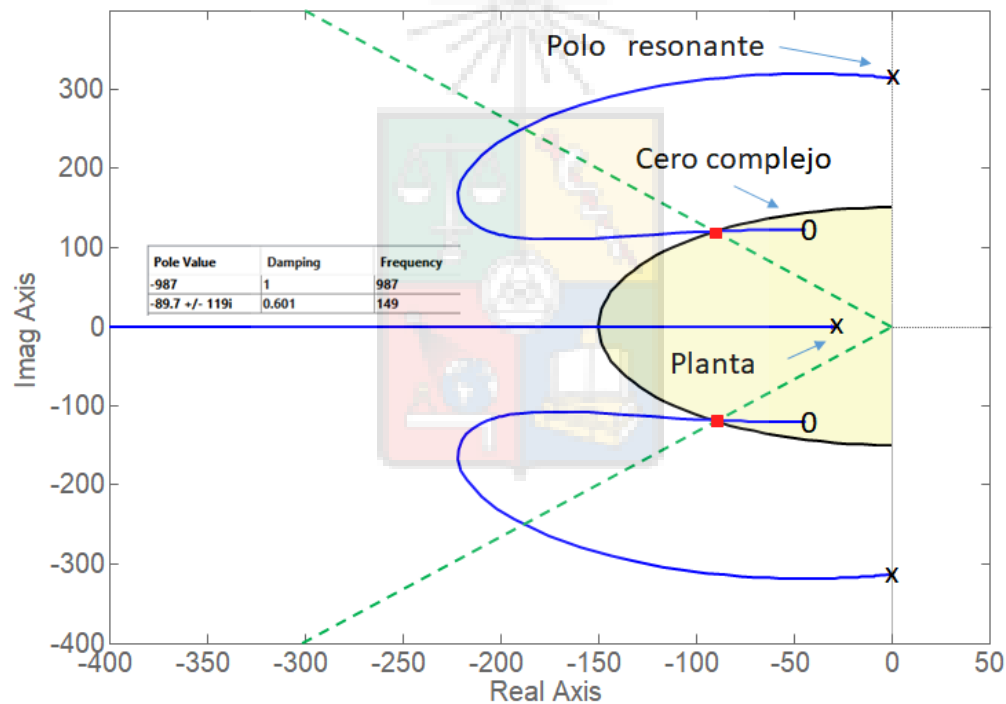


Figura 9.20: Lugar de la raíz obtenido al considerar el controlador de (9.16) y la planta de (9.13)

La función de transferencia del controlador, obtenida desde la herramienta RLTOOL de Matlab, es mostrada en la ecuación (9.16).

$$G_c(s) = 37.9 \cdot \frac{s^2 + 88.6s + 1.68 \cdot 10^4}{s^2 + (2\pi 50)^2} \quad (9.16)$$

Recuerde que es el denominador de (9.16) el que nos asegura el cero error en estado estado estacionario a una entrada sinusoidal con frecuencia de $50Hz$. En algunos textos se le denomina al denominador $s^2 + \omega_e^2$, *integrador generalizado*, realizando una analogía con un PI donde se encuentra el término s en el denominador el cual sería *resonante* a $0Hz$.

¿Es posible obtener el controlador de (9.16) utilizando la condición de ángulo del LGR y una simple calculadora?. Estudie las metodologías de diseño y ejercicios del Capítulo 7 y efectúe el intento.

Para fines de simulación, se implementa el sistema de control mostrado en la Fig. 9.21.

Utilizando el modelo Simulink de la Fig. 9.21, se obtienen los resultados de simulación que se muestran en la Fig. 9.22. El controlador resonante diseñado entrega un excelente desempeño, con un peak de error de menos de 20 % de la referencia. Esto se compara bastante bien con los resultados obtenidos al utilizar el controlador PI, y que son mostrados en la Fig. 9.19, donde el peak de error es casi igual al 100 % de la amplitud de entrada y se mantiene en estado estacionario en ese valor.

El sistema de control resonante cumple con el principio del modelo interno y por ese motivo el error en estado estacionario es igual a cero. Nótese que el tiempo de establecimiento del 2 % es cercano a 30ms [ver Fig. 9.22(b)] y esto es incluso menor

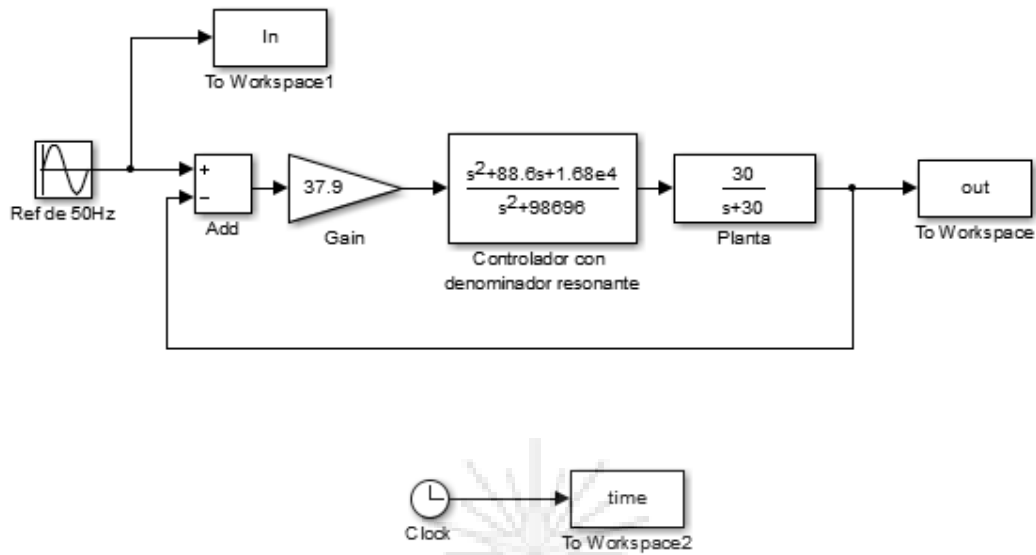


Figura 9.21: Diagrama de control implementado en Simulink para verificar el desempeño del controlador mostrado en la ecuación (9.16).

a lo que se obtiene utilizando la ecuación (2.6) de la Sección 2.1.1. Probablemente esto se debe a la presencia de los ceros que aumentan el ancho de banda de control.

9.3.1.3. Ejercicio Propuesto

Dado que en el ámbito de ingeniería eléctrica, la entrada sinusoidal de referencia de corrientes y/o voltajes es muy frecuente, existe un controlador propuesto que se denomina proporcional resonante o PR y que utiliza para el control de máquinas eléctricas y convertidores de potencia. La función de transferencia de este controlador es mostrada en la ecuación (9.17).

$$G_c(s) = K_p + K_r \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_e^2} \quad (9.17)$$

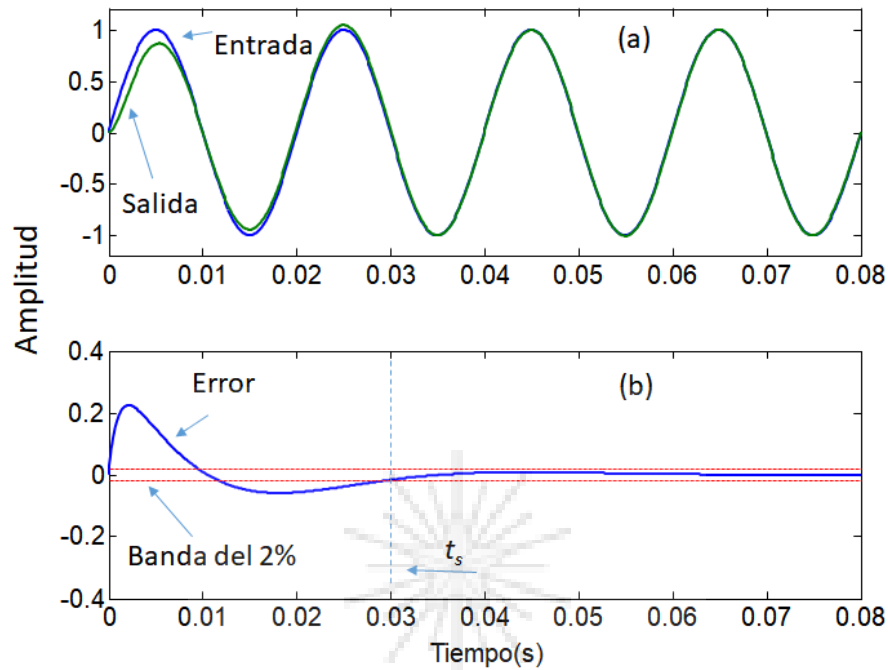


Figura 9.22: Resultados de simulación considerando la planta de (9.13) y el controlador resonante de (9.16). (a) Entrada de referencia de 50Hz y la correspondiente salida del sistema de control. (b) Error de seguimiento de la referencia.

Donde K_P y K_r son grados de libertad.

Rediseñe el sistema de control propuesto utilizando controladores PR .

Capítulo X

INTRODUCCION AL DOMINIO DIGITAL O Z



Conceptos de Control Digital

10.1. Introducción

En este capítulo se asume que todos los alumnos dominan apropiadamente la transformada z y algunas de sus propiedades básicas. Para repasar algunos conceptos se puede utilizar el libro *Sistemas de control de tiempo discreto* de Katsuhiko Ogata. Existe una gran cantidad de libros excelentes (recientes y antiguos) que discuten conceptos como la transformada z y el control digital en profundidad, ya que esta área del control automático (y otros tópicos a estudiar en el curso) no es nueva.

Un sistema SISO de control en el plano z no es muy distinto a lo que ya hemos estudiado en el plano s . Al utilizar control digital el controlador y a veces parte del procesamiento de señales se realiza en un procesador digital, permitiendo el remplazo de hardware por rutinas de programación que son simples de implementar y modificar.

El diagrama de un sistema SISO de control digital es mostrado en la Fig. 10.1. Todo lo que se encuentra al interior del cuadro en línea punteada corresponde a lo implementado en el procesador digital utilizando software (en el pasado se

implementaba habitualmente en lenguaje C y un poco de assembler). El filtro digital se utiliza en algunas aplicaciones y no siempre es necesario.

El uso de software es la principal ventaja de los sistema de control digital ya que para implementar un controlador, por ejemplo un PI se utiliza un par de líneas de programa. Si la aplicación requiere una malla en adelante o atraso, entonces el único cambio que se debe realizar es modificar el software y agregar más ecuaciones de diferencia. En cambio, al utilizar control analógico, agregar una malla en adelante o atraso, implica utilizar hardware adicional como amplificadores operacionales, resistencias y condensadores. Incluso el modificar una ganancia en control continuo requiere intervenir el hardware y, por ejemplo, sintonizar apropiadamente un potenciómetro. En cambio el modificar una ganancia en control digital solo implica redefinir una constante en una posición de memoria.

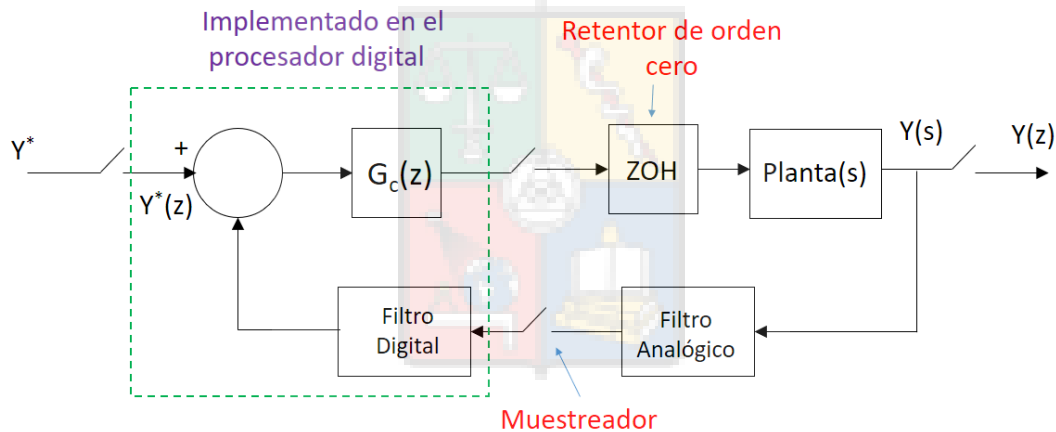


Figura 10.1: Ejemplo de implementación de un sistema de control digital.

Afuera del procesador en el diagrama de control de la Fig. 10.1, se encuentra el retenedor (o retentor) de orden cero, la planta y un filtro analógico que generalmente es un filtro-antialiasing.

10.1.0.1. Muestreador o Conversor A/D

El *muestreador* es un dispositivo que transforma una señal analógica en digital y físicamente se implementa utilizando un conversor Análogo/Digital (habitualmente denominado A/D o conversor A/D). La representación de un muestreador se encuentra en la Fig. 10.2. El dispositivo representado en la Fig. 10.2, toma una

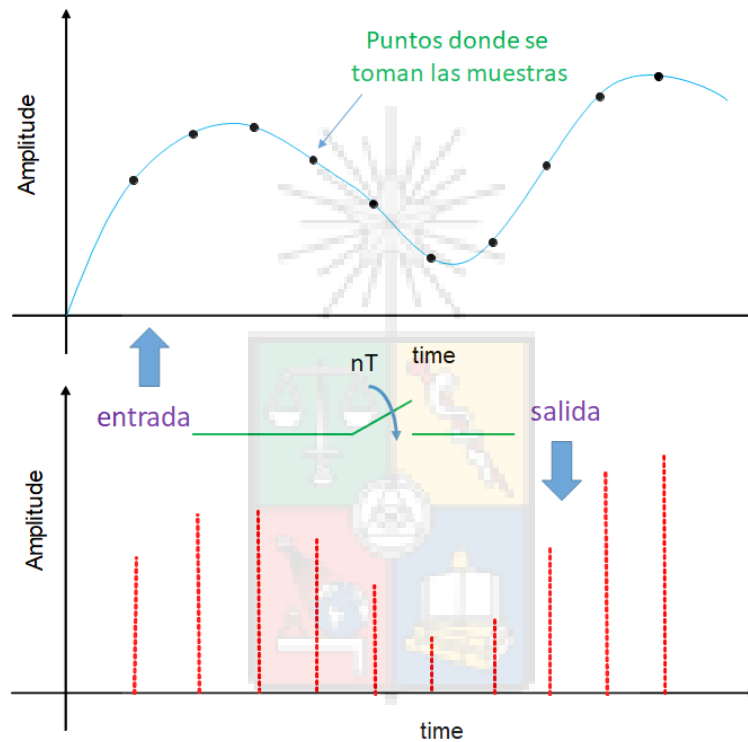


Figura 10.2: Efecto de muestrear una señal analógica.

muestra cada T segundos, donde T es el período de muestreo. A la entrada se encuentra la señal analógica y a la salida se encuentra un tren de impulsos $\delta(t)$ cuya magnitud o altura representa el valor de la señal en el punto en que se accionó el *interruptor* que se encuentra en la parte central de la Fig. 10.2.

¿Cuales son las diferencias existentes entre el muestreador (dispositivo ideal) y un conversor A/D (*dispositivo real*)? Existen distintas formas de implementar un conversor A/D y uno de los más comunes es el denominado conversor de aproximaciones sucesivas. El esquema de éste se muestra en la figura 10.3 y se basa en un método numérico de aproximaciones que permite encontrar la representación digital de n bits. El método de las aproximaciones sucesivas se explica en esta [página](#). Dado que este no es un curso de instrumentación, la topología de los distintos

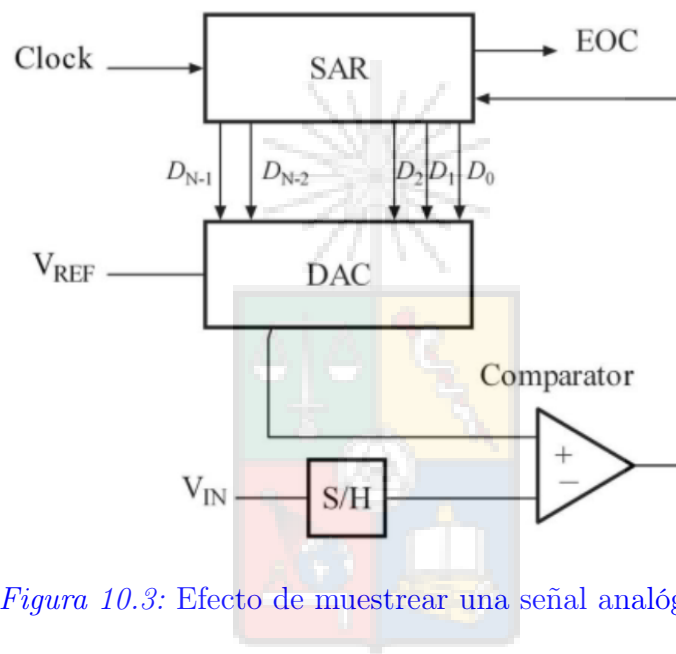


Figura 10.3: Efecto de muestrear una señal analógica.

conversores A/D no se discute. Sin embargo desde el punto de vista de diseño de sistemas de control se debe tener presente lo siguiente:

- La conversión A/D no es instantánea. Requiere varios pulsos de reloj para que se obtenga la representación digital de una señal analógica dada. En un sistema bien diseñado el tiempo de conversión debería ser solo una fracción del período de muestreo.

En el pasado el hardware era lento y los que trabajábamos en el área de

control de máquinas eléctricas utilizábamos conversores A/D con velocidades relativamente bajas (por ejemplo $10\mu s$ de tiempo de conversión). En la actualidad una procesador Delfino de Texas Instrument (con un costo menor a US\$ 50 y 300 MFLOPS) viene equipado con conversores A/D de 12 bits y menos de $100ns$ de tiempo de conversión. El acrónimo MFLOPS significa *Millions of Floating Point Instructions per Second* y es una medida de la velocidad de procesamiento de un procesador digital. Por ejemplo el Delfino de Texas Instruments tiene 300 MFLOPS y la plataforma MICROLAB Box de Dspace que utilizamos en nuestro laboratorio, tiene 8000 MFLOPS y un costo bastante más alto.

¿Por qué es importante la velocidad de conversión? Un sistema de control digital tiene un tiempo de muestreo T . Durante ese período de muestreo una serie de tareas deben ser realizadas por el procesador digital. Por ejemplo las que se muestran en la Fig. 10.4, donde después de ingresar al sistema las señales desde los conversores A/D, se debe filtrar, implementar los algoritmos de control, realizar antiwinding-up, etc.

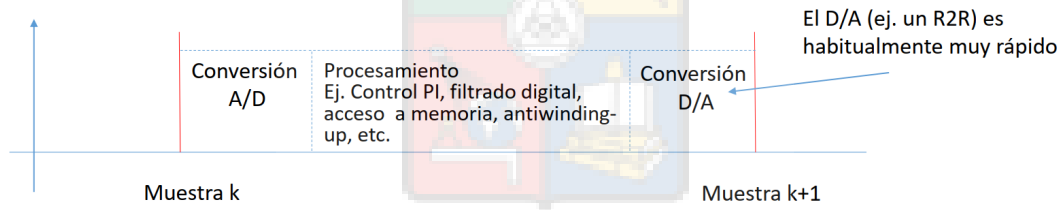


Figura 10.4: Tareas de control típicas que se deben efectuar en cada período de muestreo.

- El convertor A/D tiene un error de conversión que es intrínseco al dispositivo y que depende del número de bits con que cuenta el convertor. Si por ejemplo el convertor tiene 10 bits y se utiliza para muestrear una corriente entre 0-200A, entonces la salida del convertor cuenta con $2^{10} = 1024$ representaciones. Esta baja cantidad de bits podría significar que el convertor A/D no tendrá

la capacidad de discriminar entre 100A y 100.1A. Es decir para ambos se produciría la misma representación digital. Para este ejemplo de 10 bits, la resolución del conversor A/D sería de $Q = 200/2^{10} \approx 0.19A$. El error de conversión es $Q/2 \approx 0.09A$. Más información en *Sistemas de control de tiempo discreto* de Katsuhiko Ogata u otros textos.

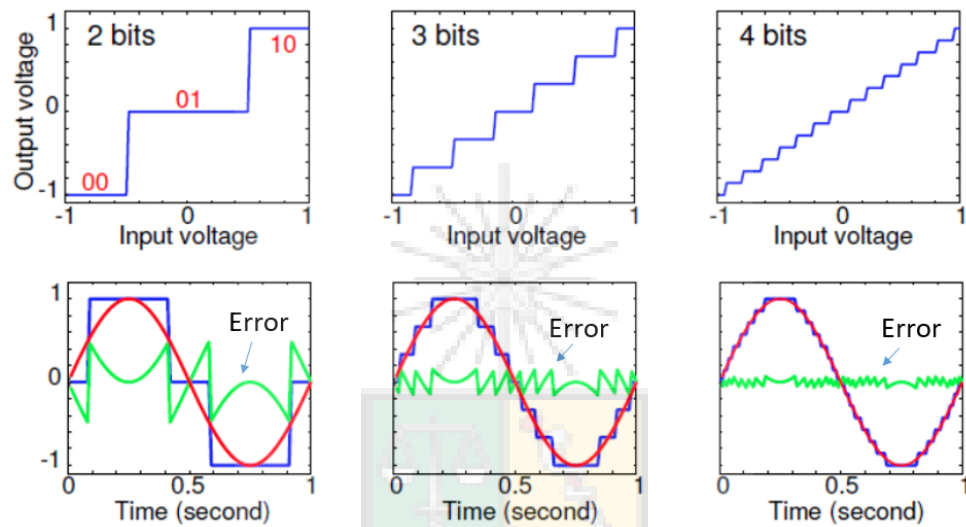


Figura 10.5: Figura tomada de este [Sitio Web](#) . En rojo la señal analógica, en azul la señal discretizada y en verde el error entre la representación digital y el valor analógico.

El error de discretización de los conversores se muestra en la Fig. 10.5; el efecto de este error es que la señal muestreada en la parte inferior de la Fig. 10.2 tiene un error asociado que depende de la resolución del conversor.

La señal obtenida a la salida de un conversor A/D se puede representar como el valor de la entrada más un error de representación variable en el tiempo, tal como se muestra en la Fig. 10.6. Este error de representación no puede ser muy alto, de otra forma se propaga a través del lazo de control y produce el funcionamiento inadecuado del sistema de control con oscilaciones en la salida. Ver, por ejemplo, el gran error de cuantización producido por el conversor de

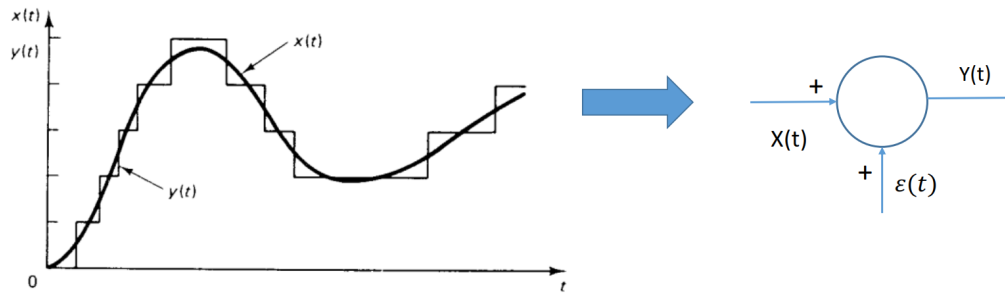


Figura 10.6: El error de representación del conversor A/D se puede representar como una señal $\epsilon(t)$ cuyo valor máximo es habitualmente la mitad de la resolución del conversor o $Q/2$. Para más información ver *Sistemas de control de tiempo discreto* de Katsuhiko Ogata.

dos bits mostrado en la primera columna a la izquierda, parte inferior de la Fig. 10.5.

En mi área de trabajo, control de máquinas eléctricas y convertidores basados en electrónica de potencia, se recomienda trabajar con convertidores A/D de al menos 12 bits de resolución.

10.1.0.2. Retenedor de Orden Cero o Zero Order Hold (ZoH)

Un retenedor es el más simple de los reconstructores que se utilizan en control digital, transformando una señal muestreada a una señal analógica que se puede aplicar a plantas en el plano s . El retenedor de orden cero habitualmente está conectado entre el actuador y el sistema de control digital y es una interfaz entre la parte digital y la analógica que existe en un sistema de control implementado en un procesador (ver Fig. 10.7).

El retenedor de orden cero tiene la función de transferencia que se encuentra en la ecuación (10.1). La representación gráfica de la ecuación (10.1) se muestra en la

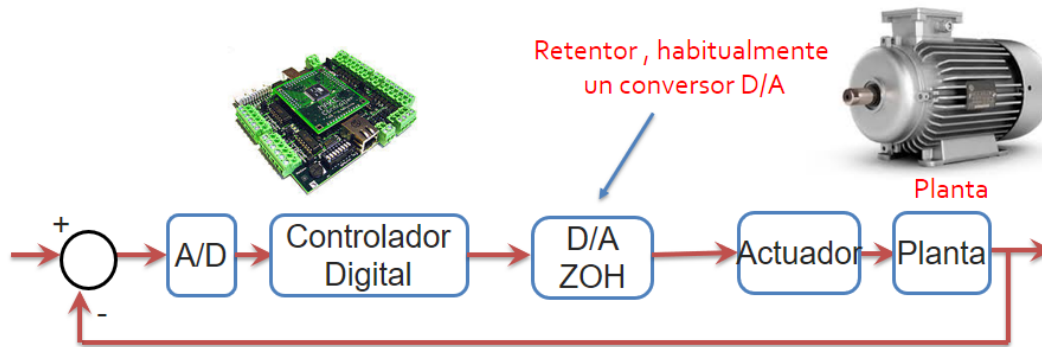


Figura 10.7: El retento de orden cero es un interfaz entre la parte digital y la parte analógica de un sistema de control digital. Físicamente el ZoH es habitualmente implementado utilizando un conversor digital analógico.

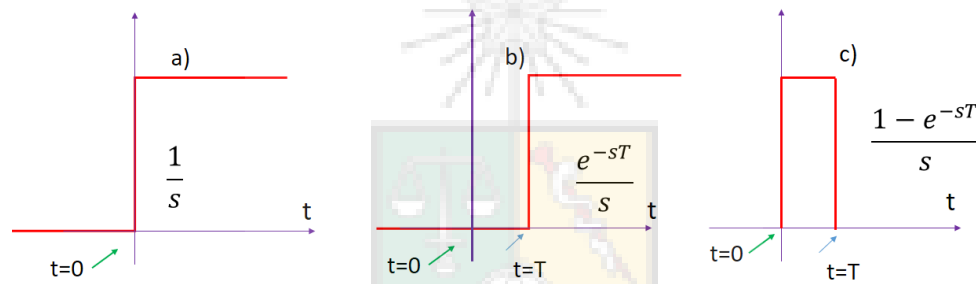


Figura 10.8: Representación gráfica de la operación matemática efectuada en la ecuación (10.1). a) Escalón unitario. b) Escalón unitario desplazado en T segundos. c) resta de a)- b).

Fig. 10.8. Nótese que (10.1) es equivalente a la resta de dos escalones, produciendo un rectángulo de ancho T segundos.

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (10.1)$$

El efecto del retenedor de orden cero se muestra en la Fig. 10.9. La entrada digital del ZoH es un tren de pulsos de altura variable que corresponde a la salida del sistema de control implementado en el procesador digital. En la figura que se encuentra al

medio, se encuentra la acción del retenedor que mantiene la señal de cada muestra estable hasta el próximo período. Finalmente el gráfico que se encuentra más a la derecha muestra la salida del *ZoH* que entrega una señal analógica hacia el actuador o planta.

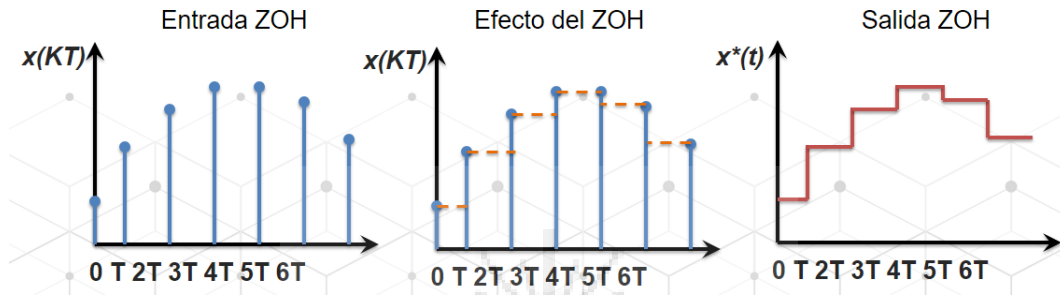


Figura 10.9: Efectos del retenedor de orden cero. A la izquierda se encuentra la salida del sistema de control digital que entrega un tren de pulsos de amplitud variable. Al medio se encuentra el efecto del *ZoH* que mantiene constante las señales entre muestras. Finalmente, a la derecha, se encuentra la señal de salida que se entrega a la parte analógica del sistema de control

De lo mostrado en la Fig. 10.9, se puede concluir fácilmente que sin este elemento el sistema de control digital difícilmente podría funcionar ya que los pulsos que se encuentran en la izquierda no se pueden aplicar directamente a la planta. Sin embargo, el retenedor produce algunos efectos secundarios que se pueden analizar comparando la señal analógica sinusoidal obtenida desde un controlador implementado en s , con respecto a la misma señal sinusoidal obtenida desde un controlador implementando en z y reconstruida por un retenedor de orden cero. Estos efectos son:

- En la Fig. 10.10, el *ZoH* entrega una señal que no tiene los mismos componentes espectrales que la sinusoidal pura. En la señal reconstruida se pueden encontrar, además de una fundamental de frecuencia igual a la sinusoidal analógica, armónicos de alta frecuencia. La respuesta de frecuencia del retenedor de orden cero se analiza en la sección 10.1.0.3.

Si el sistema se diseña con una frecuencia de muestreo suficientemente alta, entonces el efecto de los armónicos a la salida del sistema de control es despreciable. Esto se debe a que la mayor parte de las planta se comportan como filtros pasa-bajos, eliminando armónicos de alta frecuencia y respondiendo principalmente a los componentes espectrales que se encuentran dentro de la respuesta de frecuencia de la planta.

- Un retenedor de orden cero introduce un retardo de media muestra (o $e^{-sT/2}$) entre la señal analógica y la fundamental de la señal reconstruida. Esto fácil de concluir observando la Fig. 10.10. La fundamental de salida se encuentra desplazada en $T/2$ segundo y pasa por la mitad de cada uno de los escalones de la señal rectangular producida por el *ZoH*. Matemáticamente, este retardo se explica en la ecuación (10.3).

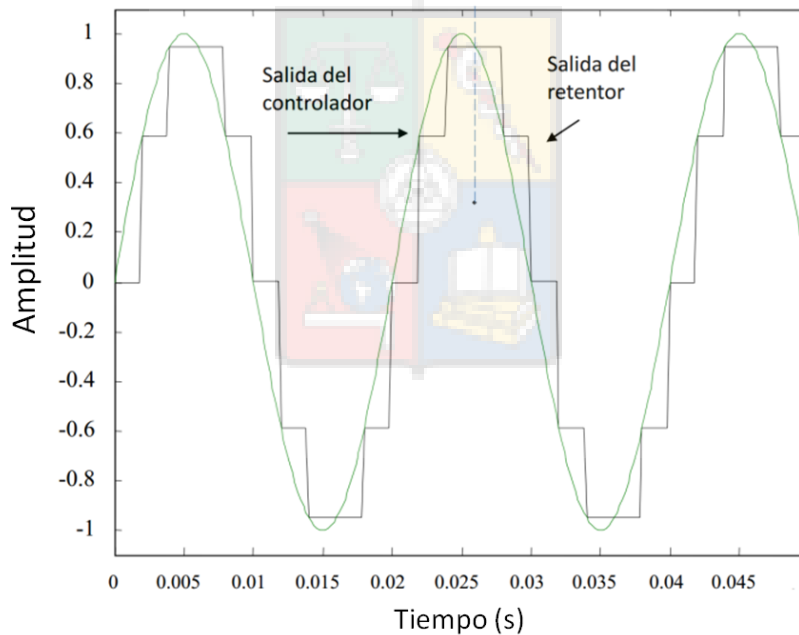


Figura 10.10: Una señal sinusoidal analógica comparada con la que se obtiene al discretizar y reconstruir la misma señal utilizando un *ZoH*.

10.1.0.3. Respuesta de frecuencia del ZoH

Por simplicidad y para realizar el análisis de frecuencia, se repite la ecuación (10.1) en (10.2). Por lo tanto, la función de transferencia de un retenedor de orden cero es:

$$ZoH(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (10.2)$$

La respuesta de frecuencia del ZoH se obtiene reemplazando s por $j\omega$ en (10.2) obteniendo (10.3).

$$\begin{aligned} ZoH(j\omega) &= \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega} \\ &= \frac{2e^{-(1/2)Tj\omega} (e^{(1/2)Tj\omega} - e^{-(1/2)Tj\omega})}{2j\omega} \\ &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-(1/2)Tj\omega} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Donde el término $e^{-(1/2)Tj\omega}$ corresponde a la representación en Fourier del retardo de media muestra. La amplitud del espectro en frecuencia del retentor se obtiene como:

$$|ZoH(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| \quad (10.4)$$

La respuesta de frecuencia de (10.4) es graficada en la Fig. 10.11.

De acuerdo al teorema del muestreo que se discute brevemente en la sección 10.3 (y que se supones que ustedes conocen), para una frecuencia de muestreo ω_s , el espectro de interés se encuentra entre $\pm \frac{\omega_s}{2}$. Sin embargo el espectro de frecuencia

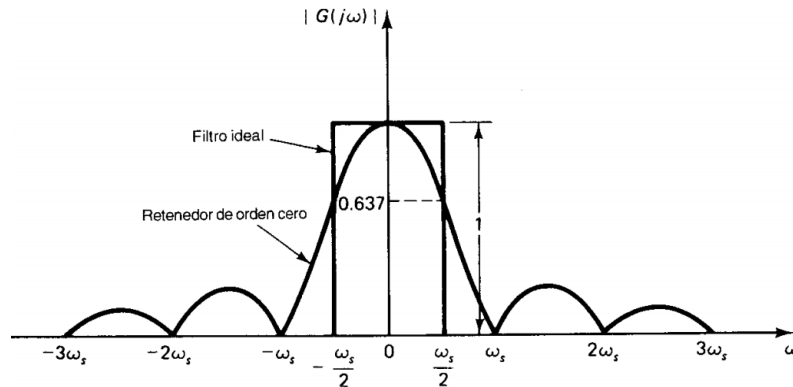


Figura 10.11: Espectro de frecuencia producido por el retenedor de orden cero. La sección marcada como *filtro ideal*, corresponde a la respuesta de frecuencia de un dispositivo ideal.

del *ZoH* incluye las componentes complementarias, con otros peaks adicionales en alta frecuencia. Como se señala en la literatura, el retenedor de orden cero es similar a un filtro pasa bajo aunque su atenuación sobre $\pm \frac{\omega_s}{2}$ no es muy alta. Por lo tanto componentes de alta frecuencia pueden ser entregados a la planta (que usualmente también es similar a un filtro pasa bajo). Es relativamente simple concluir que mientras más alta es la frecuencia de muestreo, más componentes de alta frecuencia serán filtrados por la respuesta de frecuencia de la planta.

10.1.0.4. Implementación del *ZoH* Utilizando Conversores D/A

En una sistema de control digital real, el *ZoH* habitualmente se implementa utilizando un conversor D/A. Este dispositivo se basa en un sumador analógico implementado con operacionales; un ejemplo es el que se muestra en la Fig. 10.12. Utilizando la teoría de amplificadores operacionales, la tensión de salida puede representarse como se muestra en la ecuación (10.5).

$$V_{\text{out}} = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right) \quad (10.5)$$

Ajustando adecuadamente los valores de resistencias, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$V_{\text{out}} = - [2^0 V_1 + 2^1 V_2 + 2^2 V_3 + \dots + 2^n V_{n+1}] \quad (10.6)$$

Donde $V_1, V_2, \dots, V_n$ pueden tomar solo dos valores (por ejemplo 0 y V). La ecuación (10.6) es equivalente a transformar un número de binario a decimal. Se asume que V_1 es el dígito menos significativo.

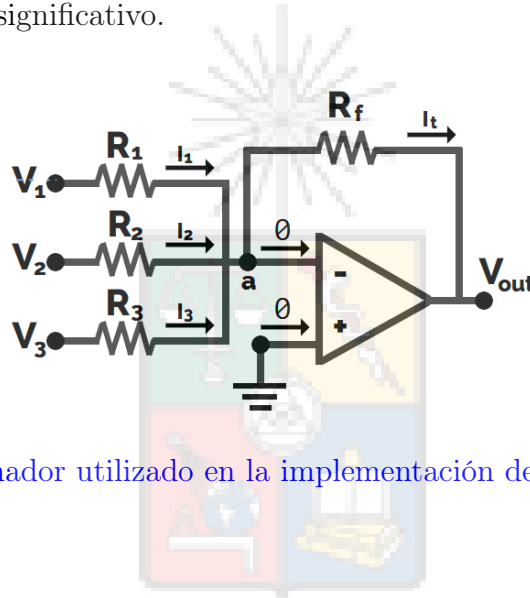


Figura 10.12: Sumador utilizado en la implementación de un conversor D/A

El sumador de Fig. 10.12 tiene la desventaja de utilizar distintos valores de resistencia para lograr la conversión desde el formato digital a analógica. En forma comercial se utiliza un conversor D/A denominado R2R, el cual requiere solo dos valores distintos de resistencias para implementar la transformación de la ecuación (10.6).

Un conversor D/A también produce un error de representación a la salida del dispositivo (similar a lo mostrado en la parte derecha de la Fig. 10.6). Por lo tanto también es importante utilizar conversores A/D de resolución adecuada en un sistema

de control digital.

10.2. Breve Repaso de la Transformada z

Se supone que todos los alumnos de este curso ya estudiaron la transformada z y en esta sección solo se recuerdan algunos de los aspectos más utilizados en control digital. Una señal analógica E muestreada cada T segundos se presenta en la

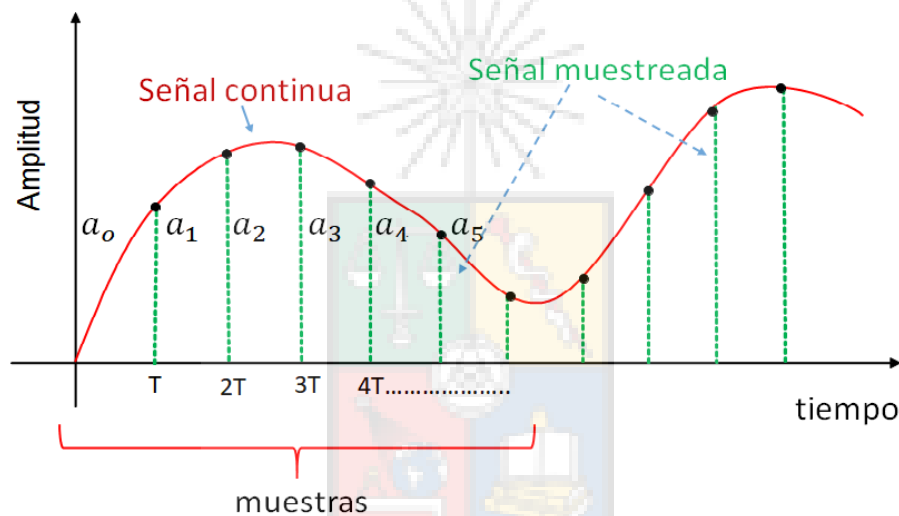


Figura 10.13: Representación gráfica de las ecuaciones (10.7) y (10.8).

ecuación (10.7) y se representa gráficamente en la Fig. 10.13. $E_m(s)$ es la señal $E(s)$ muestreada, T es el período de muestreo y los valores a_0, a_1, a_2 , etc. corresponden a los valores de E en $t = 0, t = T$ y $t = 2T$. Como se ha discutido anteriormente, el valor de e^{-ksT} corresponde a un retardo en el tiempo de kT segundos.

$$E_m(s) = a_0 + a_1 e^{-sT} + a_2 e^{-2sT} + a_3 e^{-3sT} + \dots + a_n e^{-nsT} = \sum_{k=0}^n a_k e^{-ksT} \quad (10.7)$$

Se define z como $z = e^{sT}$, por lo tanto la ecuación (10.7) puede escribirse como (10.8).

$$E_m(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots a_n z^{-n} = \sum_0^n a_k z^{-k} \quad (10.8)$$

Nótese que la transformada z , se define en función de s .

10.2.0.1. Ejemplo 1. Transformada z de un Escalón Unitario

Utilizando (10.8) es posible encontrar la transformada z de varias funciones. Por ejemplo la entrada escalón unitario puede definirse como $x(t) = 1 \forall t > 0$. En el dominio z esto corresponde a la ecuación (10.9).

$$x(t) = 1 \quad \forall t > 0 \rightarrow X(z) = \sum_0^\infty z^{-k} \quad (10.9)$$

La ecuación (10.9) se puede expandir como se muestra en (10.10).

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots z^{-n} \quad (10.10)$$

Utilizando la ecuación (10.10) se encuentra el valor de $z^{-1}X(z)$ como se muestra en (10.11).

$$z^{-1}X(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots z^{-n} \quad (10.11)$$

Finalmente, restando (10.11) con (10.10) se obtiene la transformada z del escalón unitario como la función de transferencia de (10.12).

$$X(z)(1 - z^{-1}) = 1 \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (10.12)$$

Es decir la transformada z de $u(t)$, es $Z[u(t)] = \frac{z}{z-1}$.

10.2.0.2. Ejemplo 2. Transformada z de una Rampa Unitaria

Un desarrollo similar al efectuado anteriormente puede realizarse para encontrar la transformada z de una rampa unitaria. La rampa unitaria se puede escribir como:

$$x(t) = t \quad \forall t > 0 \rightarrow X(z) = \sum_0^{\infty} kTz^{-k} \quad (10.13)$$

expandiendo (10.13) se obtiene (10.14) como;

$$X(z) = T (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots) \quad (10.14)$$

Utilizando la ecuación (10.14) se encuentra el valor de $z^{-1}X(z)$ como se muestra en (10.15).

$$z^{-1}X(z) = T (z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5} + \dots) \quad (10.15)$$

Restando (10.15) con (10.14) se obtiene la transformada z de la rampa unitaria como la función de transferencia que se muestra en (10.16).

$$X(z) (1 - z^{-1}) = Tz^{-1} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) \quad (10.16)$$

pero el valor de $1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$ corresponde a la transformada z del escalón unitario que se encuentra en (10.10). Por lo tanto reemplazando en (10.16) se llega a:

$$X(z) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2} \quad (10.17)$$

Otros ejemplos de transformada z de funciones simples se pueden encontrar en libros de control digital. Utilizando la metodología explicada en las páginas anteriores, es posible encontrar la transformada z de un buen número de funciones elementales, algunas de las cuales se muestran en la tabla de la Fig. 10.14. Utilizando estas funciones y fracciones parciales, se puede obtener la transformada z de sistemas

analógicos, como planta y filtros, para ser utilizados en sistemas de control digital.

Laplace transform	Corresponding z -transform
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(b-a)z^2 - (be^{-aT} - ae^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z^2 - z \cos aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{z[z - e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$

Figura 10.14: Transformada z de un (pequeño) conjunto de funciones elementales. Una tabla con más funciones se encuentra en [Tabla de Laplace a \$z\$](#) o en otros sitios de la Web.

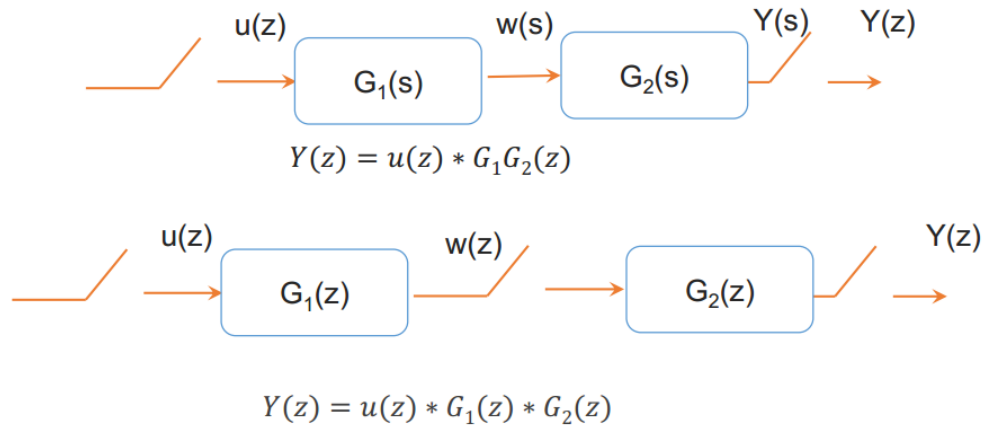


Figura 10.15: Diferencias en la representación en el plano z de un sistema de dos bloques en el plano s donde existe/no existe un multiplicador que los separe

10.2.0.3. Transformada z de un sistema de control digital SISO

Antes de aplicar fracciones parciales se debe conocer como se aplica la transformada z en funciones de transferencia en s , donde se encuentra/no se encuentra presente un muestreador que las separe. Esto se muestra en la Fig. 10.15. Cuando las funciones de transferencias no se encuentran separadas por un muestreador, entonces se debe calcular la transformada z de la multiplicación; esto significa que primero se efectúan mutiplicaciones de las funciones de transferencia en s y luego se aplica funciones parciales u otra metodología para encontrar la representación en z . Esto se denotaría como $Z[G_1(s) \cdot G_2(s)]$ y se escribe habitualmente como $G_1G_2(z)$; la salida $y(z)$ en este caso es $Y(z) = u(z) \cdot G_1G_2(z)$. En el otro caso, donde los bloques están separados por un muestreador se puede obtener la transformada z de cada bloque donde la salida $y(z)$ corresponde a $Y(z) = u(z) \cdot G_1(z)G_2(z)$.

Las diferencias mostradas en la Fig. 10.15, no están solo en la notación ya que matemáticamente las funciones de transferencias son distintas, es decir $G_1G_2(z) \neq$

$G_1(z)G_2(z)$ y las salidas $Y(z)$ obtenidas en cada caso son diferentes.

Lo analizado anteriormente, con la ayuda de la Fig. (10.15), se puede utilizar para encontrar la función de transferencia, en el plano z de un típico sistema de control digital SISO como el que se muestra en la Fig. 10.16. La función de transferencia $F_c(s)$ corresponde a un filtro analógico, la función $F_d(z)$ es un filtro digital y $G_c(z)$ es el controlador. La salida $Y(z)$ se puede encontrar como:

$$Y(z) = Y^*(z) \cdot \frac{G_c(z)G_{zoh}G_p(z)}{1 + G_c(z)F_d(z)G_{zoh}G_pF_c(z)} \quad (10.18)$$

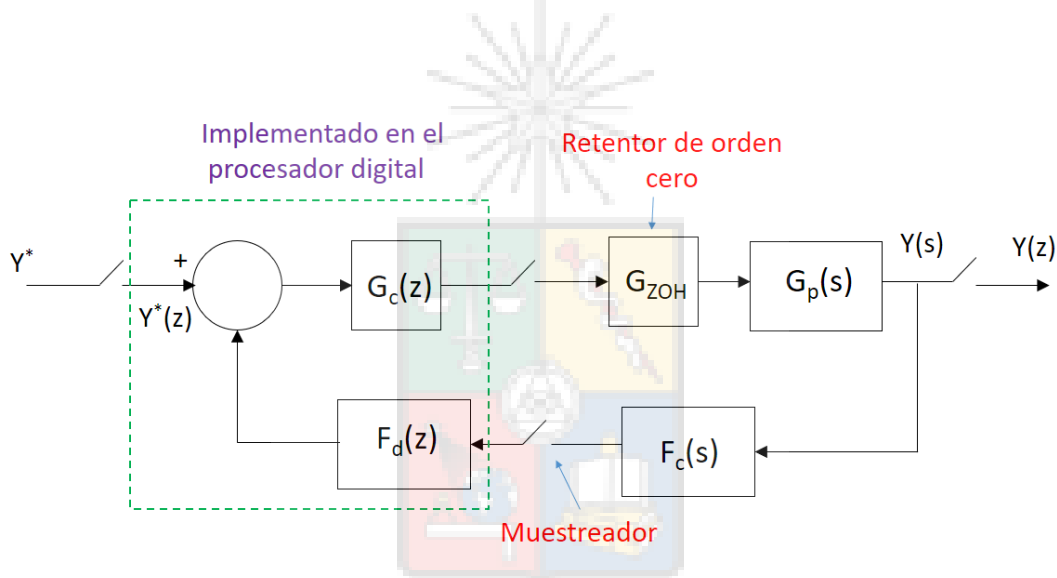


Figura 10.16: Sistema típico de control digital incluyendo el retenedor de orden cero, y filtros.

El término $G_{zoh}G_pF_c(z)$ se produce debido a que no existe un muestreador entre esas tres funciones analógicas (ver derecha de la Fig. 10.16) . Por lo tanto estas se deben multiplicar primero y luego encontrar la transformada z de la función equivalente.

10.2.0.4. Transformada z de una Planta de Primer Orden y un Retenedor de Orden Cero

La figura 10.17 muestra un sistema típico de control digital SISO con realimentación unitaria. En este caso el sistema está representado utilizando funciones de transferencia en z y s y se requiere que el sistema este expresado solo en z .

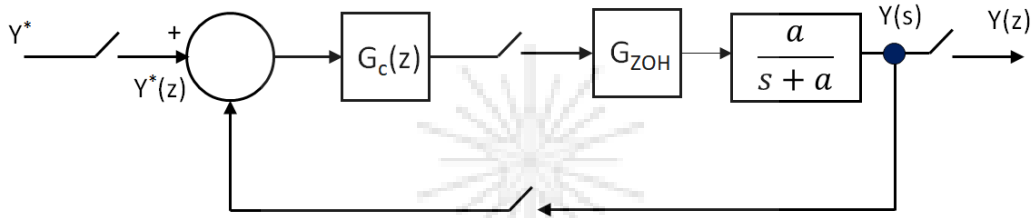


Figura 10.17: Control SISO digital que considera realimentación unitaria.

Existen dos funciones de transferencia en s en la Fig. 10.17, una es la planta representada por $G_p(s) = a/(s+a)$ y la otra función en s es el retenedor de orden cero. Dado que no existe un muestreador entre ambos, se debe realizar la transformada z de la multiplicación de ambas funciones de transferencia, es decir:

$$Z \left[\frac{(1 - e^{-sT})}{s} \cdot \frac{a}{(s+a)} \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{a}{(s+a)} \right] \quad (10.19)$$

Nótese que el término $1 - e^{-sT}$ se puede sacar fuera del operador Z quedando como $(1 - e^{-sT}) = (1 - z^{-1})$ en (10.19); esto es una aplicación del teorema del desplazamiento o *shift theorem* que establece que $Z[f(k-n)] = z^{-n}F(z)$ por este motivo se deja fuera de la transformada. Manipulando (10.19) y expandiendo en

fracciones parciales se llega a (10.20).

$$(1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{a}{(s + a)} \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + a)} \right] = \quad (10.20)$$

Utilizando la tabla que se encuentran la Fig. 10.14 se puede encontrar la transformada z de cada uno de los término de la expansión en fracciones parciales de (10.20). Esto se muestra en la ecuación (10.21).

$$(1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + a)} \right] = (1 - z^{-1}) \cdot \left[\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{(z - e^{-aT})} \right] = \quad (10.21)$$

finalmente, después de un poco de trabajo algebraico se llega a la transformada z del sistema que se encuentra en el término a la izquierda de la ecuación (10.19).

$$Z \left[\frac{(1 - e^{-sT})}{s} \cdot \frac{a}{(s + a)} \right] = \left[\frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} \right] \quad (10.22)$$

Utilizando (10.22), se puede llegar a la representación completamente digital del sistema mostrado en la Fig. 10.17. Esta representación se muestra en la Fig. 10.18.

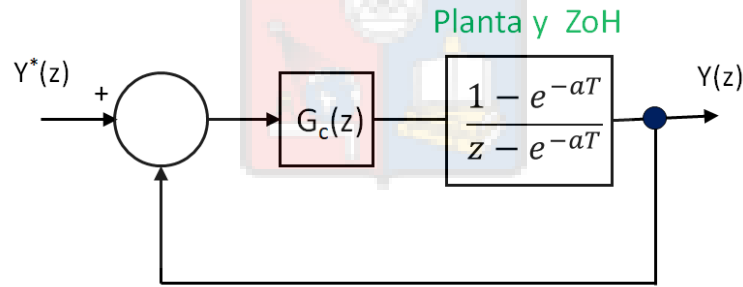


Figura 10.18: Representación exacta en el plano z del sistema de control mostrado en la Fig. 10.17. Recuerde que esta representación en z describe el comportamiento del sistema en los instantes de muestreo (ver Fig. 10.13) y no entre muestras.

La representación exacta de un sistema de control en z se utiliza habitualmente

cuando se diseñan compensadores utilizando lugar de la raíz en z o se utilizan otros métodos de diseño (a veces denominados *de diseño exacto en z*), como por ejemplo dead-beat control.

10.2.0.5. Errores en Estado Estacionario

El análisis de errores en estado estacionario es muy similar a lo efectuado en el Capítulo 4 para el plano s . Los errores se analizan utilizando la Fig. 10.19 y la ecuación (10.23). Esta ecuación es virtualmente idéntica a la que representa el error en el plano s [ver (4.1)].

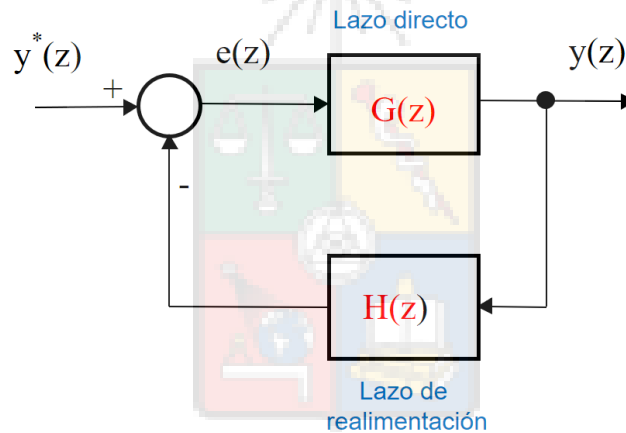


Figura 10.19: Sistema de control SISO en el plano z . El lazo directo es $G(z)$ y el lazo de realimentación es $H(z)$.

$$e(z) = y^*(z) \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \quad (10.23)$$

Utilizando el teorema del valor final en el plano z , el error en estado estacionario

de (10.23) está dado por la expresión mostrada en (10.24).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)e(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)y^*(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (10.24)$$

si por ejemplo, el sistema está sujeto a una entrada tipo escalón de magnitud A, el error en estado estacionario es dado por (10.25).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{Az}{z - 1} \frac{1}{(1 + G(z)H(z))} \quad (10.25)$$

Recuerde que la transformada z de un escalón unitario es $z/(z - 1)$ (ver la tabla de transformadas de la Fig.10.14). La ecuación (10.25) es equivalente a (10.26).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A}{(1 + G(z)H(z))} \quad (10.26)$$

Analizando (10.26) se puede concluir que existe cero error en estado estacionario cuando en el denominador de $G(z)H(z)$ existe al menos un término $(z - 1)$, es decir $G(z)H(z)$ tiene la forma mostrada en (10.27) con $n \geq 1$.

$$G(z)H(z) = \frac{K \prod_1^m (z + \text{ceros}_i)}{(z - 1)^n \prod_1^l (z + \text{polos}_j)} \quad (10.27)$$

Es decir, para obtener cero error en estado estacionario para una entrada cualquiera se debe cumplir con el principio del modelo interno. Nótese que en el plano s , la condición para cero error en estado estacionario a entrada escalón, es que el sistema tenga al menos un polo en el origen. Para sistemas de control digital, la condición para cero error en estado estacionario a entrada escalón, es que el sistema tenga al menos un polo en $z=1$. Al efectuar la transformación $z = e^{sT}$, se verifica que un polo en el origen del plano s es equivalente a un polo en $z=1$.

En un sistema en z se le denomina tipo de la función al número de polos que

existe en $z=1$. De la misma forma el tipo de la entrada corresponde al número de polos en $z=1$ que contenga esta entrada. Se define el coeficiente de error en z como se muestra en (10.28).

$$K_N = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^N G(z)H(z)}{T^N} \quad (10.28)$$

K_N se denomina K_p para $N = 0$, K_v para $N = 1$ y K_a para $N = 2$ (recuerde que T es el tiempo de muestreo). Utilizando estos coeficientes se puede construir una tabla similar a la Tabla (4.1) implementada para los errores en el plano s .

La tabla con los los errores obtenidos en el plano z se muestra en (10.1).

Tipo de la función	Ent. Escalón	Ent. Rampa	Ent. Parabólica
$G(z)H(z)$	$y^* = A \cdot \frac{z}{z-1}$	$y^* = A \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$	$y^* = A \cdot \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
0	$e_{SS} = \frac{A}{1+K_p}$	$e_{SS} = \infty$	$e_{SS} = \infty$
1	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = \frac{A}{K_v}$	$e_{SS} = \infty$
2	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = \frac{A}{K_a}$
3	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = 0$	$e_{SS} = 0$

Tabla 10.1: Resumen de los errores obtenidos para algunas entradas típicas en z .

10.3. Teorema del Muestreo de Nyquist-Shannon

Dado que todos los alumnos de este curso ya han aprobado un curso de análisis de señales (o equivalente), en este curso se hace solo un breve repaso de teorema del muestreo.

El teorema del muestreo establece cual es la mínima frecuencia de muestreo que permite que una señal de determinada frecuencia pueda ser reconstruida al ser

muestreada en un procesador. Se debe tener en cuenta que este teorema no indica como la señal puede ser reconstruida, solo establece cual es la condición necesaria (y probablemente no suficientemente adecuada en algunos casos) para realizar esta reconstrucción.

10.3.1. Transformada de Fourier de una Señal Muestreada

La Fig. 10.20 muestra una señal analógica y su correspondiente señal muestreada. Recordando la definición del operador z como $z = e^{sT_s}$, donde T_s es el período de muestreo; la transformada de Fourier se puede encontrar al reemplazar $s = j\omega$. De esta forma se obtiene el contenido espectral de la señal, denominado $G(\omega)$ en (10.29).

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-jk\omega T_s} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-(j2\pi f / f_s)k}. \quad (10.29)$$

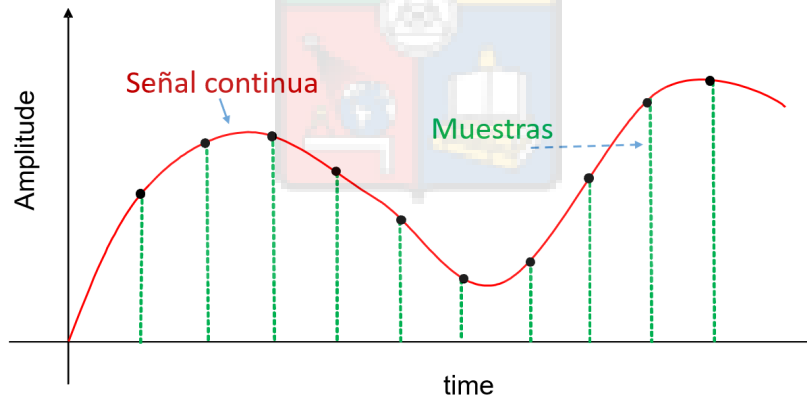


Figura 10.20: Señal analógica y su correspondiente señal muestreada

En la ecuación (10.29) se ha reemplazado $\omega = 2\pi f$ y f_s es la frecuencia de

muestreo en ciclos por segundo (Hz). Recordando la fórmula de Euler [ver (10.30)] y la periodicidad de las señales trigonométricas $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$, es relativamente simple concluir que el espectro de (10.29) se comienza a repetir cuando $(j2\pi f/f_s) \geq j\pi$. Por ejemplo $G(0) = G(\omega_s) = G(2\omega_s) = G(3\omega_s) = \dots G(n\omega_s)$ [ver (10.29)]

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \cdot \sin(\theta) \quad (10.30)$$

Al ser periódico el espectro de $G(\omega)$, se podría producir *aliasing* lo que significa que frecuencias altas del espectro de la señal analógica se confunden con la frecuencias bajas del espectro de la señal muestreada. Para evitar el fenómeno de *aliasing*, se debe utilizar la relación $f_s \geq 2f$ lo que significa que se debe muestrear a una frecuencia f_s al menos dos veces mayor que la frecuencia de la señal continua f .

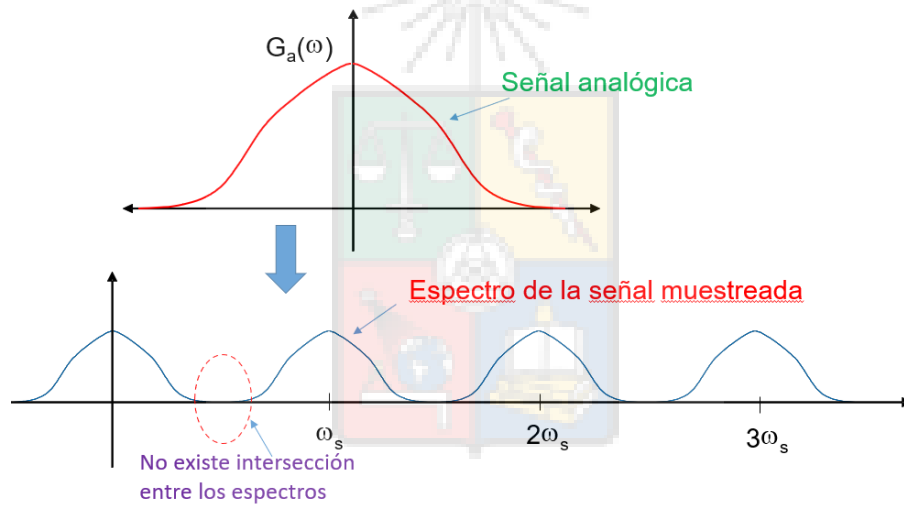


Figura 10.21: La señal analógica o de espectro continuo se muestra en la parte superior. El espectro de la señal muestreada se encuentra en la parte inferior de la figura, en este caso se utiliza una frecuencia de muestreo apropiada y no existe *aliasing*.

La Fig. 10.21 muestra un espectro continuo que es correctamente muestreado utilizando una frecuencia f_s suficientemente alta. En este caso no se produce *aliasing*

y es teóricamente posible recuperar la señal original en el procesador digital (por ejemplo utilizando el filtro ideal mostrado en la Fig. 10.11 llamado también *brick wall filter*). Sin embargo, si se muestrea incorrectamente una señal se produce una superposición de espectros de períodos consecutivos, tal como se muestra en la Fig. 10.22. Esta superposición de espectros consecutivos no permitiría recuperar el espectro original y podría significar que al sistema de control digital ingresen señales que no existen en el sistema físico y que son producidas por el proceso de muestreo.

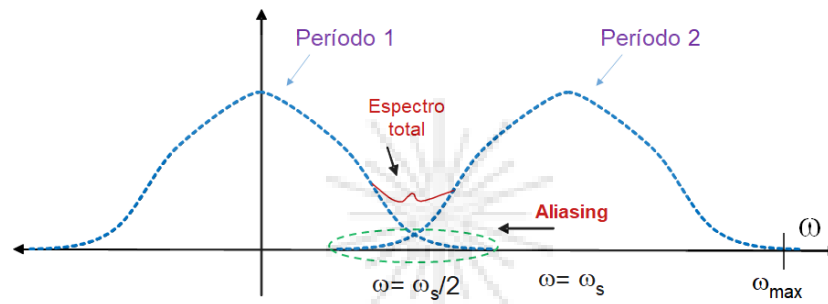


Figura 10.22: Superposición o aliasing de dos espectros de frecuencias consecutivos.

10.3.2. Efectos del *Aliasing* en un Sistema de Control Digital

Si se asume que existe una señal sinusoidal de frecuencia ω_0 , y esta señal es muestreada con una frecuencia de muestreo $\omega_s = \omega_0$, se llega a lo que se muestra en la Fig. 10.23. La señal muestreada, que se observa en la parte inferior, es idéntica a la que se obtiene al conectar una señal de corriente continua a la entrada del muestreador. Es decir el sistema de control *ve* una señal que no existe externamente y no puede *ver* la señal real. Como ya se mencionó en la Sección 1.3.2, la máxima GIGO (*Garbage In-Garbage Out*) es también aplicable a los sistema de control automático y una forma de asegurarse de que éstos no funcionen adecuadamente es que el controlador represente incorrectamente las señales que se encuentran a la salida del sistema SISO. ¿Se podría intentar filtrar digitalmente la señal muestreada que se encuentra en la Fig. 10.23, eliminando la corriente continua que no existe? Ciertamente filtrar la

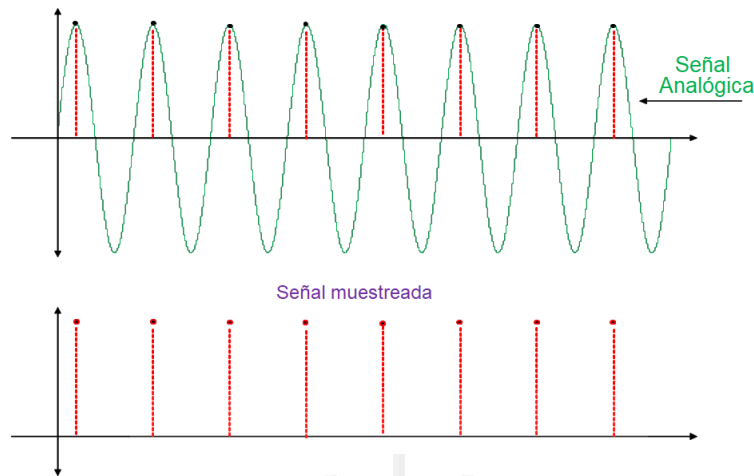


Figura 10.23: La parte superior muestra la señal sinusoidal de frecuencia ω_0 y la parte inferior muestra la señal muestreada.

señal de continua de la Fig. 10.23 no resuelve el problema, ya que no permitiría recuperar la sinusoidal. Sin embargo, ese no es el único problema de utilizar filtros que eliminen las frecuencias creadas por aliasing. Por ejemplo, la Fig. 10.24 muestra

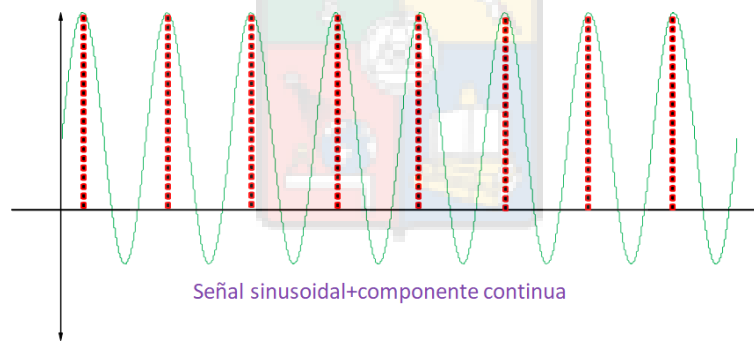


Figura 10.24: Muestreo de una señal compuesta de una sinusoidal más una componente de corriente continua. Nótese que en este caso al procesador ingresan dos componentes continuas. Una que existe y otra que es artificialmente creada por *aliasing*.

una señal compuesta de una sinusoidal más una componente de corriente continua, al procesador ingresa solo continua, una componente que existe y la otra que no existe.

Por lo tanto al utilizar un filtro digital, éste no puede discriminar que componente es útil y cuál no lo es. Finalmente, la Fig. 10.25 muestra una señal sinusoidal muestreada utilizando el mínimo de $f_s = 2f$. La señal que ingresa al procesador corresponde a la de una onda cuadrada de frecuencia igual a la señal analógica sinusoidal. Aunque sabemos que una onda cuadrada no es igual a una sinusoidal, esta sinusoidal si está presente como una componente de la onda cuadrada y es posible, al menos teóricamente, recuperarla.

En la Fig. 10.25 se ha cumplido con el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon y dado que no se ha producido aliasing, es posible reconstruir la onda sinusoidal (aunque no sea fácil) y eso es lo que nos asegura el teorema del muestreo; sin embargo en aplicaciones de control digital trabajar con la mínima velocidad de muestreo habitualmente no produce resultados satisfactorios y generalmente se utilizan frecuencias de muestreo bastante superiores a lo estipulado por Nyquist-Shannon.

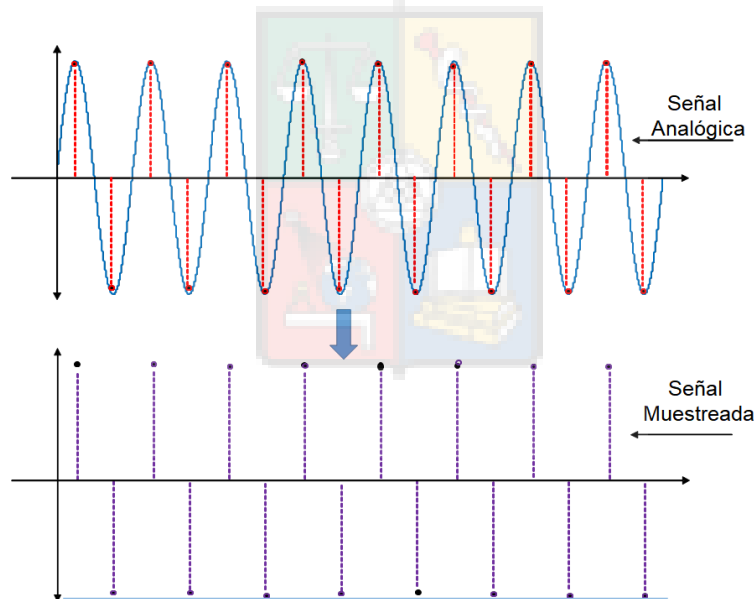


Figura 10.25: Muestreo de una señal sinusoidal utilizando la mínima frecuencia f_s especificada por el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon.

10.3.2.1. Consideraciones en la Selección de la Frecuencia de Muestreo

La selección de la frecuencia de muestreo es parte del diseño de un sistema de control digital. El teorema del muestreo señala que el valor **mínimo** de f_s es dos veces la frecuencia de la señal a muestrear. Pero en un sistema de control no existe una sola frecuencia y, por ejemplo, la transformada de Fourier de una entrada escalón nos entrega infinitos componentes de frecuencia.

Como una regla práctica considerada aceptable, se asume que la frecuencia más significativa a la salida de un sistema de control, está relacionada con el ancho de banda del sistema de control a lazo cerrado. En presencia de ceros de lazo cerrado, el ancho de banda a lazo cerrado podría ser hasta dos veces la frecuencia natural ω_n y por este motivo la frecuencia de muestreo ω_s mínima a considerar es cercana a $5\omega_n$, para cumplir con el teorema de muestreo.

Habitualmente, se consideran frecuencias de muestreo bastante superiores a $5\omega_n$, pero ¿Cuál es el límite superior de ω_s ?. La Fig. 10.26 muestra un ejemplo del procesamiento que se realiza en un procesador digital; en cada muestra los conversores A/D entregan la representación digital de las señales analógicas, se efectúan, operaciones elementales como sumas, multiplicaciones y divisiones, además de filtrado de señales y otros y (en el peor de los casos) la rutina de control completa siempre debería tomar un tiempo menor a T para su realización. Si se aumenta la frecuencia de muestreo, se obtiene una mejor representación de las señales analógicas al interior del procesador, pero se reduce el tiempo de muestreo T y los conversores A/D deben ser mejores y posiblemente con mayor resolución. Además el hardware computacional debe ser más rápido para poder realizar las multiplicaciones y divisiones necesarias en menor tiempo.

Por lo tanto el límite superior de la frecuencia de muestreo está dado por la

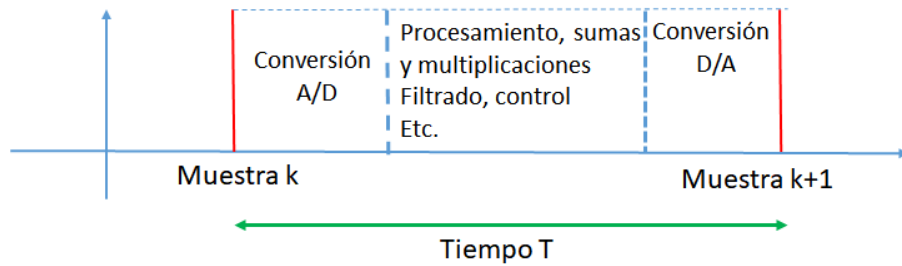


Figura 10.26: Procesamiento efectuado al interior del procesador digital

capacidad computacional del sistema de control digital, la cual en la actualidad es bastante más alta que la que nosotros utilizábamos en el pasado reciente. En mi experiencia en control de máquinas y convertidores de potencia utilizando esquemas lineales SISO, muy pocas veces es necesario utilizar una frecuencia de muestreo $\omega_s > 30\omega_n - 35\omega_n$, y muy pocas veces el hardware digital o los convertidores A/D son tan lentos o de tan baja resolución, que nos vemos obligados a bajar la frecuencia de muestreo a menos de 15 veces la frecuencia natural, es decir $\omega_s < 15\omega_n$.

10.3.2.2. Influencia de la Respuesta de Frecuencia de la Planta en la Selección de la Frecuencia de Muestreo

En algunos libros de control se recomienda utilizar, además del teorema del muestreo, una consideración adicional en el diseño de la frecuencia de muestreo del sistema de control digital. Como se explicó en la Fig. 10.10, la salida del retenedor de orden cero produce una salida que podría contener componentes de alta frecuencia. Por ejemplo, si la salida correspondiera a una señal sinusoidal, la salida del retenedor de orden cero tendría aproximadamente la forma mostrada en la Fig. 10.27.

Como se señaló anteriormente, la señal de la Fig. 10.27, contiene una fundamental sinusoidal (ver Fig. 10.10) más armónicos de alta frecuencia; esta señal se aplicaría a

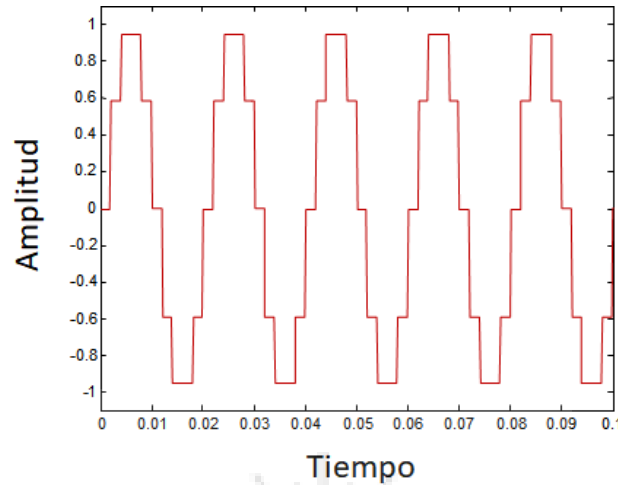


Figura 10.27: Salida del retenedor de orden cero mostrado en Fig. 10.10.

la entrada de la planta, tal como se muestra en la Fig. 10.28. Idealmente se requiere que la planta responda solo a la señal fundamental de la salida del *ZoH*, evitando oscilaciones de alta frecuencia y discontinuidades a la salida de ésta (ver por ejemplo los resultados mostrados en las figuras 11.9 y 11.10 de la Sección 11.4). Para lograr este objetivo se recomienda que la frecuencia de muestreo sea al menos 15-20 veces superior al ancho de banda de la planta, de tal manera que se atenúen los armónicos producidos por el retenedor de orden cero. Como siempre, esta es una *receta*, que tiene variaciones dependiendo del sistema y del tipo de señal existente a la entrada de la planta en estado estacionario (y otros factores).

10.3.3. Filtro *Antialiasing*

Como ya sabemos, el ruido se encuentra presente en todas las aplicaciones y, como se discutió en la Sección 3.6, el ruido de medición es generalmente de alta frecuencia. Por lo tanto, al muestrear una señal que considera ruido, es muy posible que exista *aliasing* debido a que pueden existir componentes de alta frecuencia donde no se

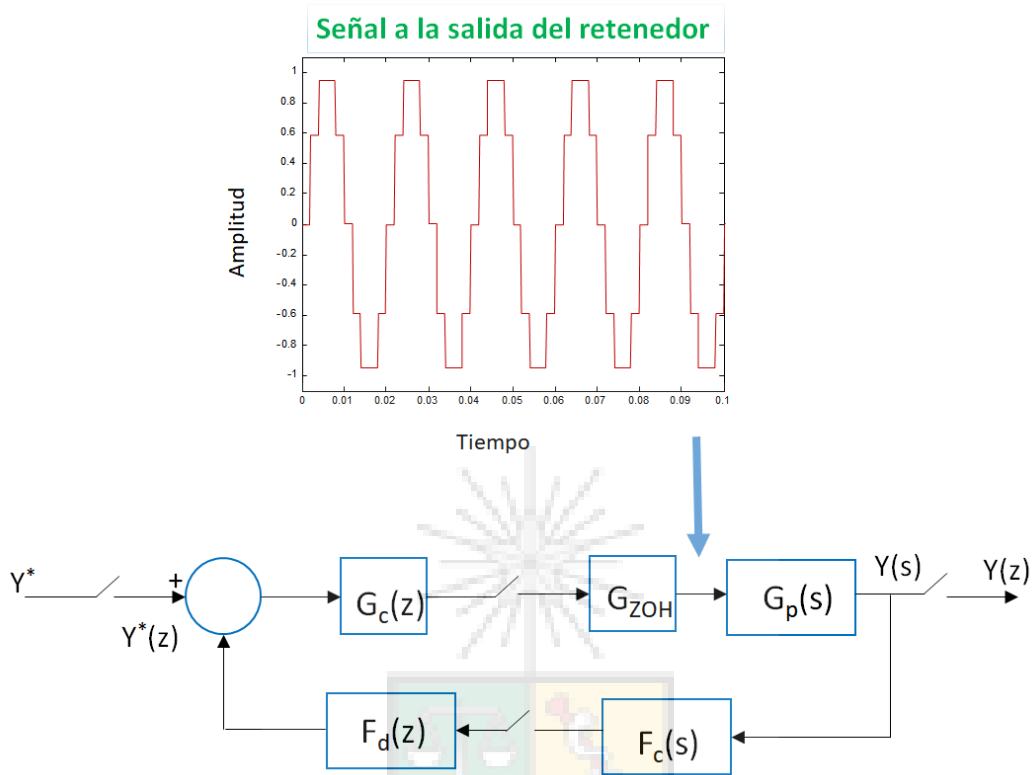


Figura 10.28: Salida del retenedor de orden cero mostrado en Fig. 10.27, la cual es aplicada a la planta del sistema de control digital. Nótese que la salida no es una sinusoidal ideal; por lo tanto, al aplicar la transformada de Fourier a la señal de salida del retenedor de orden cero, se obtiene una fundamental más un conjunto de armónicos. Estos armónicos son parcialmente eliminados por la planta $G_p(s)$ la cual habitualmente tiene una característica de pasa-bajo.

cumpla que $f_s \geq 2f$.

En ese caso se utilizan filtros *antialiasing* (ver Fig. 10.29), los cuales son filtros analógicos, habitualmente de alto orden, que atenúan significativamente los componentes de frecuencia mayor a $f_s/2$, haciendo despreciable el *aliasing* de altas frecuencias.

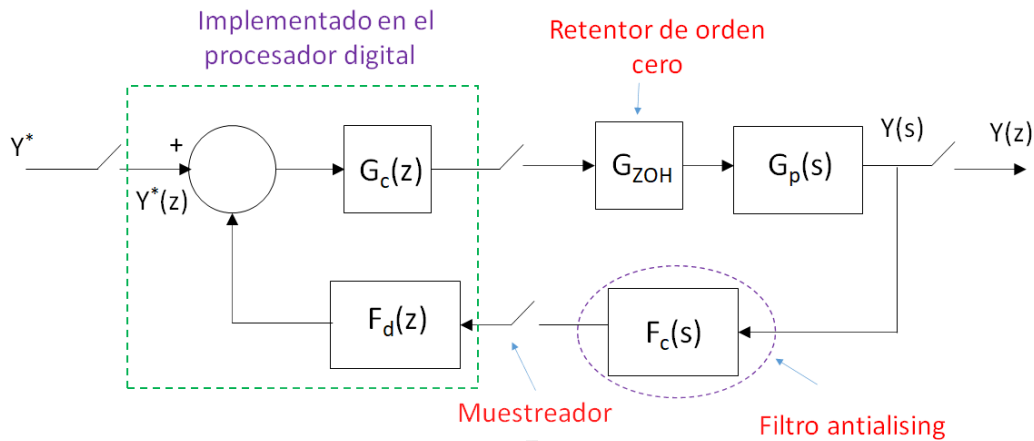


Figura 10.29: Sistema de control considerando un filtro *anti-aliasing*. Este filtro es habitualmente analógico ya que se deben eliminar los componentes de alta frecuencia antes del muestreo de la señal.

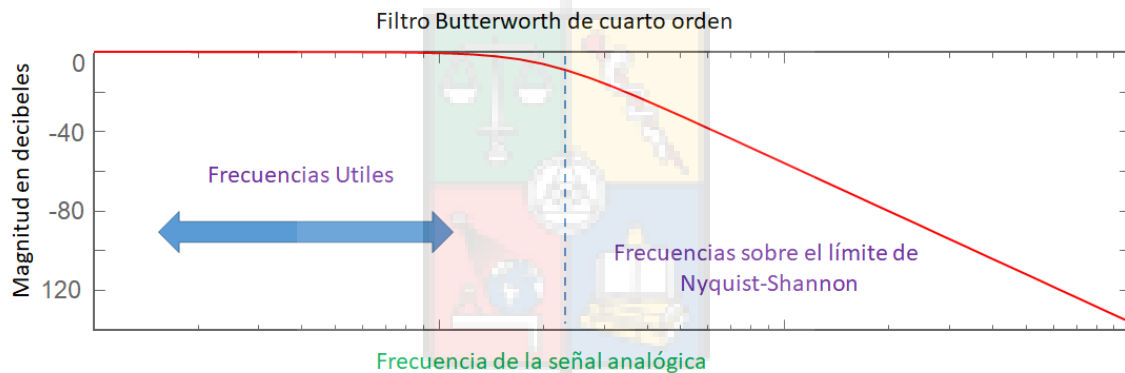


Figura 10.30: Respuesta de frecuencia de un filtro analógico de cuarto orden tipo Butterworth. Las frecuencias útiles deben encontrarse en la zona del pasabanda

La Fig. 10.30 muestra un ejemplo de la respuesta de frecuencia de un filtro *anti-aliasing* implementado utilizando un filtro Butterworth de cuarto orden. La atenuación se encuentra en *db*; debemos recordar que, por ejemplo, -40db equivale a una ganancia de 1/100. Este filtro no elimina totalmente el *aliasing* (lo que es cercano a imposible), pero si el filtro está bien diseñado el efecto del *aliasing* se hace

despreciable.

10.4. El Plano z y la Transformación de s a z

Para efectuar la transformación de puntos que se encuentran en z a puntos que se encuentran en s , se deben utilizar las relaciones $z = e^{sT}$ o $s = \frac{1}{T} \ln(z)$. La transformación se explica mejor utilizando el diagrama de Argand que se encuentra en la Fig. 10.31.

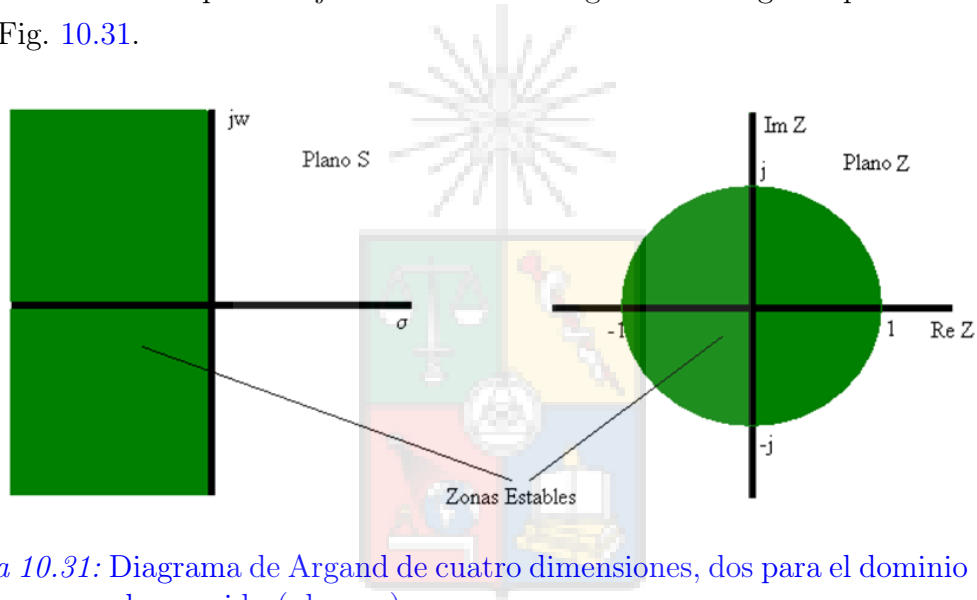


Figura 10.31: Diagrama de Argand de cuatro dimensiones, dos para el dominio (plano s) y dos para el recorrido (plano z).

El diagrama de Argand tiene cuatro dimensiones, dos para el dominio s que son $\sigma_a \pm j\omega_a$ (donde el subíndice a representa señales analógicas) y las otras dos para el recorrido en z que son $\sigma_z \pm j\omega_z$. Si se transforma todo el semiplano izquierdo del plano s se llega al círculo unitario en el plano z . Esto es fácil de demostrar considerando la ecuación (10.31) y teniendo en cuenta que en el semiplano izquierdo de s se cumple que $\sigma_a < 0$, por lo tanto $|e^{\sigma_a T}(\cos \omega_a T + j \sin \omega_a T)| < 1$. Tome

en cuenta que, considerando el teorema del muestreo discutido anteriormente en la Sección 10.3.1, el máximo y el mínimo valor de $\omega_a T$ que se puede representar corresponden a $\omega_a T = \pm\pi$

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma_a + j\omega_a)T} = e^{\sigma_a T} (\cos \omega_a T + j \sin \omega_a T) \quad (10.31)$$

Por lo tanto, todo el semiplano izquierdo de s se encuentra al interior del círculo unitario en el plano z . Si un polo de lazo cerrado se encuentra fuera del círculo unitario, entonces el sistema de control es inestable. Recuerde utilizar un número de decimales adecuado (tres o más) cuando trabaje en el plano z , ya que en general casi todos los números son menores a uno, y un solo decimal habitualmente no es suficiente.

10.4.1. Transformación del *Locus* de coeficiente de Amortiguamiento Constante

La transformación de un *locus* de coeficiente de amortiguamiento constante desde s a z se muestra en la Fig. 10.32. Cada punto en s se transforma utilizando (10.31), es decir $\sigma_{z1} + j\omega_{z1} = e^{(\sigma_{a1} + j\omega_{a1})T}$, $\sigma_{z2} + j\omega_{z2} = e^{(\sigma_{a2} + j\omega_{a2})T}$, etc.

A la derecha de la figura 10.32 se puede ver el coeficiente amortiguamiento reflejado en el plano z al interior del círculo unitario. En el ejemplo todos los puntos en la línea gruesa de color negro, tienen un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$.

El círculo unitario no parece tal, debido a que los cambios automáticos de escala que efectúa Matlab.

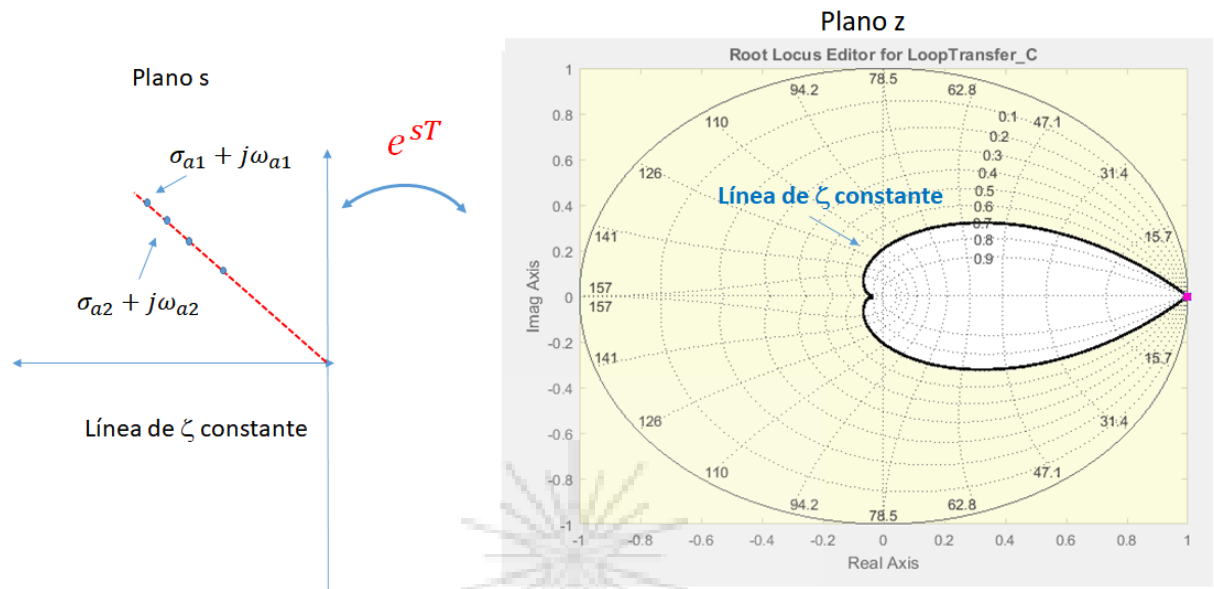


Figura 10.32: Transformación de un *locus* de coeficiente de amortiguamiento constante desde s a z .

10.4.2. Transformación del *Locus* de Frecuencia Natural Constante

La transformación de un *locus* de frecuencia natural constante desde s a z se muestra en la Fig. 10.33. Nuevamente cada punto en s se transforma utilizando (10.31), es decir $\sigma_{z1} + j\omega_{z1} = e^{(\sigma_{a1} + j\omega_{a1})T}$, $\sigma_{z2} + j\omega_{z2} = e^{(\sigma_{a2} + j\omega_{a2})T}$, etc.

A la derecha de la figura 10.33 se puede ver el *locus* de frecuencia natural constante en el plano z al interior del círculo unitario. Utilizando ambos, el *locus* de frecuencia natural y el *locus* de coeficiente de amortiguamiento, es posible encontrar el punto de diseño utilizado para el diseño de controladores (ver Sección 5.2). Este se muestra en la Fig. 10.34. En este caso el punto de diseño representa una frecuencia natural de $\omega_n = 62.8$ rads/seg y un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.7$.

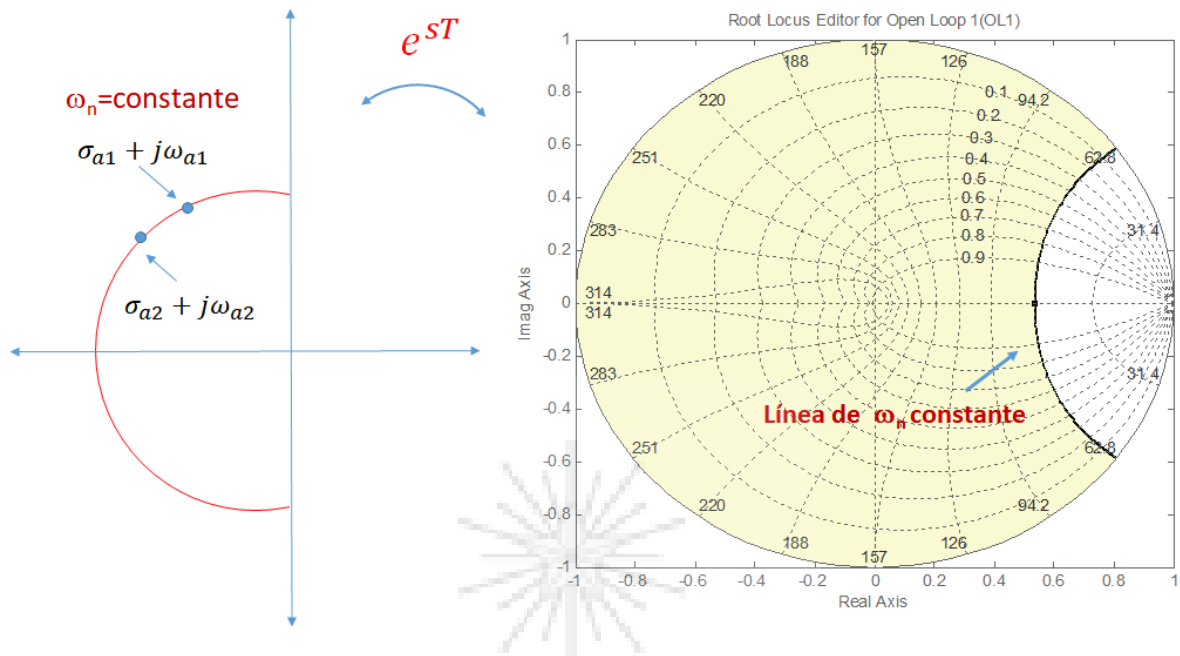


Figura 10.33: Transformación de un locus de frecuencia natural constante desde s a z .

10.5. Transformando de z a s

La transformada desde z a s se realiza habitualmente cuando se desea conocer la frecuencia natural y/o coeficiente de amortiguamiento de puntos en el plano z y no se cuenta con herramientas computacionales como Matlab o una plantilla como la que se utiliza en las figuras 10.33 y 10.34.

La forma más rápida de transformar un punto desde z a s , es utiliza la notación polar, donde $\sigma_z + j\omega_z = r \cdot e^{j\theta}$. En este caso el valor de $r = \sqrt{\sigma_z^2 + \omega_z^2}$ y $\theta = \text{atan2}(\omega_z/\sigma_z)$ (atan2 representa arcotangente de cuatro cuadrantes). La figura 10.35 muestra un polo complejo en el plano z y su equivalente en el plano s . Utilizando la forma polar $r \cdot e^{j\theta}$ para representar el polo que se encuentra en el plano z , a la

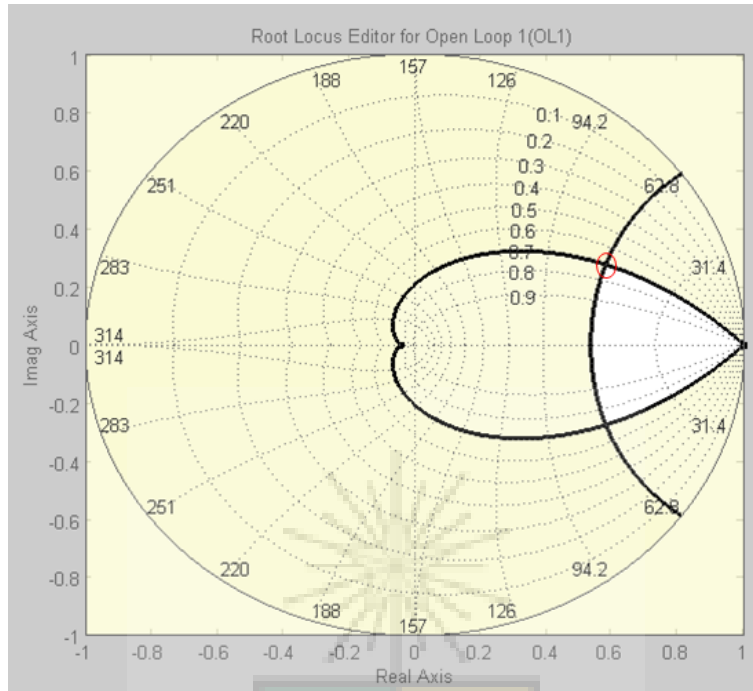


Figura 10.34: Punto de diseño para una determinada frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento.

izquierda de la Fig. 10.35, se encuentran los valores de σ_a y $j\omega_a$ como se muestran en las ecuación (10.32)-(10.33):

$$z = r \cdot e^{j\theta} \rightarrow s = \frac{1}{T} \ln(r \cdot e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \ln(r) + j \frac{\theta}{T} \quad (10.32)$$

De esta forma los valores de σ_a y $j\omega_a$ son:

$$\sigma_a = \frac{1}{T} \ln(r) \quad y \quad \omega_a = \frac{\theta}{T} \quad (10.33)$$

Tome en cuenta que en las ecuaciones anteriores el valor de θ debe ser expresado en radianes. Utilizando la ecuación (10.33), es sencillo encontrar los valores de frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento que tiene el polo de lazo cerrado en z . El

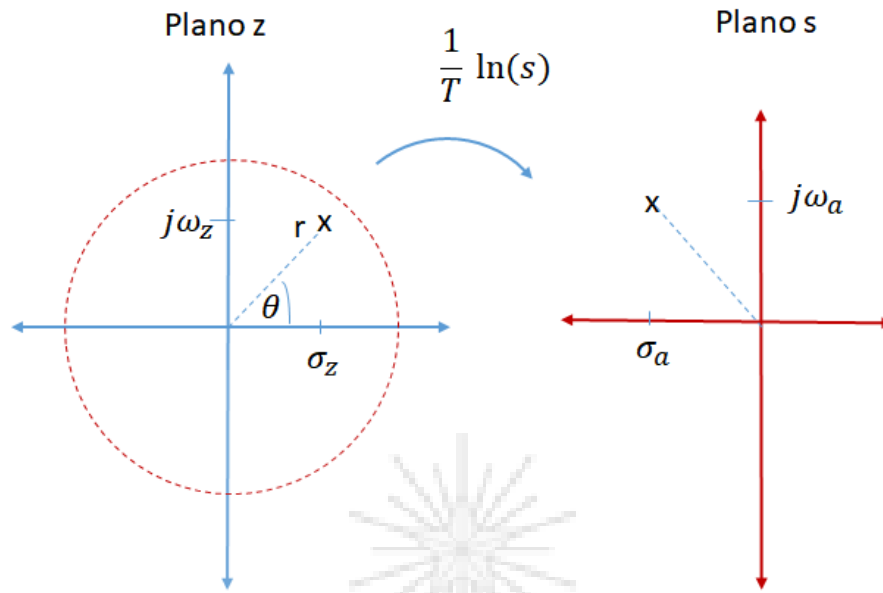


Figura 10.35: Transformación de un polo de lazo cerrado en z a su equivalente en el plano s .

valor de ω_n se muestra en la ecuación (10.34) y corresponde a:

$$\omega_n = \sqrt{\sigma_a^2 + \omega_a^2} = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2(r) + \theta^2} = f_s \cdot \sqrt{\ln^2(r) + \theta^2} \quad (10.34)$$

donde $f_s = \frac{1}{T}$ es la frecuencia de muestreo. La ecuación (10.34) nos indica que la frecuencia natural de un punto $\sigma_z + j\omega_z$ en el plano z es proporcional a la frecuencia de muestreo. Si por ejemplo, se duplica f_s , entonces la frecuencia natural ω_n de ese punto, también se duplica.

Utilizando los valores de σ_a y ω_a obtenidos en (10.33), el valor del coeficiente de amortiguamiento ζ se encuentra como se muestra en la ecuación (10.35).

$$\zeta = \cos \left(\text{atan2} \left[\frac{\theta}{\ln(r)} \right] \right) \quad (10.35)$$

El resultado mostrado en la ecuación (10.35) es interesante ya que nos señala que un punto cualquiera $\sigma_z + j\omega_z$ en el plano z , tiene siempre el mismo coeficiente de amortiguamiento ya que ζ no es dependiente de la frecuencia de muestreo.

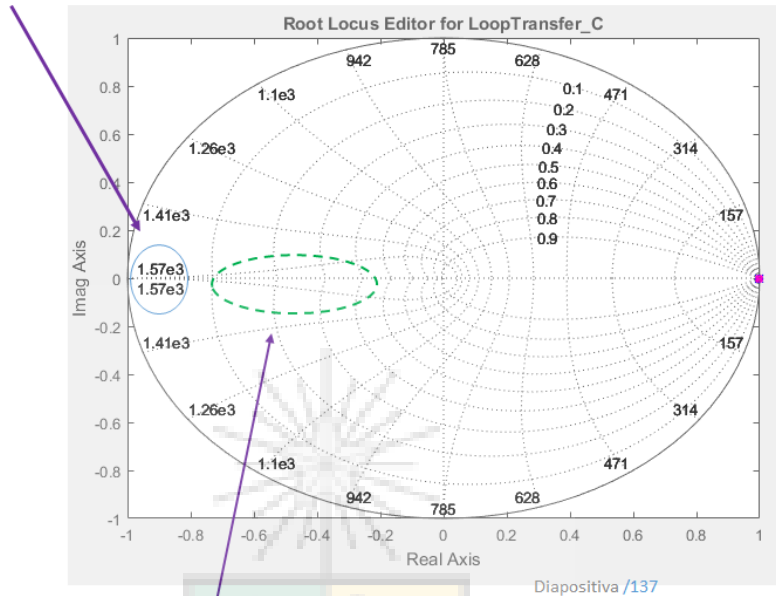
Tenga cuidado con los signos cuando aplica la ecuación (10.35). Para puntos al interior del círculo unitario, el $\ln(r)$ es intrínsecamente negativo es decir $\ln(r) < 0$ lo que significa que el punto $\sigma_a \pm j\omega_a$ se encuentra en el semiplano izquierdo del plano s (segundo o tercer cuadrante). Por ese motivo se utiliza el operador `atan2` que en lenguaje *c* y Matlab se utiliza para indicar arcotangente de cuatro cuadrantes. Un ejemplo de como aplicar la ecuación (10.35), se encuentra en la sección 12.1.8.

¿Para que hemos efectuado el desarrollo que se presenta en esta sección? Muchos alumnos intentan calcular el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural directamente desde el plano z , utilizando los desarrollos discutidos en la sección donde se discute el sistema de segundo orden (ver por ejemplo Fig. 2.1). Este es un error frecuente y muchas veces se asume que $\omega_n = \sqrt{\sigma_z^2 + \omega_z^2}$ lo cuál es incorrecto. La forma correcta de encontrar la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento de un polo o punto en el plano z es utilizar las ecuaciones discutidas en esta sección o similares. En general se recomienda transformar desde z a s antes de calcular las frecuencias naturales y coeficientes de amortiguamientos.

10.5.0.1. Transformando el Semiplano Izquierdo del Círculo Unitario del Plano z

Al diseñar controladores, habitualmente se evitan los polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo del círculo unitario. Esto se debe a que una buena parte de ese semiplano tiene muy bajos coeficientes de amortiguamiento y los polos de lazo cerrado ubicados en esa región producen altas oscilaciones (estos polos son llamados *ringing*

Máximo ω_n posible
para $T = 2ms$ y $\omega_z=0$



Bajos factores de amortiguamiento

Figura 10.36: Polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo del círculo unitario.

poles en la literatura anglosajona). La zona de bajos coeficientes de amortiguamiento corresponde (aproximadamente) a que se muestra en la Fig. 10.36

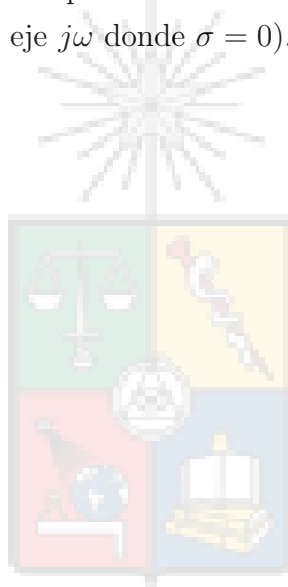
Para mostrar este bajo factor de amortiguamiento, se efectuará la transformada de z a s de un punto ubicado en la parte negativa del eje σ_z . Por ejemplo un punto ubicado en el punto $z = -L + j0$, donde L es un real positivo. Utilizando la ecuación (10.32) se puede escribir (10.36)

$$z = -L \pm j0 = Le^{\pm j\pi} \rightarrow s = \frac{1}{T} \ln(L \cdot e^{\pm j\pi}) = \frac{1}{T} \ln(L) \pm j\frac{\pi}{T} \quad (10.36)$$

El coeficiente de amortiguamiento se puede calcular como se muestra en la ecuación (10.37).

$$\zeta = \cos \left(\operatorname{atan2} \left[\frac{\pm \pi}{\ln(L)} \right] \right) \quad (10.37)$$

Como se señaló anteriormente, este coeficiente de amortiguamiento no tiene dependencia de T . Si se analiza el punto $z = -0.5 + j0$ (o sea aproximadamente la mitad del semiplano izquierdo del círculo unitario), el coeficiente de amortiguamiento obtenido es de solo $\zeta \approx 0.22$. Si el valor de $z \approx -1 + j0$ el coeficiente de amortiguamiento $\zeta \approx 0$ y los polos equivalentes en el plano s tienen solo componente imaginaria (o sea están sobre el eje $j\omega$ donde $\sigma = 0$).



Capítulo XI

DISEÑO APROXIMADO DE CONTROLADORES EN EL DOMINIO Z



Diseño Utilizando la Transformada de Tustin

11.1. Introducción

Existen dos metodologías ampliamente utilizadas para diseñar controladores en el plano z . La primera es diseñar el controlador en el plano s y luego utilizar una aproximación a la transformada z para obtener la representación digital del controlador. La segunda metodología es diseñar directamente en el plano z (llamada también diseño exacto en z). En este capítulo se discutirá el primer caso, es decir diseño en el plano s y discretización a z utilizando la aproximación de Tustin.

El diseño de controladores digitales utilizando métodos de diseño en el plano s , puede ser utilizado en aquellos sistemas de control digital donde el hardware (principalmente procesador digital y/o conversores A/Ds), puede operar con frecuencias de muestreo altas comparadas con la frecuencia natural del lazo de control (ω_n). Si esto no es posible entonces la metodología de diseño exacto en el plano z podría ser más apropiada para ese tipo de sistemas.

11.1.1. Transformada Bilineal o de Tustin

La definición de z es:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} \quad (11.1)$$

La parte derecha de (11.1) puede ser expandida utilizando la serie de MacLaurin como se muestra en la ecuación (11.2).

$$z = \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s\frac{T}{2})^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s\frac{T}{2})^n}{n!}} \quad (11.2)$$

La ecuación (11.2), puede escribirse como se muestra en la expresión (11.3).

$$z = \frac{1 + \frac{sT}{2} + (\frac{sT}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{sT}{2})^3 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{sT}{2})^4 \cdot \frac{1}{24} + (\frac{sT}{2})^5 \cdot \frac{1}{120} + \dots}{1 - \frac{sT}{2} + (\frac{sT}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} - (\frac{sT}{2})^3 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{sT}{2})^4 \cdot \frac{1}{24} - (\frac{sT}{2})^5 \cdot \frac{1}{120} + \dots} \quad (11.3)$$

Si se asume que $\frac{sT}{2}$ tiene un valor muy pequeño, entonces una expresión **aproximada** de z se obtiene como se muestra en la ecuación (11.4).

$$z = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \quad (11.4)$$

utilizando (11.4) se puede demostrar que s se puede obtener como se muestra en

la ecuación (11.5) :

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (11.5)$$

Recuerde que la expresión (11.5) se obtiene a partir de la aproximación de primer orden de una función exponencial en el numerador y denominador de (11.3). Por lo tanto esta expresión tiene mayor exactitud cuando el tiempo de muestreo es suficientemente bajo para que todos los términos $(\frac{sT}{2})^n$ con $n \geq 2$ puedan ser considerados despreciables.

La transformada bilineal o de Tustin no es la única que se puede utilizar para lograr una relación aproximada entre s y z , sin embargo tiene algunas ventajas, como por ejemplo preservar estabilidad. La transformada de Tustin de un sistema estable en s produce una función de transferencia en z que tiene todos sus polos dentro del círculo unitario.

11.2. Diseño de Controladores Digitales Utilizando Métodos de Diseño en Tiempo Continuo

Un controlador analógico puede ser diseñado utilizando Root Locus, Bode u otra metodología de diseño en el plano s . El controlador así obtenido se discretiza utilizando la transformada bilineal. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la transformada bilineal o de Tustin es solo una aproximación. Además, al diseñar en el plano s un sistema de control digital, usualmente el retardo de transporte del retentor de orden cero es despreciado, lo que produce una disminución del margen de fase (con su correspondiente efecto desestabilizante) cuando la frecuencia de muestreo no es muy alta. El concepto de margen de fase será estudiado al discutir respuesta

en frecuencia.

¿Por qué utilizar un método aproximado de diseño de controladores digitales en vez de utilizar siempre diseño exacto?. La primera ventaja es que nos ahorramos la transformada z de todo el sistema. La segunda es podemos utilizar métodos de diseño que son bien conocidos como, por ejemplo, diseño en frecuencia. No es fácil diseñar en frecuencia cuando se utiliza la representación de la planta en el plano z .

11.2.1. Ejemplo de Diseño Utilizando la Transformada de Tustin

Se diseña un sistema de control para la planta de la Fig. 11.1 , considerando cero error en estado estacionario a entrada escalón, coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.8$ y frecuencia natural de 30 rad/seg . Utilizando *root – locus* se obtiene el siguiente controlador PI:

$$G_c(s) = 3.73 \frac{(s + 23.4)}{s} \quad (11.6)$$

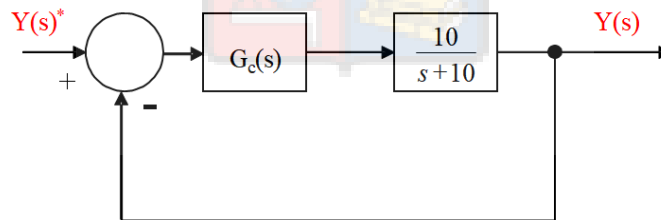


Figura 11.1: Sistema de control con realimentación unitaria

Este controlador se obtuvo utilizando la herramienta Rltool del control toolbox de MATLAB. Dado que en esta etapa del curso se espera que todos los alumnos y alumnas dominen el lugar de la raíz, no se entregan mayores detalles de como se llegó al controlador de (11.6).

Utilizando la transformada bilineal de (11.5), es simple demostrar que un controlador PI tiene la función de transferencia en el plano z mostrada en (11.7).

$$G_c(s) = k_p \frac{(s + a)}{s} \Rightarrow G_c(z) = k_p \frac{\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + a\right)}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = k_p \left(1 + \frac{aT}{2}\right) \frac{\left(z - \frac{1 - \frac{aT}{2}}{\frac{aT}{2} + 1}\right)}{z - 1} \quad (11.7)$$

Finalmente, en el plano z la ecuación (11.7) correspondiente a un PI digital puede escribirse como se muestra en (11.8).

$$G_c(z) = k_{pz} \frac{(z - a_z)}{z - 1} \quad (11.8)$$

Afortunadamente, Matlab entrega algunas herramientas para evitar el trabajo algebraico al utilizar Tustin. La instrucción

$$[Numd, Dend] = c2dm(num, den, T, 'tustin')$$

Encuentra el numerador ($Numd$) y denominador ($Dend$) del controlador digital. Los términos num y den corresponden al numerador y denominador del controlador en el plano s y el término T es el tiempo de muestreo. El acrónimo *c2dm* significa *Continuous to discrete using method*. El método en este caso es la transformada de Tustin pero existen otras alternativas disponibles en Matlab.

Al discretizar el PI analógico de la ecuación (11.6), utilizando una frecuencia de muestreo de 900 rad/seg , ($T = 2\pi/900$) correspondientes a $\omega_s = 30\omega_n$, se llega a la ecuación (11.9).

$$G_c(z) = 4.034 \frac{(z - 0.849)}{z - 1} \quad (11.9)$$

El funcionamiento del controlador digital de (11.9) se demuestra utilizando el modelo

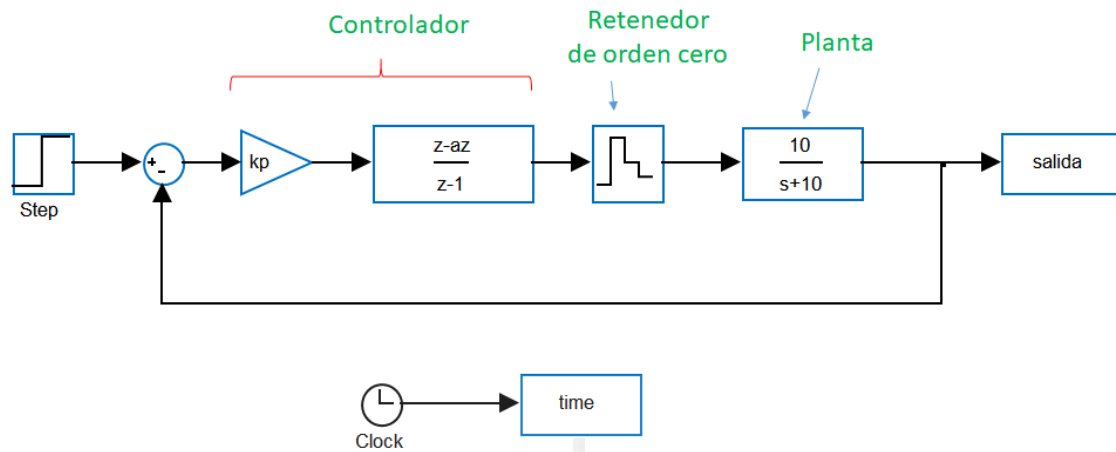


Figura 11.2: Versión SIMULINK del sistema de control con realimentación unitaria. Se utiliza un controlador PI digital, pero por supuestos otros diseños son posibles.

de SIMULINK de la Fig. 11.2. Nótese que para el diseño del sistema de control digital (y la simulación del sistema representado en la Fig. 11.2), el filtro *antialiasing* no ha sido considerado. Esto se debe a que el filtro *antialiasing* es usualmente diseñado para una frecuencia de corte de aproximadamente $\frac{\omega_s}{2}$, lo que en este caso equivale a una frecuencia de corte de $\omega_c = 15\omega_n$. Esto está alejado de los polos dominantes y por este motivo el efecto del filtro *antialiasing* muchas veces es considerado despreciable cuando se utilizan altas frecuencia de muestreo.

La respuesta del sistema de control digital de Fig. 11.2, utilizando el controlador de (11.9), es mostrada en la Fig. 11.3 y comparada con la respuesta obtenida al utilizar el controlador analógico en el sistema de la Fig. 11.1.

La Fig. 11.4, muestra una vista ampliada del desempeño mostrado en la Fig. 11.3, comparando a nivel de detalle el desempeño de ambos sistemas de control (digital y de tiempo continuo). El controlador digital tiene un sobrepaso ligeramente superior, lo que habitualmente indica que los polos y ceros de lazo cerrado del sistema en z no están exactamente en la misma posición que los polos y ceros del sistema

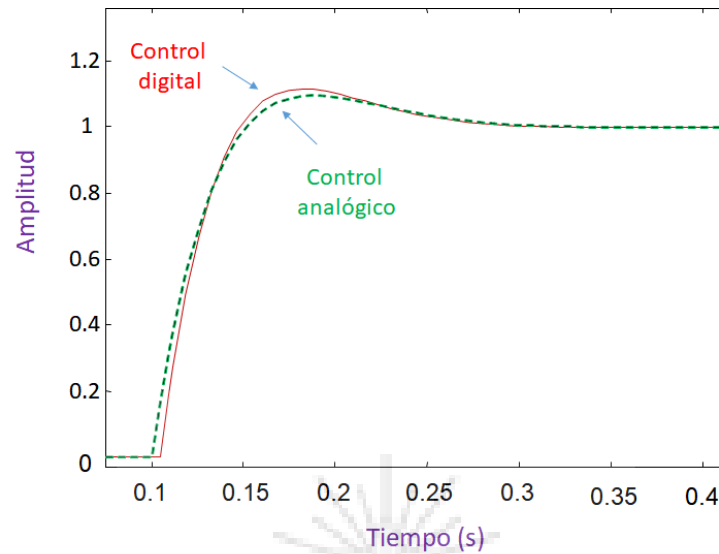


Figura 11.3: Respuesta del sistema de control correspondiente al sistema de la Fig. 11.2, considerando el controlador discretizado de (11.9) que utiliza Tustin y $\omega_s = 30\omega_n$. Esta respuesta se ha comparado con la obtenida al simular el controlador analógico de (11.6) en el sistema de la Fig. 11.1

continuo. Esto sucede con los diseños en que se emplea la transformada de Tustin, ya que la expresión (11.5) es una aproximación de primer orden de $s = \frac{1}{T} \cdot \ln(z)$. Sin embargo, tal como se muestra en la Fig. 11.3, la diferencia en el desempeño de ambos sistemas de control (discreto y continuo) es menor y poco significativa.

Como acotación final, es necesario clarificar que los sistemas discretos y los sistemas continuos, no necesariamente tienen exactamente la misma respuesta aunque los polos y ceros de lazo cerrado de ambos sistemas de control, estén en posiciones equivalentes. El sistema discreto introduce perturbaciones adicionales, como por ejemplo el error de discretización o ruido de cuantización. Además, como ya se discutió anteriormente, el retenedor de orden cero puede propagar armónicos de alta frecuencia que son aplicados a la planta. Este último efecto se mostrará en los resultados de simulación que se discutirán en las próximas secciones.

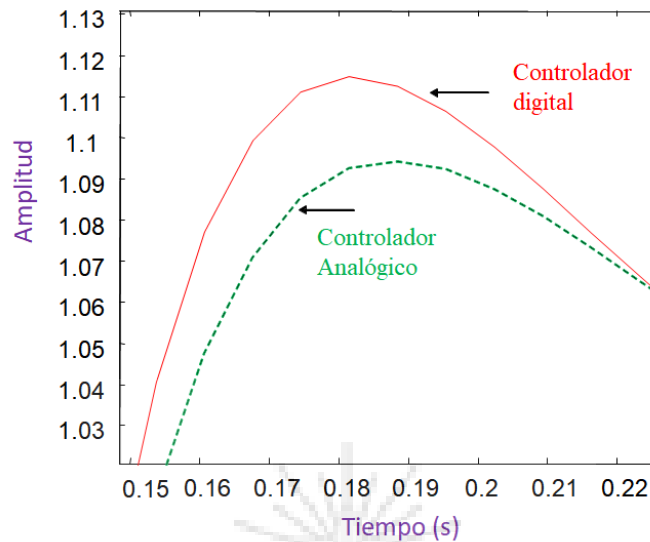


Figura 11.4: Vista ampliada de la respuesta del sistema de control de Fig. 11.3.

11.2.2. Diseño por Tustin Considerando una Menor Frecuencia de Muestreo

El buen desempeño del controlador discretizado, mostrado en la función de transferencia de (11.9) se debe a que la frecuencia de muestreo es muy alta comparada con la frecuencia natural. Sin embargo, si la frecuencia de muestreo se reduce a 300rads/seg correspondiente a $\omega_s = 10\omega_n$ (frecuencia de muestreo todavía superior a la definida por el teorema de Nyquist-Shannon) se puede observar que el desempeño se degrada. El nuevo controlador diseñado para $\omega_s = 10\omega_n$, se obtiene al discretizar el PI de (11.6) con $T_s = 2\pi/300$. Este controlador es mostrado en la ecuación (11.10).

$$G_c(z) = 4.64 \frac{(z - 0.606)}{(z - 1)} \quad (11.10)$$

Se simula el sistema nuevamente y se comparan los resultados. La Fig. 11.5

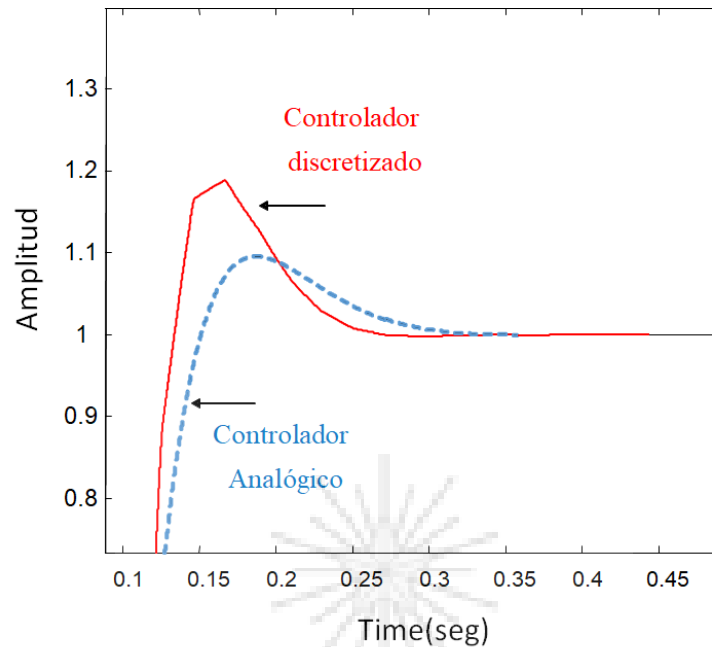


Figura 11.5: Respuesta del sistema de control utilizando una frecuencia de muestreo $\omega_s = 10\omega_n$

muestra ambas respuestas; la del sistema digital con el controlador de (11.10) y la obtenida con el sistema de la Fig. 11.1 y el controlador de (11.6). En este caso la respuesta del controlador discretizado es bastante diferente a la respuesta del controlador analógico. A pesar de que el sistema discreto todavía funciona razonablemente bien, el coeficiente de amortiguamiento se ha reducido ligeramente a $\zeta = 0.79$ y la frecuencia natural se ha aumentado a $\omega_n = 38.3\text{rad/seg}$, es decir un valor $\approx 28\%$ superior a la frecuencia de diseño. Esta variación en la frecuencia natural podría ser considerada inaceptable en algunas aplicaciones.

¿A que se debe esta relativamente alta variación de uno de los parámetros de diseño? Se está utilizando la técnica de diseño equivocada. No se puede utilizar Tustin con una frecuencia de muestreo $\omega_s = 10\omega_n$ y esperar que el sistema tenga un desempeño similar al obtenido en el sistema de control continuo. Además, cuando se

utiliza una baja frecuencia de muestreo, el retardo de transporte de media muestra producido por el retenedor ya tiene un efecto considerable y mejores resultados se pueden obtener diseñando el controlador en s tomando en cuenta este retardo (ver sección 11.4).

Nótese que en la Fig. 11.5, la respuesta del controlador discretizado es discontinua y se compone de algunas líneas casi rectas. Como ya se ha discutido, esto se debe principalmente a que la planta no elimina completamente los armónicos introducidos por el retenedor de orden cero (ver Figs. 10.27 y 10.28).

11.3. Exactitud de los Diseños Realizados Utilizando la Transformada de Tustin

En general los diseños realizados utilizando la transformada de Tustin tienen un buen desempeño si es que es posible utilizar una alta frecuencia de muestreo. Sin embargo, si el hardware utilizado no puede operar con altas frecuencias de muestreo, el desempeño del controlador discretizado puede ser notoriamente distinto al obtenido con el controlador analógico original.

En la Tabla 11.1, tomada desde los apuntes de control digital del profesor Greg Asher de la Universidad de Nottingham, se muestra el desempeño de un control digital discretizado considerando distinta frecuencia de muestreo. En el diseño analógico el controlador fue diseñado para $\omega_n = 7.07 \text{rads}^{-1}$, con un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$. Este ejemplo corresponde al sistema de control diseñado para el lazo de velocidad de una máquina de corriente continua y posiblemente se obtendrían resultados distintos en otra aplicación. En todo caso, para cualquier sistema de control diseñado utilizando métodos analógicos (en s), el

ω_s/ω_n (ω_n continuo)	Frecuencia natural equivalente al utilizar el diseño discretizado	Coefficiente de amortiguamiento en z
1.5	2.34	0.11
3	4.71	0.3
5	5.9	0.511
10	6.75	0.58
15	6.95	0.6
20	7.2	0.707
continuo	7.07	

Tabla 11.1: Resumen de los valores reales de frecuencia natural y coeficiente de amortiguamientos obtenidos al utilizar distintos valores de frecuencia de muestreo: Tabla tomada de los apuntes de control digital del profesor Greg Asher, Universidad de Nottingham. El diseño original considera $\omega_n = 7.07$ y coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$

desempeño del controlador se degrada cuando se utiliza la transformada de Tustin y una baja frecuencia de muestreo.

Como se muestra en la Tabla 11.1, el desempeño del controlador discretizado es bastante mejor cuando la frecuencia de muestreo es alta comparada con la frecuencia natural del diseño analógico. En general la pérdida de amortiguamiento y frecuencia natural de un controlador discretizado, dependen del sistema de control y del diseño del controlador que se está discretizando (PI, PID, lead-lag, etc.). Sin embargo una regla aceptable es asumir que no existe mayor pérdida de desempeño cuando el controlador se discretiza y se utiliza en un sistema de control digital con una relación $\omega_s/\omega_n > 30$. Esto es al menos 7 veces superior al límite establecido por la velocidad de Nyquist. (recuerde que en la presencia de ceros de lazo cerrado y/o polos de lazo cerrado mal amortiguado, el ancho de banda de un sistema puede ser hasta dos veces la frecuencia natural).

El utilizar una relación $\omega_s/\omega_n > 30$, es lo que se ha llamado en este apunte una *receta*, es decir una buena regla que pocas veces (en mi experiencia), produce resultados inadecuados. En estos pocos casos podría ser necesario utilizar una relación ω_s/ω_n superior a 30. Por ejemplo cuando el diseño del sistema de control utiliza cancelación de polos y ceros muy alejados del origen.

Se debe resaltar que el ejemplo de la Tabla 11.1, se utiliza en este apunte para mostrar una tendencia, es decir el controlador degrada su respuesta cuando se utiliza Tustin con relativamente baja frecuencia de muestreo. Pero otros aspectos, como por ejemplo la reducción del coeficiente de amortiguamiento o cambios en la frecuencia natural, no siempre tienen el mismo comportamiento cuando se utilizan otras plantas u otros controladores. Por ejemplo, podría suceder que la frecuencia natural aumente cuando se baja la frecuencia de muestreo y se utilice Tustin (ver sección 11.2.2).

En resumen, al aplicar Tustin con $\omega_s \geq 30\omega_n$, es más probable que los polos de

lazo cerrado en z queden en la misma posición que los polos de lazo cerrado de diseño original en s .

11.3.1. Desventajas de Utilizar Altas frecuencias de Muestreo

La frecuencia de muestreo a utilizar en un sistema de control esta limitada por, entre otros, lo siguiente:

- *Velocidad de Nyquist.* Este es claramente el límite inferior que establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos dos veces mayor al ancho de banda de la frecuencia de la señal analógica, para poder reconstruir esta señal en el procesador digital. Como ya se ha mencionado, esta es una condición necesaria pero generalmente no suficiente para obtener resultados aceptables en la respuesta del sistema de control de lazo cerrado; por ese motivo, habitualmente se utilizan valores de frecuencia de muestreo bastante mayores a $f_s = 2f_{BW}$ (donde el subíndice $BW = \text{bandwidth}$).
- *Hardware computacional.* El límite superior está establecido por el hardware utilizado en el sistema de control, cuando la frecuencia de muestreo es mayor, menor es el tiempo disponible para implementar las ecuaciones diferencia del algoritmo de control. Esto se demuestra gráficamente en la Fig. 10.26.

Por lo tanto diseños realizados utilizando métodos en s y discretizados utilizando la transformada de *Tustin*, disponen de menor tiempo para su implementación debido a la elevada frecuencia de muestreo requerida.

- *Resolución de los conversores A/Ds.* Este es un problema que a veces no es tomado en cuenta. Al muestrear muy rápidamente una variable que evoluciona lentamente, por ejemplo, la velocidad de un motor, si el conversor A/D tiene poca resolución, no es capaz de discriminar entre muestras sucesivas. Esto

significa que el sistema de control recibe información incorrecta (ver la parte derecha de Fig 10.6) y los efectos del ruido de cuantización se hacen más importante. Esto se soluciona aumentando la resolución del conversor, lo cual puede incrementar los costos.

11.3.1.1. Ejemplo del Pasado

En el pasado reciente, la capacidad computacional disponible para implementar sistemas de control digital era bastante limitada. La tabla 11.2 fue tomada de los apuntes de control digital del profesor Greg Asher de la Universidad de Nottingham en el año 1992. En ella se muestran los tiempos de procesamiento típicos para implementar el lazo de control y lazo de corriente en una máquina de una corriente continua. Recuerde que en los sistemas de control de máquinas eléctricas el lazo de corriente se encuentra anidado en el interior del lazo de velocidad. Además, para ambos lazos, comúnmente se utiliza un controlador PI.

Ciertamente la velocidad de los procesadores actuales es muy superior a la existente en microprocesadores como el Z80. Sin embargo en algunas aplicaciones, como por ejemplo electrónica de potencia, los tiempos de muestreo máximos son pequeños (menores a $50\mu S$ en algunos casos) y la capacidad computacional del procesador sigue siendo un aspecto a tener en cuenta especialmente al implementar algoritmos complejos como por ejemplo control predictivo.

Lazo de control	ω_n	$\omega_s = 30\omega_n$	T_s	uPZ80	uP8086	uC 8051
Lazo de velocidad	10rads^{-1}	300rads^{-1}	20mS	3mS	300uS	15 – 30uS
Lazo de corriente	100rads^{-1}	3000rads^{-1}	2mS	3mS	300uS	15 – 30uS

Tabla 11.2: Tiempos de procesamiento de un sistema de control digital utilizando distintos procesadores. Nótese que casi todos estos procesadores son antiguos, pero la comparación sigue siendo válida a nivel conceptual. Esto se debe a que en la actualidad aún existen algoritmos de control que demandan una muy alta carga computacional y son difíciles de implementar cuando el período de muestreo es muy pequeño.

11.3.2. Comentarios Relacionados con el diseño Utilizando Tustin

El diseño de un sistema de control utilizando la transformada de Tustin produce buenos resultados cuando la frecuencia de muestreo es muy alta comparada con la frecuencia natural. Salvo pocas excepciones, relaciones de $\omega_s = 30\omega_n$ producen un buen desempeño en el sistema de control discreto.

El diseño en s discretizado utilizando Tustin, produce mejores resultados cuando el retardo de transporte de media muestra, producido por el retendor de orden cero, es incluido al efectuar el diseño analógico. Esto se discute en la sección 11.4.

Cuando la frecuencia de muestreo es muy alta ($\omega_s > 30\omega_n$), la diferencia de desempeño entre incluir/no incluir este retardo de transporte en el diseño es pequeña y generalmente el efecto del término $e^{-\frac{ST}{2}}$ no es considerado. Sin embargo, para otras frecuencias de muestreo puede ser importante.

11.4. Diseño considerando el retardo de transporte producido por el muestreador

Una forma alternativa de diseñar un controlador digital, utilizando Tustin, es considerar en el diseño en s el retardo de transporte del retenedor de orden cero [ver ecuación (10.3)]. Esta metodología permite reducir la razón ω_s/ω_n manteniendo una respuesta similar a la obtenida con el diseño original en el plano s .

Si se considera el retardo de transporte del ZoH , el sistema de control de la Fig. 11.1 se modifica a lo que se muestra en la Fig. 11.6.

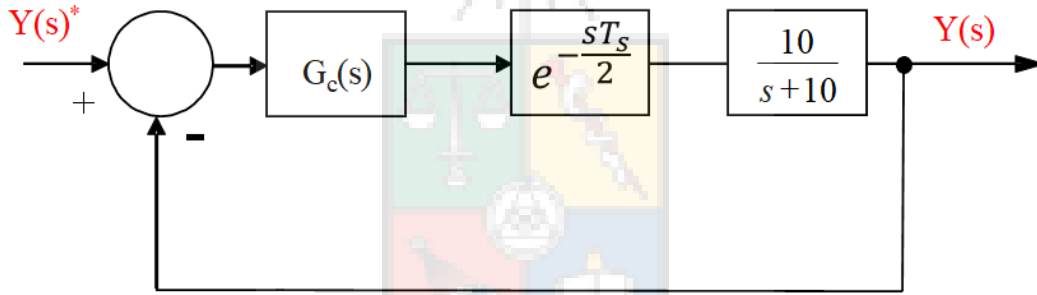


Figura 11.6: Sistema de control incluyendo el retardo de transporte producido por el retenedor de orden cero.

Si consideramos que el tiempo de procesamiento es despreciable entonces, para $\omega_s = 300\text{rad/seg.}$ ($\omega_s = 10\omega_n$), el retardo de transporte es $T_d = T_s/2 = 0.0105s$. Utilizando la aproximación de Padé de primer orden, la planta del sistema es transformada a lo que se muestra en la ecuación (11.11).

$$G_p(s) = e^{-sT_s/2} \frac{10}{s+10} \approx \frac{-10s+1910}{s^2+201s+1910} \quad (11.11)$$

Diseñando el sistema de control para cero error en estado estacionario, frecuencia natural $\omega_n = 30 \text{ rad/seg}$ y un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.8$ se obtiene el lugar de la raíz que se muestra en la Fig. 11.7. El controlador obtenido para cumplir con las condiciones de diseño es mostrado en la ecuación (11.12). Este controlador es ligeramente distinto al de la ecuación (11.6), el cual fue diseñado sin considerar la media muestra de retardo.

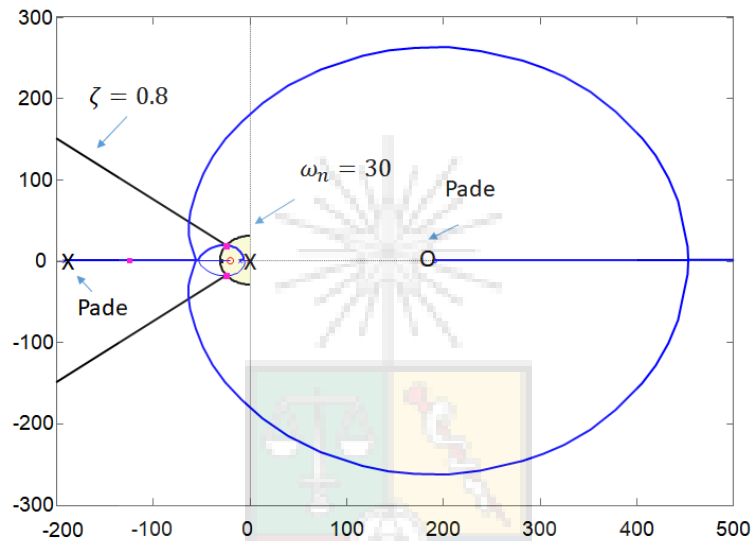


Figura 11.7: Lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia de (11.11) y un controlador PI.

$$G_c(s) = 2.89 \cdot \frac{(s + 20.5)}{s} \quad (11.12)$$

Discretizando el controlador utilizando la transformada de Tustin y una frecuencia de muestreo de $\omega_s = 10\omega_n = 300 \text{ rad/seg}$ se obtiene la función de transferencia en z mostrada en la ecuación (11.13).

$$G_c(z) = 3.51 \cdot \frac{(z - 0.6465)}{z - 1} \quad (11.13)$$

Se simula el sistema discreto y se comparan las respuestas. La Fig. 11.8 muestra la respuesta del controlador discreto de (11.13), implementado en el sistema mostrado en la Fig. 11.2 y la respuesta del diseño analógico original (implementado en el modelo de la Fig. 11.6). El controlador discretizado tiene una respuesta con un sobrepaso ligeramente mayor, lo que posiblemente indica que los polos y ceros de lazo cerrado son ligeramente distintos. Sin embargo, los resultados demostrados por el controlador de (11.13) en la Fig. 11.8 son bastante buenos considerando que se está utilizando Tustin con una razón ω_s/ω_n relativamente modesta. Esto se debe a que la inclusión de la media muestra de retardo en la planta de (11.11) mejora bastante el diseño analógico.

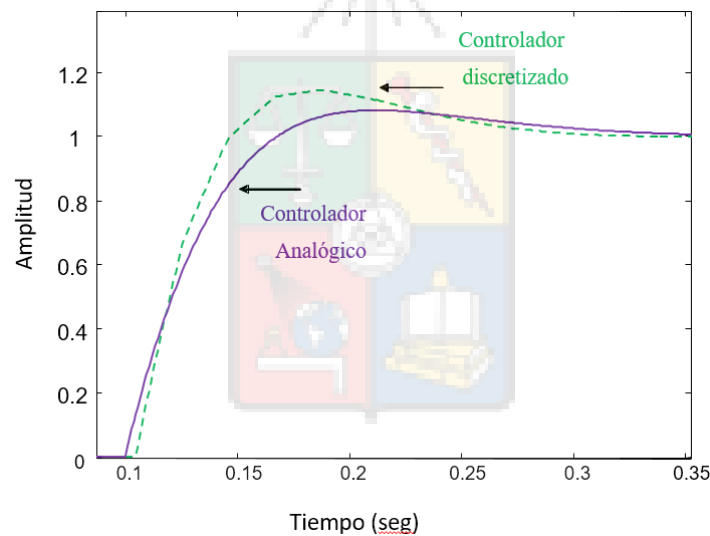


Figura 11.8: Comparación de los desempeños alcanzados por el controlador analógico de (11.12) y el diseño discretizado de (11.13) que se obtuvo considerando $\omega_s = 10\omega_n$.

La Fig. 11.9 muestra en forma ampliada el desempeño de dos controladores discretizados utilizando Tustin y que fueron obtenidos a partir de los diseños

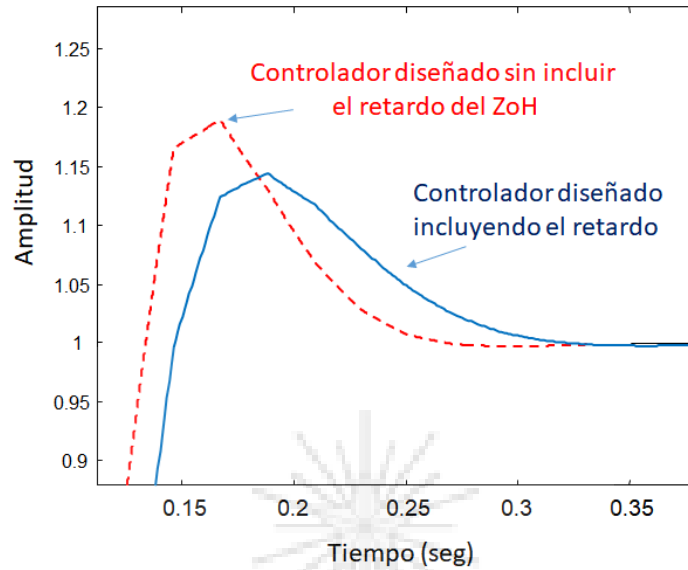


Figura 11.9: Comparación de los desempeños alcanzados por los controladores discretos obtenidos desde (11.6) y (11.12) para $\omega_s = 10\omega_n$.

analógicos de (11.6) y (11.12). Recuerde que ambos controladores fueron diseñados para obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón considerando la planta $G(s) = \frac{10}{(s+10)}$, frecuencia natural de $\omega_n = 30\text{rad/seg}$ y coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.8$.

Los controladores analógicos de (11.6) y (11.12) fueron discretizados considerando $\omega_s = 10\omega_n$, pero como se mencionó anteriormente, para el diseño del controlador de (11.12) se consideró la media muestra de retardo inherente al retenedor de orden cero. El desempeño de ambos controladores se muestra en la Fig. 11.9 y se puede comprobar que el controlador que considera el retardo durante el diseño mejora considerablemente la respuesta alcanzada.

El análisis de polos de lazo cerrado, frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento alcanzados por los sistemas de control discutidos en este capítulo,

se presentan en la subsección [11.4.2](#).

11.4.1. Diseño por Tustin del Sistema de Control Discreto

Considerando $\omega_s = 5\omega_n$

Las diferencias entre las respuesta del controlador diseñado sin considerar retardo y considerándolo, se acentúan considerablemente cuando la razón entre la frecuencia de muestreo y la frecuencia natural del sistema se reduce aún más. En la Fig. [11.10](#) se muestra la respuesta de los tres controladores para $\omega_s = 5\omega_n$. Para este caso el controlador analógico, diseñado considerando el retardo de transporte del retenedor de orden cero, es el que se muestra en la ecuación ([11.14](#)).

Debe tomarse en cuenta que una reducción tan considerable en la relación entre la frecuencia natural y la frecuencia de muestreo es poco apropiada incluso para diseñar controladores discretos por métodos exactos (como los que se verán en el próximo capítulo). Por lo tanto, utilizar $\omega_s = 5\omega_n$ es menos apropiado aún para diseñar sistemas de control discreto utilizando la aproximación de Tustin. Sin embargo, se presenta en este apunte para fines pedagógicos.

$$G_C(s) = 2.123 \frac{(s + 16.2)}{s} \quad (11.14)$$

Discretizando el controlador de la ecuación ([11.14](#)), considerando $T = 2 \cdot \pi/150$, y aplicando Tustin, se llega a la ecuación ([11.15](#)).

$$G_C(z) = 2.8433 \frac{(z - 0.493)}{(z - 1)} \quad (11.15)$$

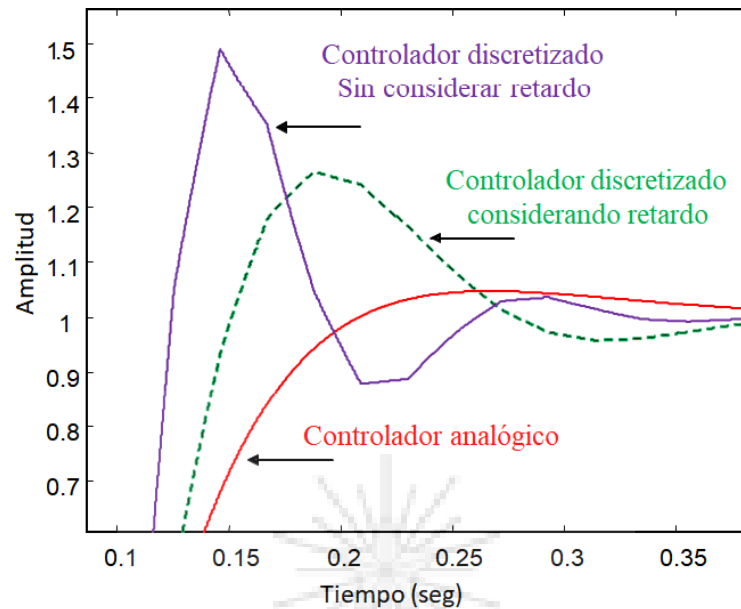


Figura 11.10: Comparación de los desempeños alcanzados por los controladores obtenidos considerando $\omega_s = 5\omega_n$.

Se simula el sistema de control discreto y se comparan los resultados. La Fig. 11.10 muestra los resultados alcanzados considerando el controlador analógico y los diseños implementados considerando/sin considerar el retardo de transporte de media muestra del retendor de orden cero. Ambos diseños discretos funcionan mal, pero el que considera la media muestra de retardo tiene un desempeño algo mejor. El diseño sin retardos, obtenido al discretizar (11.6) considerando un frecuencia de muestreo de $\omega_s = 150Hz$ tiene mucha oscilaciones y un alto sobrepaso.

11.4.2. ¿Podemos encontrar los valores reales de ζ y ω_n de los diseños discutidos en esta sección?

Por supuesto que es posible efectuar conocer los valores de coeficiente de amortiguamiento y de frecuencia natural de los controladores obtenidos a partir de diseños analógicos y que fueron discretizados utilizando la transformada de Tustin. Probablemente, el estudiante puede pensar; Si los controladores fueron diseñados para cero error en estado estacionario, $\omega_n = 30\text{rad/seg}$ y $\zeta = 0.8$ ¿Por qué debería encontrar el valor de coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural? La respuesta es que al discretizar utilizando la transformada de Tustin se utiliza una aproximación cuya exactitud depende del tiempo de muestreo ya que se desprecian los términos de orden $n \geq 2$ en la ecuación (11.3). Por lo tanto, si el tiempo de muestreo es relativamente alto, la ecuación (11.5) es inexacta y los valores de ω_n y ζ en el plano z , son distintos a aquellos obtenidos en el plano s .

Para encontrar los valores de ω_n y ζ reales de los diseños efectuados anteriormente, podríamos utilizar lugar de la raíz en el plano z pero eso aún no lo discutiremos hasta el próximo capítulo. Por lo tanto en esta sección se efectuará trabajo algebraico.

La representación exacta de una planta de primer orden conectada a la salida de un retenedor de orden cero fue discutida en la sección 10.2.0.4. El diagrama de bloques para este sistema se muestra en la Fig. 11.11. La transformada exacta de la planta incluyendo el retenedor de orden cero (y sus efectos, como por ejemplo el retardo de media muestra), es:

$$\frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} \quad (11.16)$$

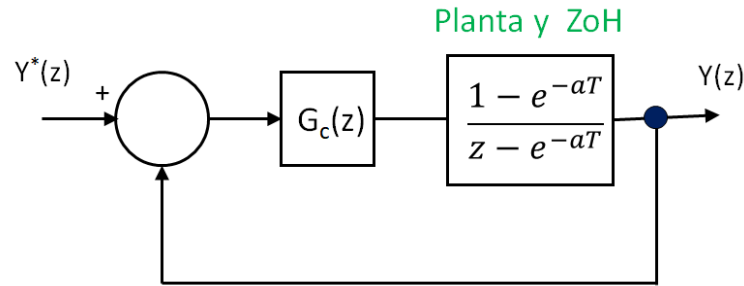


Figura 11.11: Representación exacta en el plano z del sistema de control mostrado en la Fig. 10.17

11.4.2.1. Diseño utilizando $\omega_s = 30\omega_n$

En la sección 11.2 se diseñó un controlador para la planta $\frac{10}{(s+10)}$ que considera $\omega_s = 900\text{rad/seg}$, $\zeta = 0.8$ y cero error en estado estacionario. La función de transferencia obtenida corresponde a (11.9) y por simplicidad se repite a continuación.

$$G_c(z) = 4.034 \frac{(z - 0.849)}{z - 1} \quad (11.17)$$

El tiempo de muestreo es $T = 2 \cdot \pi / 900$. Considerando la representación exacta de la planta y retenedor de orden cero mostrada en la Fig. 11.11, se obtiene:

$$G_p(z) = \frac{1 - e^{-10T}}{z - e^{-10T}} = \frac{0.0674}{z - 0.93257} \quad (11.18)$$

Considerando el sistema de control con realimentación unitaria mostrado en la Fig. 11.11, los polos de lazo cerrado en el plano z corresponden a las soluciones de

la ecuación característica de la ecuación (11.19).

$$1 + G_p(z) \cdot G_c(z) = 0 \Rightarrow 1 + 4.034 \frac{(z - 0.849)}{(z - 1)} \cdot \frac{0.0674}{(z - 0.93257)} = 0 \quad (11.19)$$

Utilizando (11.19) se puede llegar a:

$$1 + G_p(z) \cdot G_c(z) = 0 \Rightarrow z^2 - 1.661z + 0.7016 = 0 \quad (11.20)$$

Resolviendo la parte derecha de la ecuación (11.20) se encuentran las raíces en $z = 0.8305 \pm j0.108948$. Utilizando la ecuación (10.32) donde los polos equivalentes en s se calculan como $s = \frac{1}{T} \cdot \ln(z)$, se llega a que los polos equivalentes en el plano s son $s = -25.3814 \pm j18.68404$. Utilizando lo discutido en la sección 10.4 se obtiene que el diseño en z tiene una frecuencia natural de $\omega_n = 31.5 \text{ rad/seg}$, con un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.805$.

La conclusión es que, al menos con esta planta, el diseño aproximado utilizando Tustin, con $\omega_s = 30 \cdot \omega_n$ entrega resultados muy similares al diseño original efectuado en el plano s . Adicionalmente, debido a la alta frecuencia de muestreo, los armónicos introducidos por el retenedor de orden cero son casi completamente eliminados a la salida del sistema SISO, por la respuesta de frecuencia de la planta (ver Fig. 11.1).

11.4.2.2. Diseño utilizando $\omega_s = 10\omega_n$

En este caso el diseño analógico sigue siendo el mismo y el controlador en s corresponde al mostrado en la función de transferencia de (11.6). Sin embargo el tiempo de muestreo aumenta tres veces a $T = 2 \cdot \pi/300$ segundos.

El controlador discreto, obtenido utilizando la transformada de Tustin corresponde a la función de transferencia de (11.10), la cual por simplicidad se repite a continuación.

$$G_c(z) = 4.64 \frac{(z - 0.606)}{z - 1} \quad (11.21)$$

La planta se obtiene a partir de la Fig. 11.11, considerando el nuevo valor de T , llegándose a:

$$G_p(z) = \frac{1 - e^{-10T}}{z - e^{-10T}} = \frac{0.18896}{z - 0.81104} \quad (11.22)$$

Finalmente la ecuación característica se obtiene como:

$$1 + G_p(z) \cdot G_c(z) = 0 \Rightarrow z^2 - 0.9343z + 0.2797 = 0 \quad (11.23)$$

Resolviendo la parte derecha de la ecuación (11.23) se encuentran las raíces en $z = 0.46715 \pm j0.24793$. Esto significa que los polos de lazo cerrado en el plano s se encuentran en $s = -30.415 \pm j23.297$. Esto corresponde a una frecuencia natural de $\omega_n = 38.31 \text{ rad/seg}$ y coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.79$.

La frecuencia natural del diseño ha cambiado significativamente en este caso, aumentando en un 28 % con respecto a la estipulada en el diseño. Esto podría ser inaceptable para algunas aplicaciones ya que no se trata de una variación menor. Sin embargo, esto puede ser mejorado considerando la media muestra de retardo, en el diseño analógico.

11.4.2.3. Diseño utilizando $\omega_s = 10\omega_n$ y considerando el retardo del *ZoH* en el diseño analógico.

En este caso el tiempo de muestreo es el mismo y la representación planta exacta en el plano z es la misma [ver ecuación (11.22)], pero el controlador discreto cambia a lo mostrado en la función de transferencia (11.13), la cual se repite a contin

$$G_c(z) = 3.51 \cdot \frac{(z - 0.6465)}{z - 1} \quad (11.24)$$

Utilizando (11.22) y (11.24) se llega a la ecuación característica de (11.25)

$$1 + G_p(z) \cdot G_c(z) = 0 \Rightarrow z^2 - 1.148z + 0.3822 = 0 \quad (11.25)$$

Resolviendo la parte derecha de la ecuación (11.25) se encuentran las raíces en $z = 0.574 \pm j0.229617$. Esto significa que los polos de lazo cerrado en el plano s se encuentran en $s = -22.9615 \pm j18.16$. Finalmente ω_n y ζ se encuentran como $\omega_n = 29.3 \text{ rad/seg}$ y $\zeta = 0.784$.

Este diseño es significativamente mejor a lo obtenido anteriormente e incluso similar a lo obtenido con $\omega_s = 30 \cdot \omega_n$. El considerar el retardo del *ZoH* en el diseño del controlador analógico, ha mejorado considerablemente las características del sistema de control a lazo cerrado acercando éstas a las especificaciones de diseño. El coeficiente de amortiguamiento ha bajado en menos de un 2 % lo cual es aceptable en la mayor parte de las aplicaciones.

11.4.2.4. Diseño utilizando $\omega_s = 5\omega_n$ sin considerar el retardo del ZoH en el diseño analógico.

En este caso se utiliza el controlador presentado en la ecuación (11.6) el cual se discretiza para $\omega_s = 5\omega_n$, lo que corresponde a $T = 2 \cdot \pi/150$. Utilizando Tustin en el controlador de (11.6) se llega a:

$$G_c(s) = 5.586 \cdot \frac{z - 0.342}{z - 1} \quad (11.26)$$

La planta para esta frecuencia de muestreo es igual a:

$$G_p(z) = \frac{0.342}{z - 0.6578} \quad (11.27)$$

Utilizando (11.26) y (11.27) se llega a la ecuación característica de (11.28)

$$1 + G_p(z) \cdot G_c(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 0.2443z + 0.006899 = 0 \quad (11.28)$$

Resolviendo la parte derecha de la ecuación (11.28) se encuentran las raíces en $z = -0.211$ y $z = -0.032$. Esto significa que los polos de lazo cerrado en el plano z se encuentran en la parte izquierda del círculo unitario. Utilizando $s = \frac{1}{T} \cdot \ln(z)$ se obtiene que los polos en el plano s tienen frecuencias naturales y coeficiente de amortiguamiento de $\omega_n = 82.5\text{rad/seg}$, y $\omega_n = 123\text{rad/seg}$ con coeficientes de amortiguamiento de $\zeta = 0.417$ y $\zeta = 0.736$ respectivamente. Es decir los polos están muy alejados del punto de diseño y los polos dominantes tienen un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.443$.

11.4.2.5. Diseño utilizando $\omega_s = 5\omega_n$ Considerando el Retardo del ZoH en el Diseño Analógico.

Para finalizar y utilizando la metodología ya explicada y discutida en este apunte, se llega a que el controlador, cuya función de transferencia es mostrada en la ecuación (11.15), junto con la planta de (11.27), producen polos de lazo cerrado de $1 + G_p(z) \cdot G_c(z) = 0$ que se encuentran ubicados en aproximadamente en $z = 0.342 \pm j0.247$. Esto corresponde a polos de lazo cerrado en s , que tienen una frecuencia natural de $\omega_s = 25.4 \text{ rad./seg.}$ y un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.81$.

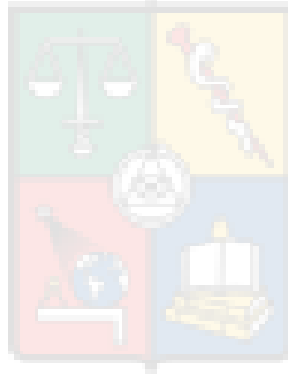
La frecuencia natural se redujo en $\approx 16.7\%$ y el coeficiente de amortiguamiento se mantiene razonablemente bien. Aún así no es buena idea diseñar con una frecuencia de muestreo tan baja, ya que la planta difícilmente podrá filtrar los componentes de frecuencias cercanas a ω_s , producidas por el muestreador, y es poco probable que el sistema de control de lazo cerrado pueda rechazar perturbaciones que a veces son de alta frecuencia y se pueden encontrar sobre el límite de frecuencia establecido por el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon (depende de la aplicación estudiada).

Sin embargo, la conclusión obvia de esta subsección, es que considerar el retardo de transporte de media muestra en el diseño analógico mejora significativamente la respuestas de sistemas de control discreto implementados utilizando la aproximación de Tustin.

11.4.2.6. Ventajas de utilizar Altas frecuencias de Muestreo

En la sección 11.3.1 se discutieron las desventajas de utilizar frecuencias de muestreo muy altas. En esta sub-sección se discute una ventaja que ya ha sido intermitentemente mencionada en este capítulo.

Si es que se cuenta con buen hardware de control (es decir se cuenta con alta capacidad de procesamiento y conversores A/D adecuados), entonces se podría implementar el algoritmo de control con una alta frecuencia de muestreo. En este caso la principal ventaja es que los armónicos creados a la salida del retenedor de orden cero (ver Fig. 10.28) pueden ser filtrados fácilmente. Por ejemplo para el caso en que se utiliza $\omega_s = 30\omega_n$, cuyos resultados de simulación se muestran en la Fig. 11.3, se puede observar que la salida de la planta tiene pocas discontinuidades y es similar a la obtenida con el diseño analógico. Para el diseño en que se considera el retardo de transporte que produce el bloque ZoH y se utiliza $\omega_s = 10\omega_n$, se logran frecuencias naturales similares. Sin embargo, tal como se muestra en la Fig. 11.9, la salida es definitivamente más discontinua. Por lo tanto, a pesar de que se logran frecuencia naturales y coeficiente de amortiguamiento similares en el diseño, la planta ha podido eliminar de mejor manera los armónicos del retenedor de orden cero cuando se han utilizado altos valores de frecuencia de muestreo.



Capítulo XII

DISEÑO EXACTO DE CONTROLADORES EN EL DOMINIO Z



Diseño Utilizando Lugar de la Raíz en el Plano z

12.1. Lugar de la Raíz en z

Por simplicidad la Fig. 10.19 es repetida a continuación (como Fig. 12.1) para explicar las bases del diseño exacto en z utilizando lugar de la raíz. Se asume que las funciones de transferencia $G(z)$ y $H(z)$ se han obtenido utilizando la transformada z discutida en la sección 10.2 y la transformada z de un sistema SISO presentada en la subsección 10.2.0.3.

La función de transferencia a lazo cerrado del sistema de la Fig. 12.1 se muestra en la ecuación (12.1).

$$\frac{y(z)}{y^*(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (12.1)$$

Encontrar los polos de (12.1) es equivalente a encontrar las soluciones de la ecuación característica $1 + G(z)H(z) = 0$. Al igual que en el caso continuo, la función

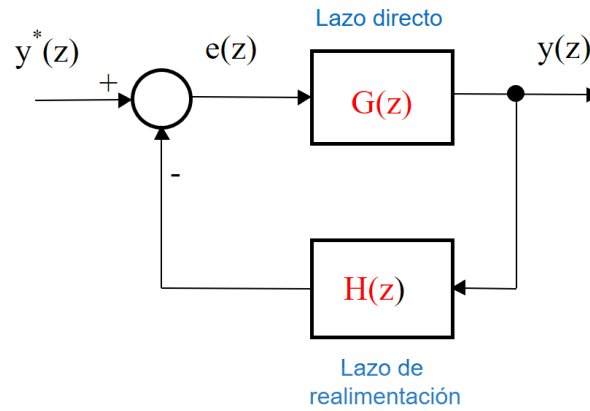


Figura 12.1: Sistema de control SISO en el plano z . El lazo directo es $G(z)$ y el lazo de realimentación es $H(z)$.

$G(z)H(z)$ puede ser representada como se muestra en la ecuación (12.2).

$$G(z)H(z) = \frac{K \prod_{i=1}^M (z + a_i)}{\prod_{j=1}^N (z + p_j)} \quad (12.2)$$

Donde K es la ganancia del sistema y los términos a_i y p_j indican los ceros y polos de lazo abierto (como siempre no confundir con los ceros y polos de lazo cerrado). Al igual que en el caso continuo, la función de (12.2) debe ser propia, es decir el grado del numerador debe ser menor o igual al grado del denominador, $M \leq N$. Utilizando (12.2) en el denominador de (12.1) se llega a:

$$1 + G(z)H(z) = 0 \Rightarrow K \cdot \prod_{i=1}^M (z + a_i) + \prod_{j=1}^N (z + p_j) = 0 \quad (12.3)$$

Por inspección de (12.3) podemos concluir fácilmente que, al igual que en el caso continuo, los polos de lazo cerrado (obtenidos al resolver la ecuación característica $1 + G(z)H(z) = 0$) son iguales a polos de lazo abierto cuando $K \rightarrow 0$. En el otro

caso, cuando $K \rightarrow \infty$ los polos de lazo cerrado son iguales a los ceros de lazo abierto.

12.1.1. Condiciones de Módulo y Ángulo

La ecuación característica $1 + G(z)H(z) = 0$ se puede resolver utilizando la condición de módulo y la condición de ángulo planteadas por Evans y discutidas en la sección 3.2. La condición de módulo se escribe como se muestra en (12.4):

$$|G(z)H(z)| = 1 \quad (12.4)$$

y la ecuación de ángulo como se muestra en la ecuación (12.5).

$$\angle[G(z)H(z)] = \pm 180 \pm n360 \quad (12.5)$$

La condición de ángulo también puede escribirse en radianes como $\angle[G(z)H(z)] = \pm\pi \pm 2n\pi$

Las ecuaciones (12.4) y (12.5), están señalando que la condición de módulo y la condición de ángulo en el plazo z , son exactamente iguales a las condiciones de módulo y ángulo aplicadas en el plano s y discutidas previamente en la sección 3.2. Esto se debe a que la ecuación característica en $s \rightarrow 1 + G(s)H(s) = 0$ y la ecuación característica en $z \rightarrow 1 + G(z)H(z) = 0$ son iguales, solo se ha efectuado la sustitución de la variable s por z . Esto permite obtener las siguientes conclusiones:

- Como se explicó anteriormente en en la sección 3.2, el lugar de la raíz es una calculadora gráfica que permite resolver la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$.

Para resolver esa ecuación característica se construye el lugar de la raíz utilizando un conjunto de reglas que son explicadas en la sección [3.3.0.1](#).

- Dado que ambas ecuaciones características, la del plano s y la del plano z , tienen la forma mostrada en la ecuación ([12.3](#)), entonces las mismas reglas que se utilizan para construir el lugar de la raíz en el plano s son válidas para obtener el lugar de la raíz de un sistema SISO en el plano z .
- Los dos puntos anteriores no permiten obtener otra conclusión interesante. Todo lo que se discutió anteriormente para mejorar o cambiar la condición de ángulo; por ejemplo, redes en adelante, redes en atraso, método de la bisectriz, compensación por cancelación, etc. son métodos válidos para diseñar compensadores en el plano z .

Como ya se discutió anteriormente, el principio del modelo interno es directamente aplicable a sistemas de control SISO en z . Esto significa que los polos en el plano z de la entrada al sistema de control, deben estar en el controlador (si es que no se encuentran en la planta), para asegurar cero error en estado estacionario

El método de Routh-Hurwitz no se basa en las reglas del lugar de la raíz y no es directamente aplicable en el plano z . Un equivalente a Routh Hurwitz en el plano z es el método de Jury. Alternativamente, una ecuación característica en z se puede transformar al plano s utilizando una transformada bilineal y luego se aplica el método de Routh.

La aplicación del método Routh-Hurwitz en el plano z se discute en la sección [12.1.6](#).

12.1.2. Redes de Atraso y Adelanto en el plano z

12.1.2.1. Malla en Adelanto en el plano z

Las redes en adelanto en el plano z tienen la topología que se muestra en la Fig. 12.2. Al igual que en el plano s las redes en adelanto entregan un valor de ángulo $\theta > 0$ en el punto de diseño; ver condición de ángulo en la ecuación (12.6).

$$\Sigma (\text{Ang. de los ceros en } z) - \Sigma (\text{Ang. de los polos en } z) = \pm 180^\circ \pm n \cdot 360^\circ \quad (12.6)$$

Las mallas en adelanto habitualmente se utilizan para mejorar las características dinámicas de un sistema y su función de transferencia se muestra en la ecuación (12.7). En algunos casos la malla puede también utilizar una ganancia K_{lead} que se puede utilizar para ajustar la condición de módulo.

$$G_{lead}(z) = K_{lead} \cdot \frac{(z - Z_{lead})}{(z - P_{lead})} \quad Z_{lead} > P_{lead} \quad (12.7)$$

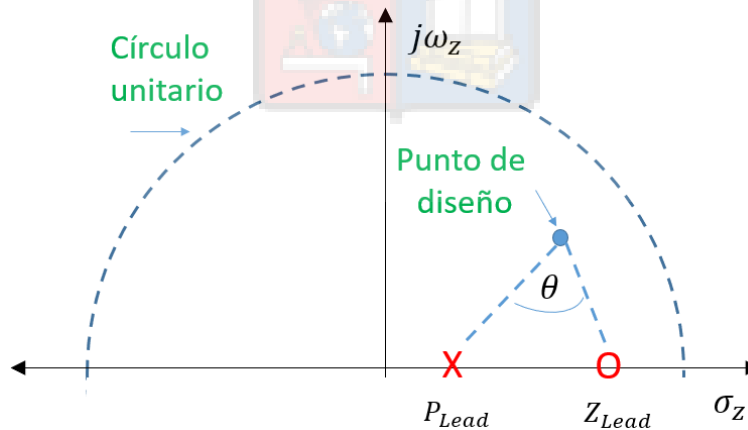


Figura 12.2: Malla en adelanto en el plano z .

12.1.2.2. Malla en Atraso en el plano z

Las redes en atraso en el plano z , tienen la topología que me muestra en la Fig. 12.3. Las mallas en atraso habitualmente se utilizan para mejorar el error en estado estacionario del sistema de control (un PI es una malla en atraso) o disminuir su dinámica. La ecuación de una malla en atraso en el plano z se muestra en (12.8).

$$G_{lead}(z) = K_{lag} \cdot \frac{(z - Z_{lag})}{(z - P_{lag})} \quad P_{lag} > Z_{lag} \quad (12.8)$$

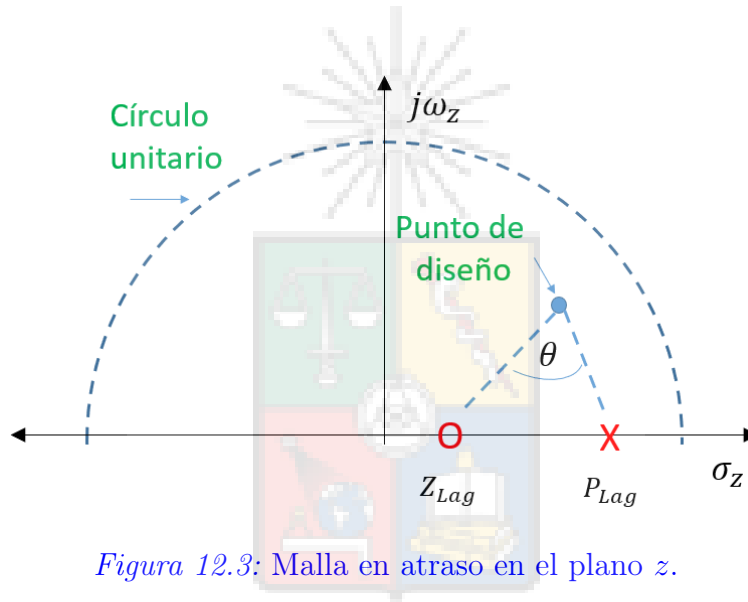


Figura 12.3: Malla en atraso en el plano z .

12.1.3. Representación de Retardos en z

En el plano z los retardos de transporte se representan utilizando la definición de z que es :

$$z = e^{sT} \quad (12.9)$$

Por lo tanto el retardo de una muestra, e^{-sT} es equivalente a z^{-1} . El retardo de una muestra añade un polo en el origen al sistema de control, tal como se muestra en la Fig. 12.4. Este polo en el origen cambia la condición de ángulo del sistema, con el consiguiente impacto en las características dinámicas de éste (es decir afecta los valores de ω_n , ζ , etc.).

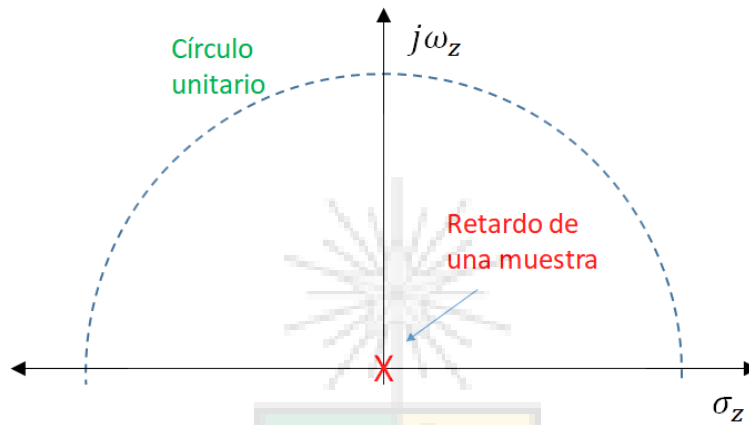


Figura 12.4: Representación del retardo de una muestra z^{-1} .

Suponiendo que el retardo T_d es n veces el tiempo de muestreo, entonces se puede representar como:

$$e^{-sT_d} = e^{-snT} = z^{-n} \quad (12.10)$$

El resultado es que se añaden n polos en el origen. Pero ¿que sucede si la razón T_d/T no es un número entero? En ese caso se puede aproximar al entero más cercano. Otra posibilidad más pesimista es utilizar siempre el entero mayor a la razón T_d/T ; Con una u otra alternativa, la representación z^{-n} se transforma en una aproximación. Sin embargo, como se discutió extensamente en la sección 8.4.1, la aproximación de Padé también es una aproximación al retardo.

Como ya se ha señalado anteriormente, los métodos de respuesta en frecuencia permiten representar los retardos en forma exacta.

12.1.4. Algoritmos Anti-windup en z

Como se discutió en la sección 8.1, los algoritmos anti-windup se utilizan para eliminar los problemas que se producen cuando la salida de los controladores se encuentran operando fuera de los rangos admitidos por el actuador.

En esta sección revisaremos dos algoritmos implementables en sistemas de control digital. Existen muchos otros.

12.1.4.1. Versión en z del Algoritmo de Anti-Windup para Controladores Bipropios Presentado en la Sección 8.2

En esta sección se utilizará la nomenclatura usada en la sección 8.2. La implementación de este controlador en el plano z es prácticamente una sustitución de la variable s por la variable z en la ecuación 8.6 y en las figuras 8.9 y 8.10.

Para este esquema anti-windup en z el controlador a implementar debe ser bipropio y no debe tener ni polos ni ceros fuera del círculo unitario. el controlador $K(z)$ se separa en dos componentes, como se muestra en la ecuación (12.11).

$$\begin{aligned} K(z) &= K_{\infty} + \bar{K}(z) \\ K_{\infty} &= \lim_{z \rightarrow \infty} K(z) \end{aligned} \tag{12.11}$$

El controlador, con anti-windup incluido, se implementa tal como se muestra en la Fig. 12.5. El saturador se implementa en el controlador, por software en el caso de control digital, y debe tener los mismos límites que el actuador físico.

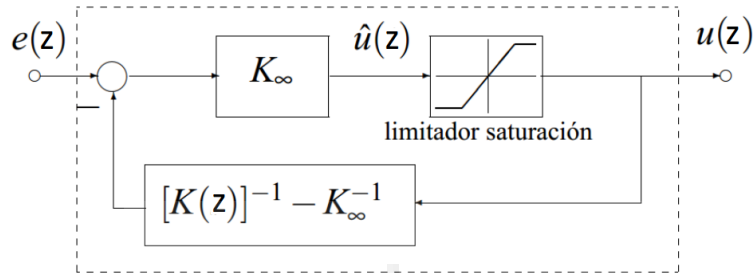


Figura 12.5: Implementación del algoritmo de anti-windup mostrado en la ecuación (12.11)

12.1.4.2. Implementación del algoritmo de la Fig. 12.5 para el caso de un PI Digital

Dado que el PI es ampliamente utilizado en aplicaciones de control SISO de máquinas y convertidores basados en electrónica de potencia, en esta sección se muestra el esquema de anti-windup de un PI digital basado en la implementación de la Fig. 12.5. La ecuación de un PI en el plano z se puede escribir como se muestra en (12.12).

$$PI(z) = K_{pz} \cdot \frac{(z - a)}{(z - 1)} \quad (12.12)$$

Donde el término $(z - 1)$ en el denominador, corresponde al integrador digital que asegura cero error en estado estacionario a entrada escalón. El término K_∞ se calcula como:

$$K_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[K_{pz} \cdot \frac{(z - a)}{(z - 1)} \right] = K_{pz} \quad (12.13)$$

Finalmente utilizando el diagrama de la Fig. 12.5 se llega a la implementación del esquema de anti-WindUp para un controlador PI que se muestra en la Fig. 12.6.

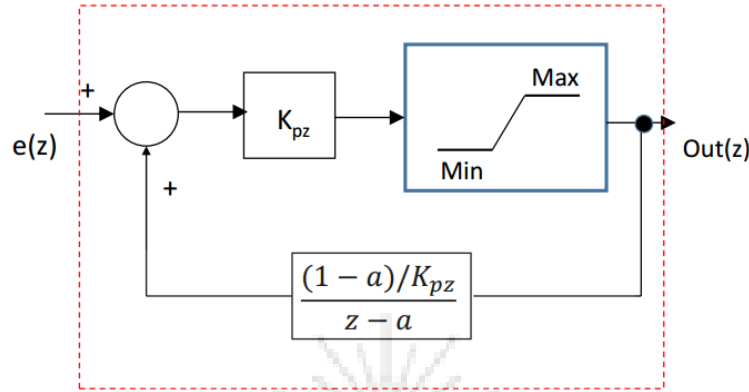


Figura 12.6: Implementación del algoritmo de anti-windup para el PI digital de la ecuación (12.13).

12.1.5. Implementación de un Algoritmo de Anti-WindUp por Programa

En algunas aplicaciones es más rápido y simple utilizar lenguaje C^{++} u otro, para implementar algoritmos de control (ver Fig. 12.7). Por ejemplo, en algunos programas de simulación como PLECS, utilizado para simular electrónica de potencia y máquinas eléctricas, y también al implementar controladores en algunas plataformas DSP (Digital Signal Processors) de Texas Instruments.

Un PI digital, se puede separar en dos partes, como se muestra en la ecuación (12.14).

$$\frac{u(z)}{e(z)} = K_p \cdot \frac{(z - a_z)}{z - 1} \Rightarrow \frac{u(z)}{e(z)} = K_{pz} + K_{iz} \cdot \frac{z}{z - 1} \quad (12.14)$$

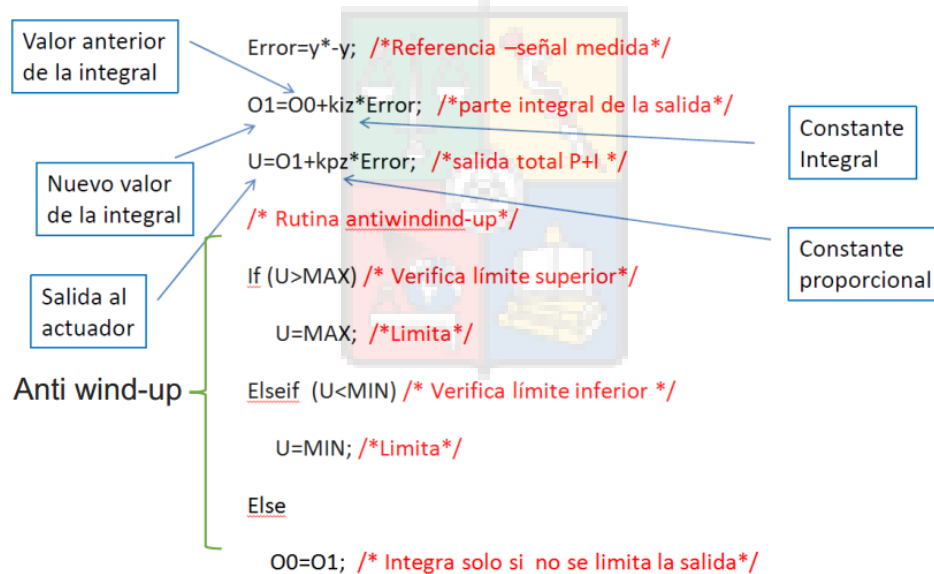
Donde $e(z)$ es el error, $u(z)$ la señal de salida del controlador, K_{pz} la constante

proporcional y K_{iz} la constante integral del controlador. Las constantes K_{pz} y K_{iz} pueden ser calculadas como se muestra en la ecuación (12.15).

$$\begin{aligned} K_{pz} &= K_p a_z \\ K_{iz} &= K_p (1 - a_z) \end{aligned} \quad (12.15)$$

Antes de implementar, es necesario encontrar la ecuación diferencia del término integral. Para esto se utiliza la función de transferencia $\frac{o(z)}{e(z)}$ que se muestra en la ecuación (12.16).

$$\frac{o(z)}{e(z)} = K_{iz} \cdot \frac{z}{z-1} \rightarrow o(k) = K_{iz}e(k) + o(k-1) \quad (12.16)$$



Este código se implementa en C++ u otro lenguaje de programación.

Figura 12.7: Algoritmo de anti-windup que utiliza una rutina de control implementada en un programa.

Donde $o(k)$ indica el valor de la salida en la muestra actual. En cada iteración el valor de la salida alcanzada en la iteración anterior ingresa como valor $o(k-1)$ para el nuevo calculo de la ecuación diferencia. Una sencilla rutina de control, mostrada en la Fig. 12.7, se utiliza para implementar la ecuación del PI digital separando la parte proporcional e integral. Nótese que la última línea realiza la integración al obligar que el valor de $o(k)$ de la presente iteración se transforme en el $o(k-1)$ de la próxima iteración.

La forma en que se implementa el anti-windup es sencilla. Cada vez que la salida del controlador está fuera de los límites del actuador, la instrucción $O_0 = O_1$ no se ejecuta. Esto significa que la integración no se realiza.

12.1.6. Método de Routh-Hurwitz Aplicado al Plano z

Para analizar la estabilidad de la ecuación característica en s se utiliza el criterio de Routh-Hurwitz pero este método no es directamente aplicable en el plano z .

Para aplicar el criterio de Routh se debe primero reemplazar el operador z utilizando una transformada w modificada. Esta se define como se muestra en (12.17).

$$z = \frac{w + 1}{w - 1} \quad (12.17)$$

Se le llama w modificada para evitar confusión con otra transformada w que habitualmente se usa para diseñar en frecuencia. Esta se discutirá en la parte del curso en que se considera diseño en frecuencia.

Considerando $w = \sigma + j\omega$ se puede demostrar que cuando $|z| < 1$ es equivalente

a $\sigma < 0$. Utilizando (12.17) se puede calcular z como se muestra en (12.18).

$$|z| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = \left| \frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1} \right| < 1 \quad (12.18)$$

Lo que lleva a (12.19),

$$\frac{(\sigma+1)^2 + \omega^2}{(\sigma-1)^2 + \omega^2} < 1 \quad (12.19)$$

Desarrollando (12.19) se llega a (12.20).

$$(\sigma+1)^2 + \omega^2 < (\sigma-1)^2 + \omega^2 \Rightarrow \sigma < 0 \quad (12.20)$$

Por lo tanto, el interior del círculo unitario, es decir $|z| < 1$, corresponde al semiplano izquierdo del plano w . El círculo unitario en el plano z corresponde al eje imaginario en el plano w , y la parte externa del círculo unitario corresponde a la parte derecha del plano w .

En el análisis de estabilidad, utilizando la transformada w modificada, se debe remplazar z por $z = (w+1)/(w-1)$ en la ecuación característica de (12.21), obteniéndose (12.22).

$$1 + G(z)H(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (12.21)$$

$$a_0 \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^n + a_1 \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \frac{w+1}{w-1} + a_n = 0 \quad (12.22)$$

simplificando la ecuación (12.22) se llega a (12.23).

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_{n-1} w + b_n = 0 \quad (12.23)$$

Finalmente, se le aplica el criterio de Roth-Hurwitz a la ecuación (12.23) y se puede realizar el análisis de estabilidad.

12.1.6.1. Ejemplo de Aplicación de Routh-Hurwitz al Plano z

En un sistema de control digital con realimentación unitaria (ver por ejemplo Fig. 10.17), se tiene la siguiente planta conectada a la salida del retenedor de orden cero:

$$G_p(s) = \frac{10}{s - 5} \quad (12.24)$$

Se debe diseñar, en forma exacta en z , un sistema de control para operar con cero error en estado estacionario a entrada escalón, frecuencia natural $\omega_n = 30\text{rad/seg.}$, $\omega_s = 20\omega_n$ y coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.8$. Para el controlador diseñado encuentre el rango de variación de ganancia que permite un sistema estable.

Dado que en este ejemplo se busca mostrar la aplicación del método de Routh-Hurwitz aplicado al plano z , se efectuará el diseño utilizando la herramienta Rltool de Matlab. El tiempo de muestreo corresponde a $T = 2\pi/(20\omega_n) = 0.01047s$.

La transformada z de la planta de (12.24) más el retenedor de orden cero, se encuentra utilizando la instrucción `c2dm` con la opción '`zoh`' tal como se muestra en

la ecuación (12.25)

$$[Numd, Den] = c2dm(10, [1 \quad -5], T, 'zoh') \quad (12.25)$$

Utilizando la ecuación (12.25), la transformada z de la planta y retenedor es igual a:

$$G_p(z) = \frac{0.1075}{(z - 1.054)} \quad (12.26)$$

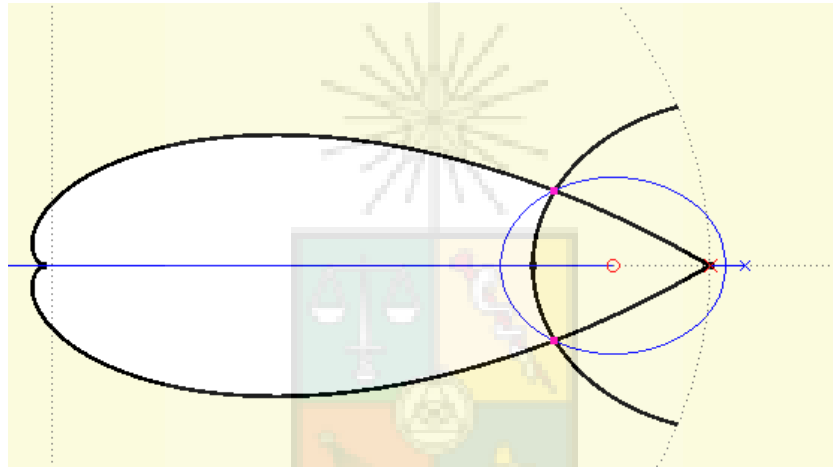


Figura 12.8: Lugar de la raíz correspondiente al sistema de la ecuación (12.26) más un controlador PI digital. La línea de coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.8$ más la curva de frecuencia natural $\omega_n = 30\text{rad/seg.}$ se muestran en la figura.

Uno de los posibles controladores que cumplen con las especificaciones de lazo cerrado es un PI digital. La función de transferencia obtenida, que cumple con las especificaciones, se muestra en la ecuación (12.27).

$$PI(z) = 4.9 \frac{(z - 0.853)}{(z - 1)} \quad (12.27)$$

En este caso la planta de (12.26) es inestable a lazo abierto y existen valores de

ganancia máxima/mínima que permiten estabilidad asintótica a lazo cerrado. Para utilizar el criterio de Routh-Hurwitz modificado a z , se debe encontrar la ecuación característica como:

$$1 + G_p(z)G_c(z) = 1 + k_p \frac{(z - 0.853)}{(z - 1)} \cdot \frac{0.1075}{(z - 1.054)} = 0 \quad (12.28)$$

donde k_p es la ganancia crítica del controlador. La función anterior puede escribirse como:

$$1 + G_p(z)G_c(z) = 0 \rightarrow z^2 - 2.054z + 1.054 + 0.1075k_p(z - 0.853) = 0 \quad (12.29)$$

Reagrupando términos semejantes en (12.29) se llega a:

$$1 + G_p(z)G_c(z) = 0 \rightarrow z^2 + (0.1075k_p - 2.054)z + (1.054 - 0.091757k_p) = 0 \quad (12.30)$$

Se realiza la sustitución de z por $(w + 1)/(w - 1)$, obteniéndose:

$$1 + G_p(z)G_c(z) = 0 \rightarrow \left[\frac{w + 1}{w - 1} \right]^2 + (0.1075k_p - 2.054) \left[\frac{w + 1}{w - 1} \right] + (1.054 - 0.091757k_p) = 0 \quad (12.31)$$

Con bastante trabajo algebraico, La ecuación característica en w de (12.31) puede ser simplificada a:

$$k_p \cdot w^2 + (11.6054k_p - 6.83) \cdot w + (259.79 - 12.6054k_p) = 0 \quad (12.32)$$

La aplicación del criterio de Routh, indica que todos los coeficientes de la ecuación

característica de (12.32) deben ser positivos, por lo tanto se debe cumplir con lo que se establece en las ecuaciones (12.33) y (12.34).

$$11.6054k_p - 6.83 > 0 \Rightarrow k_p > 0.5885 \quad (12.33)$$

$$259.79 - 12.6054k_p > 0 \Rightarrow k_p < 20.61 \quad (12.34)$$

Las áreas en que se produce la inestabilidad del sistema se muestran en la Fig. 12.9

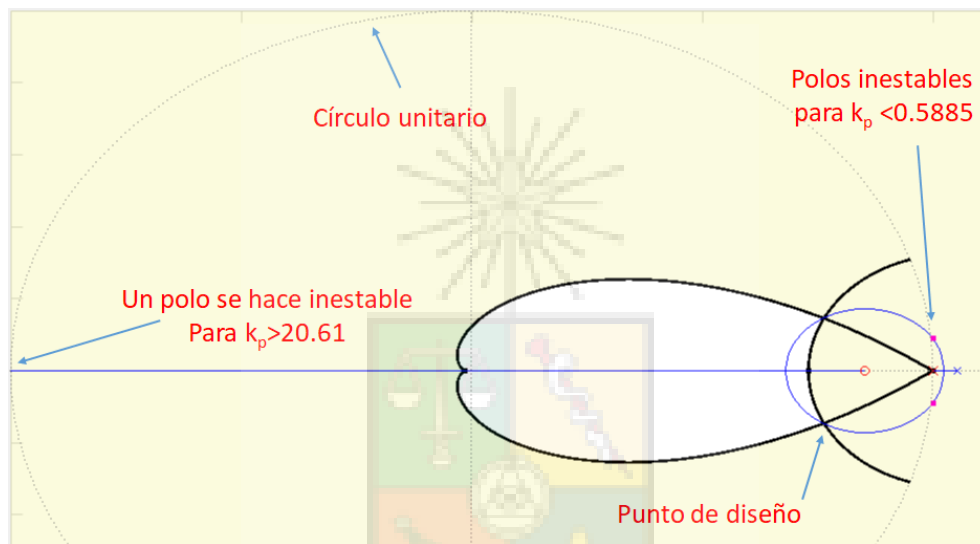


Figura 12.9: Lugar de la raíz correspondiente al sistema de la ecuación (12.26) más un controlador PI digital. Para $k_p < 0.589$ existen polos fuera del círculo unitario en el lado derecho de la figura. Para $k > 20.61$ existe un polo que sale del círculo unitario por la izquierda de la figura.

Uno de los problemas que tiene esta metodología, es la cantidad de procesamiento algebraico requerido, debido a las sustitución de z por $(w + 1)/(w - 1)$. En algunos textos, por ejemplo en el K. Ogata de Control Discreto se recomienda utilizar el método de Jury, el cual es directamente aplicable a la ecuación característica en z . Sin embargo, este método también tiene bastante procesamiento involucrado y para aquellos que ya dominamos Routh-Hurwitz, la aplicación de éste al plano z es conceptualmente simple y fácil de entender aunque laborioso de aplicar.

12.1.7. Ejemplo de compensación en el Plano z Utilizando el Método de Evans

La figura 12.10 muestra un sistema de control SISO que debe diseñarse para cero error en estado estacionario a entrada escalón $\omega_n=40$ rad/seg. y coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.8$. El controlador debe implementarse en el plano z y debe ser diseñado en forma exacta considerando $\omega_s = 10\omega_n$. El diseño se debe realizar utilizando una calculadora científica y sin utilizar herramientas del control toolbox de Matlab.

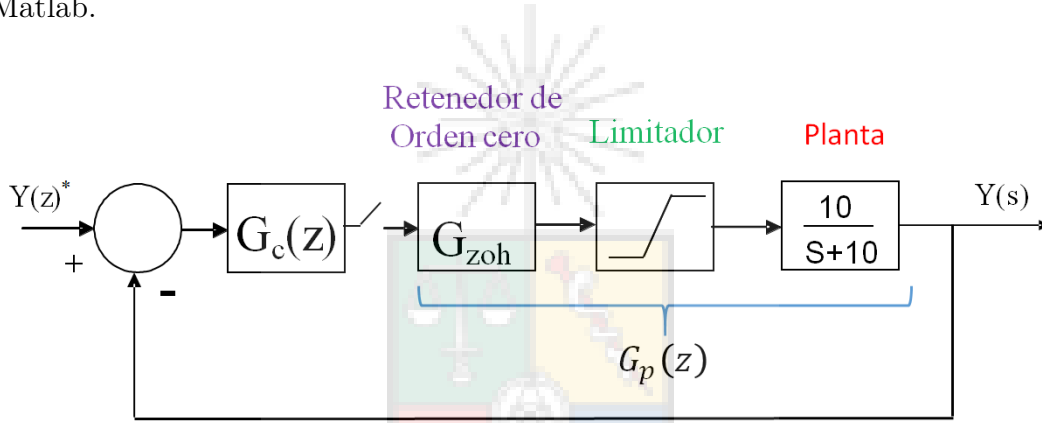


Figura 12.10: Sistema de control SISO en el plano z con realimentación unitaria.

Para efectuar diseño exacto en el plano z se debe primero encontrar la planta $G_p(z)$ en la Fig. 12.10. En condiciones normales el limitador no interfiere con el diseño y tiene ganancia unitaria. El tiempo de muestreo se calcula como $T = 2\pi/400 \approx 15.71ms$. Utilizando la transformada z de una planta más un retenedor de orden cero discutida en la sección 10.2.0.4, se obtiene la planta de (12.35),

$$G_p(z) = Z \left[\frac{(1 - e^{-sT})}{s} \cdot \frac{a}{(s + a)} \right] = \left[\frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} \right] = \frac{0.1454}{z - 0.8546} \quad (12.35)$$

El punto de diseño en el plano s debe transformarse al plano z utilizando $z = e^{sT}$. El punto de diseño en el plano s se puede escribir como $s = -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$. Con un poco de trabajo algebraico y utilizando la identidad de Euler, se llega a que el punto de diseño en z es igual a:

$$z = e^{-\omega_n \zeta T} \left[\cos(\omega_n \cdot T \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}) \pm j \cdot \sin(\omega_n \cdot T \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}) \right] \quad (12.36)$$

Considerando (12.36) se llega a que el punto de diseño en z es igual a $z = 0.562 \pm j0.2228$. La Fig. 12.11 se utiliza para realizar el diseño del sistema de control.

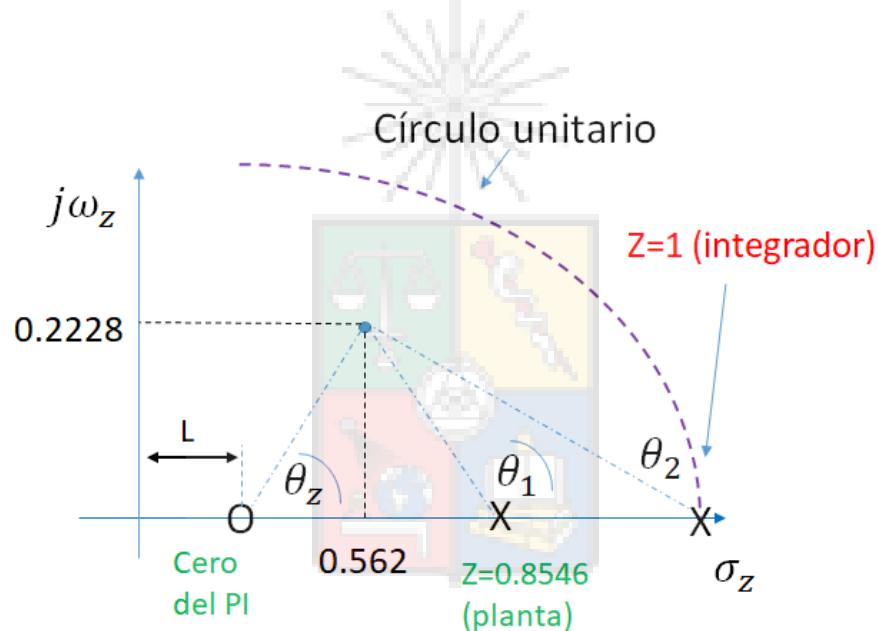


Figura 12.11: Diseño en el plano z utilizando la condición de módulo y ángulo. El cero del $PI(z)$ debe ser ubicado para cumplir con la condición ángulo en el punto de diseño.

Dado que se requiere cero error en estado estacionario, se agrega un polo en $z = 1$ para cumplir con el principio del modelo interno. Para encontrar la posición del cero

del PI digital, se utiliza la condición de ángulo tal como se muestra en la ecuación (12.37).

$$\theta_z - \theta_1 - \theta_2 = \pm 180^\circ \quad (12.37)$$

Los valores de θ_1 y θ_2 pueden ser calculados desde la Fig. 12.11, como se muestra en la ecuación (12.38).

$$\theta_z - [180^\circ - \text{atan}(0.2228/(0.8546 - 0.562))] - [180^\circ - \text{atan}(0.2228/(1 - 0.562))] = \pm 180^\circ \quad (12.38)$$

Remplazando valores se llega a que $\theta_1 = 142.7^\circ$, $\theta_2 = 153.04^\circ$ y el ángulo $\theta_z = 115.75^\circ$. Dado que $\theta_z > 90^\circ$, el cero del PI digital se encuentra a la derecha del punto de diseño en el eje σ_z (ver la Fig. 12.11). Por lo tanto la posición del cero se encuentra solucionando la ecuación (12.39).

$$115.75 = [180^\circ - \text{atan}(0.2228/(L - 0.562))] \quad (12.39)$$

con un poco de trabajo matemático se encuentra que el cero está ubicado en $z=0.669$. La ganancia del sistema controlador-planta se encuentra aplicando la condición de ángulo que establece que la ganancia del sistema es igual a:

$$K_{\text{sistema}} = \frac{\prod (\text{distancia del punto a los polos})}{\prod (\text{distancia del punto a los ceros})} \quad (12.40)$$

La cual en este caso se aplicaría como se muestra en la ecuación (12.41).

$$0.1454 \cdot K = \frac{\sqrt{0.2228^2 + 0.302^2} \cdot \sqrt{0.2228^2 + 0.438^2}}{\sqrt{0.2228^2 + 0.107^2}} \quad (12.41)$$

donde el valor de la ganancia del controlador es de $K = 5.13$. Finalmente el

controlador que cumple con las especificaciones es mostrado en la ecuación (12.42).

$$G_c(z) = 5.13 \frac{(z - 0.669)}{(z - 1)} \quad (12.42)$$

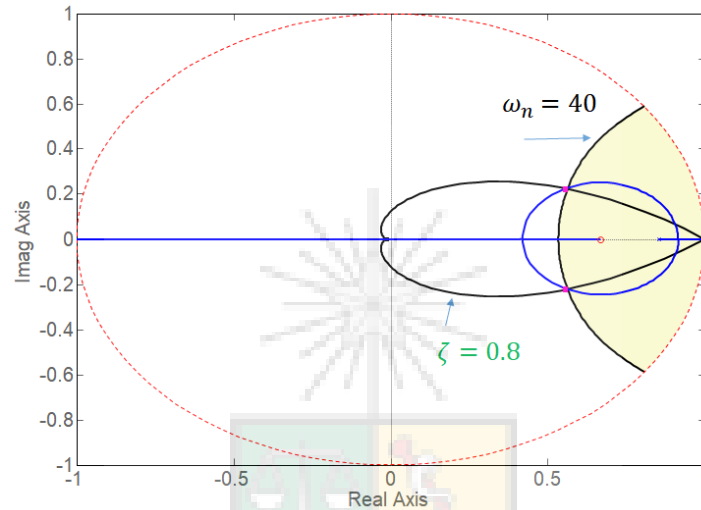


Figura 12.12: Lugar de la raíz en el plano z correspondiente al sistema discutido en esta sección.

El lugar de la raíz correspondiente al sistema controlador y planta, se muestra en la Fig. 12.12. Este lugar de la raíz se ha obtenido utilizando la herramienta RLTOOL de Matlab para verificar el diseño (no para diseñar). Se puede concluir que los polos de lazo cerrado se encuentran en el punto especificado.

Finalmente, la simulación del sistema de control SISO se realiza utilizando Matlab. Los resultados se encuentran en la Fig. 12.13. Esta es una simulación en el plano z , por lo tanto la salida de la planta también es escalonada.

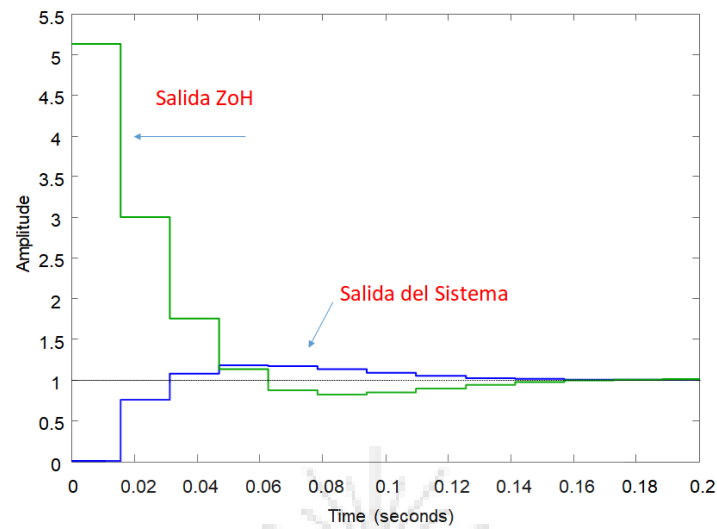


Figura 12.13: Respuesta del sistema de control considerando una entrada escalón unitario. Este es un sistema en z , por eso la salida de la planta también es escalonada.

12.1.8. Problema del Primer Examen 2021

Se tiene el sistema de control, basado en un controlador proporcional, que se muestra en Fig. 12.14. El sistema tiene un período de muestreo de $T=1\text{ms}$.

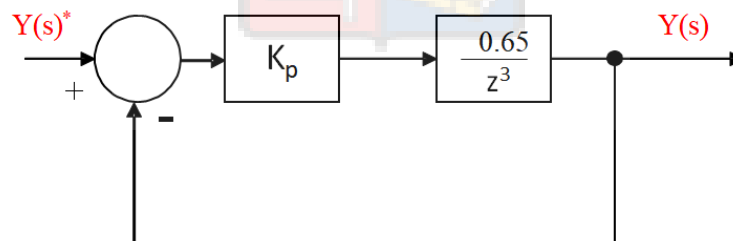


Figura 12.14: Sistema de control en que la planta tiene tres retardos.

Utilizando las condiciones de módulo y ángulo del lugar de la raíz en el plano z ,

se pide:

- Encuentre el valor de K_p que produce un sistema inestable. (5 puntos)
- Ajuste la ganancia K_p hasta que el coeficiente de amortiguamiento de los polos dominantes sea de $\zeta = 0.707$. Encuentre el valor de la ganancia K_p y de la frecuencia natural del sistema en ese punto. (10 puntos)
- Además de los polos dominantes, existe un polo de lazo cerrado adicional. Encuentre su ubicación, su frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento. (10 puntos)

Este es el típico problema conceptual, bastante fácil y que pocos alumnos logran realizar. La principal dificultad fue que los alumnos intentaban calcular el valor de ζ y ω_n directamente desde el plano z , en vez de llevar los puntos desde z al plano s . Eso indica una falta de entendimiento de como se opera matemáticamente en el plano z .

Antes de seguir con este problema, asegúrese de que entiende bien los tópicos discutidos en la sección [10.5](#)

12.1.8.1. Resolución primera parte

Como se señaló anteriormente, las reglas del lugar de la raíz en z son iguales a las que se utilizan en el plano s . Estas reglas se discuten en la sección [3.3.0.1](#) de este apunte.

El lugar de la raíz correspondiente al sistema de control de la Fig. [12.14](#) se muestra

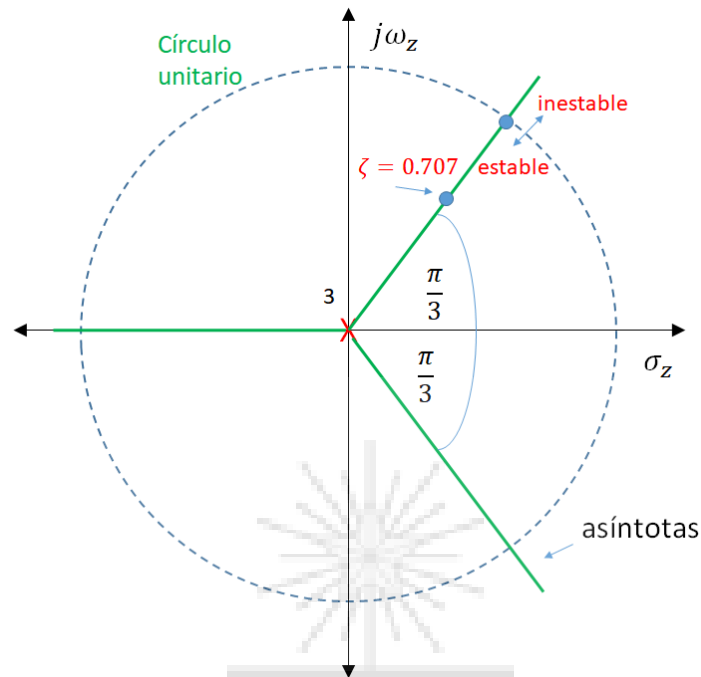


Figura 12.15: Lugar de la raíz correspondiente al sistema de control de la Fig. 12.14.

en la Fig. 12.15. El sistema tiene tres polos en el origen, no existen ceros y por lo tanto existen tres asíntotas con ángulos 60° , -60° y 180° . Utilizando la ecuación (12.40) se tiene que la ganancia crítica se puede calcular como:

$$K_{\text{sistema}} = \frac{\Pi(\text{ distancia del punto a los polos })}{1} \Rightarrow 0.65 \cdot K_p = 1 \quad K_p = 1.538 \quad (12.43)$$

Este cálculo es posible debido a que los polos se encuentran en el origen del plano z y el círculo es de radio 1.

12.1.8.2. Resolución segunda parte

En este problema solo puede existir lugar de la raíz en puntos que se encuentran en las asíntotas, ya que solo éstos son los que cumplen con la condición de ángulo. Esto se debe a que los tres polos están ubicados en la misma posición.

Se asume que para la primera asíntota, existe un punto a una distancia r del origen, donde se cumple que el coeficiente de amortiguamiento es igual a $\zeta = 0.707$. Utilizando la ecuación (10.32) y considerando que el ángulo θ es $\frac{\pi}{3}$ se llega a:

$$z = r \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \rightarrow s = \frac{1}{T} \ln(r \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}) = \frac{1}{T} \cdot \ln(r) + j\frac{\pi}{3T} \quad (12.44)$$

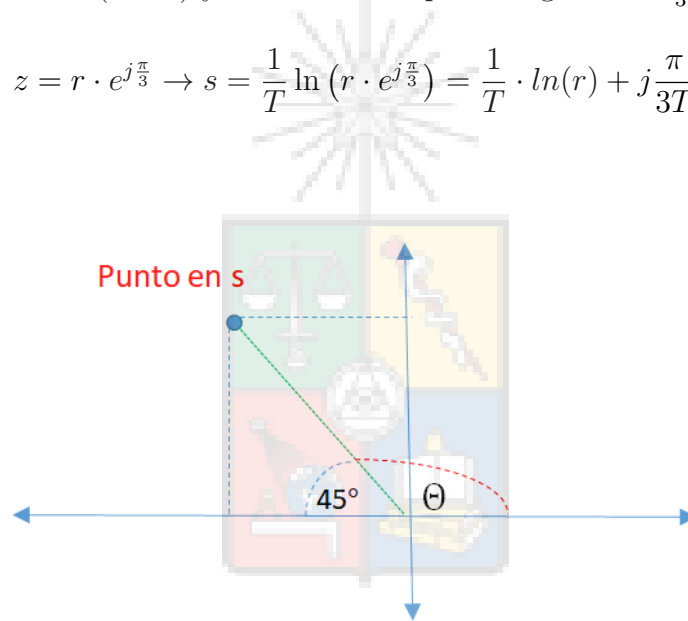


Figura 12.16: Punto de diseño en s donde se desea obtener $\zeta = 0.707$.

Utilizando la Fig. 12.16, se puede concluir que para lograr un coeficiente de amortiguamiento igual $\zeta = 0.707$ (equivalente a un ángulo de 45°) se debe cumplir con:

$$135^\circ = \text{atan2} \left[\frac{\pi}{3 \cdot \ln(r)} \right] \quad (12.45)$$

Donde el ángulo de 135° corresponde a θ en la Fig. 12.16 (recuerde que se debe utilizar arcotangente de cuatro cuadrantes). Resolviendo la ecuación (12.45), se encuentra $r \approx 0.351$. La frecuencia natural se calcula utilizando (10.34), la cual se repite por simplicidad en (12.46). Utilizando esta expresión se llega a $\omega_n = 1480 \text{ rad/seg}$.

$$\omega_n = \sqrt{\sigma_a^2 + \omega_a^2} = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2(r) + \theta^2} = f_s \cdot \sqrt{\ln^2(r) + \theta^2} \quad (12.46)$$

La ganancia del sistema para obtener $\zeta = 0.707$ en los polos dominantes, se calcula utilizando la ecuación (12.47). Dada la ausencia de ceros, el denominador de la ecuación (12.47) es igual a uno.

$$K_{\text{sistema}} = \frac{\Pi(\text{distancia del punto a los polos})}{1} \Rightarrow 0.65 \cdot K_p = 0.351 \cdot 0.351 \cdot 0.351 \quad (12.47)$$

Resolviendo (12.47) se llega a $K_p = 0.06652$.

12.1.8.3. Resolución Tercera parte

Parte del lugar de la raíz correspondiente a la resolución de la segunda parte del problema se muestra en la Fig. 12.17. Como ya sabemos y discutimos extensamente con anterioridad, el número de polos de lazo cerrado es igual al número de polos de lazo abierto. El lugar de la raíz se obtuvo utilizando la herramienta RLTOOL de Matlab; sin embargo, conociendo las asíntotas, no es estrictamente necesario utilizar

Matlab para resolver el problema.

Dada la topología del sistema, el tercer polo de lazo cerrado se encuentra en la posición $z = -0.351 + j0$, donde 0.351 corresponde al valor de r calculado utilizando la ecuación (12.45).

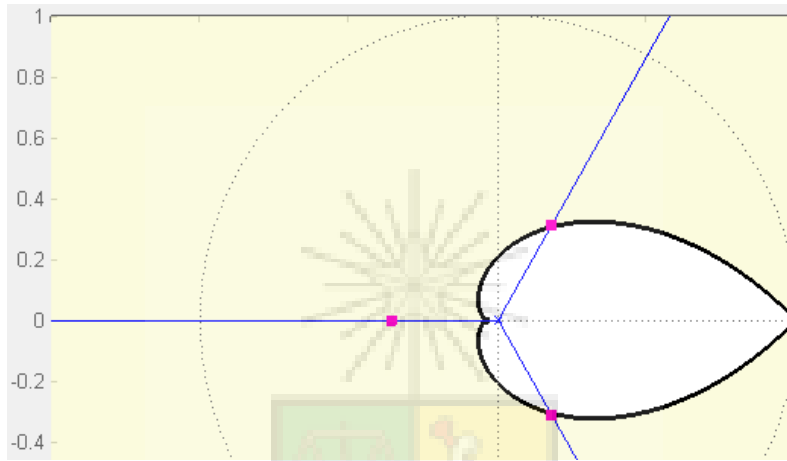


Figura 12.17: Lugar de la raíz mostrando la posición de los tres polos cuando los polos dominantes tienen un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.707$

Utilizando la ecuación (12.48) se transforma el punto desde z a s como:

$$z = -0.351 \pm j0 = 0.351e^{\pm j\pi} \rightarrow s = \frac{1}{T} \ln(0.351 \cdot e^{\pm j\pi}) = \frac{1}{T} \ln(0.351) \pm j \frac{\pi}{T} \quad (12.48)$$

Por lo tanto para el punto $z = -0.351$ y considerando $T = 1ms$, el correspondiente punto en el plano s es $-1046.96 \pm j3141.592$. Utilizando esta coordenada s , la frecuencia natural es fácilmente calculada como $\omega_n = 3311.46rad/seg$. El coeficiente de amortiguamiento es $\zeta = 0.316$.

12.1.9. Primer Problema Segundo Control 2021

En el diagrama de control en el plano z que se muestra en la Fig. 12.18 se tienen las siguientes características. (45/100 puntos)

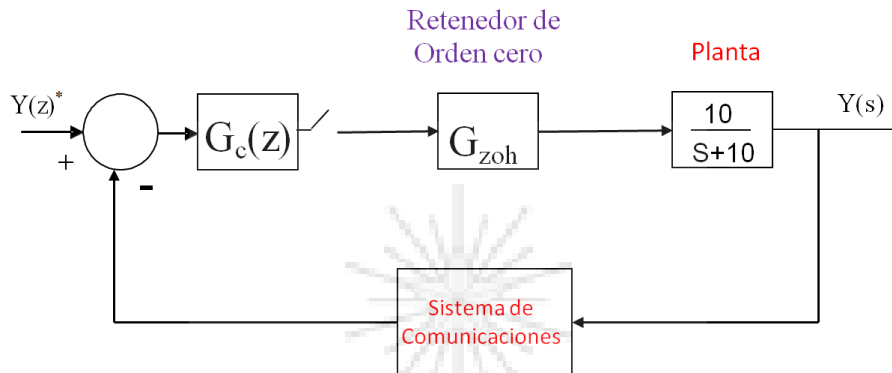


Figura 12.18: Diagrama de control digital en z correspondiente al segundo control de 2021.

El lazo de realimentación utiliza un sistema de comunicaciones el cual es muy rápido y tiene una función de transferencia $H(s) \approx 1$ en condiciones normales. Se debe diseñar un controlador para cero error en estado estacionario, entrada escalón, frecuencia natural de 60rad/seg, $\zeta = 0.707$. La frecuencia de muestreo debe ser de 25 veces la frecuencia natural. Se debe utilizar el diseño exacto en z .

Se pide:

- 1) Utilizando lugar de la raíz y los criterios de módulo y ángulo, diseñe un sistema de control que cumpla con las condiciones de diseño. (10 puntos)
- 2) Un ingeniero no queda conforme con el desempeño del controlador y comienza a manipular la ganancia hasta que el sistema comienza a

oscilar ostensiblemente ya que una de las raíces alcanzó un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.12$. Utilizando lugar de la raíz y las condiciones de módulo y ángulo, encuentre el valor de ganancia a la que se ajustó el controlador. (10 puntos)

- 3) Se despide al ingeniero y se retorna la ganancia al valor original. Sin embargo nuevos problemas se producen ya que por un mal diseño del sistema de comunicaciones se producen, dependiendo del tráfico de datos, una o dos muestras de retardo en la realimentación.

Si es que es posible, rediseñe el sistema de control encontrando mallas de adelanto y/o atraso que pudieran ser utilizadas en cascada con el controlador obtenido en 1) para tener el sistema operando de acuerdo a las especificaciones originales cuando existen dos muestras de retardo en el sistema de comunicaciones.

Utilice el lugar de la raíz y las condiciones de módulo y ángulo en su desarrollo. (15 puntos)

- 4) Para el diseño de c) y considerando dos muestras de retardo. ¿cuál es la frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento del polo de lazo cerrado más rápido? (10 puntos) (la primera parte se entrega a las 14:30 horas)

Recuerde: No se aceptan respuestas sin el desarrollo adecuado. En cada caso la respuesta debe ir acompañada de diagramas y ecuaciones apropiadas. No se aceptan solo resultados, aunque éstos estén correctos.

12.1.9.1. Resolución Primera Parte

Problemas similares a éste se vieron en clases. La solución es simple y se debe aplicar la transformada z al conjunto retentor planta. El tiempo de muestreo se

calcula como se muestra en la ecuación (12.49)

$$T_s = \frac{2\pi}{25\omega_n} = 0.0041888\text{seg} \quad (12.49)$$

La transformada z del conjunto retentor planta se encuentra utilizando fracciones parciales y es igual a la ecuación (12.50)

$$G_p(z) = Z \left[\left(\frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \right) \left(\frac{10}{s + 10} \right) \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{10}{s(s + 10)} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 10} \right] \quad (12.50)$$

finalmente con algo de trabajo matemático se llega a la ecuación (12.51).

$$G_p(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-10T_s}} \right] = \frac{1 - e^{-10T_s}}{z - e^{-10T_s}} = \frac{0.041023}{z - 0.95898} \quad (12.51)$$

Para encontrar el punto de diseño en el plano z , se debe transformar este punto de s a z . El punto de diseño se muestra en la ecuación (12.52).

$$z = e^{sT_s} = e^{-60(0.707 \pm j0.707)T_s} = 0.82402 \pm j0.14798 \quad (12.52)$$

Para cumplir con las condiciones de diseño, se propone el uso de un PI en el plano z (otras alternativas también son factibles y serán evaluadas). Los polos y ceros de lazo abierto, considerando la planta, el integrador y el cero del controlador se muestran en la Fig. 12.19.

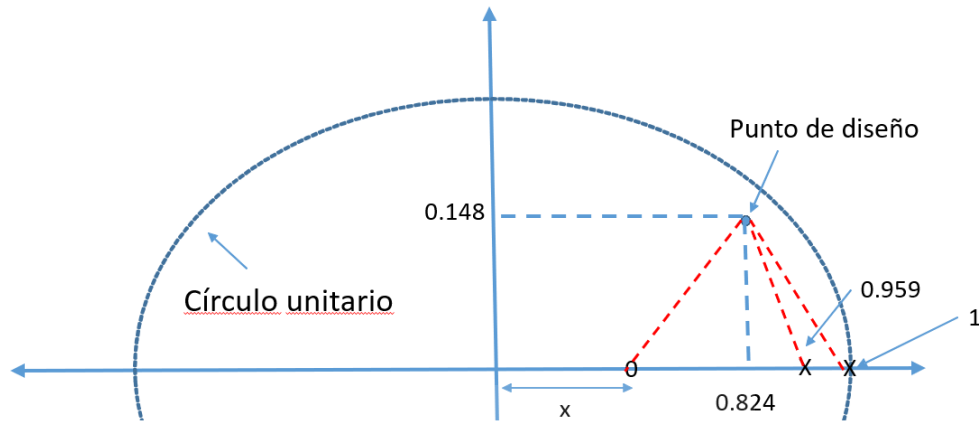


Figura 12.19: Planteamiento del problema requerido para calcular la posición del cero del PI digital.

La ecuación (12.53) plantea la condición de ángulo como:

$$\pi - \text{atan}\left(\frac{0.148}{1 - 0.824}\right) + \pi - \text{atan}\left(\frac{0.148}{0.959 - 0.824}\right) - \text{atan}\left(\frac{0.148}{0.824 - x}\right) = \pi \quad (12.53)$$

Finalmente, con un poco de pirotecnia matemática, y utilizando más decimales en el cálculo se llega a la ecuación (12.54)

$$\frac{0.148}{0.824 - x} = \tan(-1.611) = 24.843 \quad (12.54)$$

La posición del cero del PI digital es $x = 0.81806$. El valor de la ganancia se encuentra utilizando la condición de módulo expresada en la ecuación (12.55).

$$0.041023K_c = \frac{\prod(\text{dist a los polos})}{\prod(\text{dist a los ceros})} = \frac{0.22993 \times 0.20028}{0.1481} \quad (12.55)$$

La ganancia del controlador es $K_c = 7.598$. La ecuación (12.56) muestra el controlador a utilizar para cumplir con las especificaciones.

$$G_p(z) = 7.598 \frac{(z - 0.81806)}{(z - 1)} \quad (12.56)$$

12.1.9.2. Resolución de la segunda parte

Esta parte del problema es más conceptual. El sistema de control anterior tiene el lugar de la raíz mostrado en la Fig. 12.20. Utilizando la transformada de z a s se llega a la ecuación (12.57).

$$-\sigma_a \pm j\omega_a = \frac{1}{T_s} \ln(-\sigma_z) = \frac{1}{T_s} (\ln(|\sigma_z|) \pm j\pi) \quad (12.57)$$

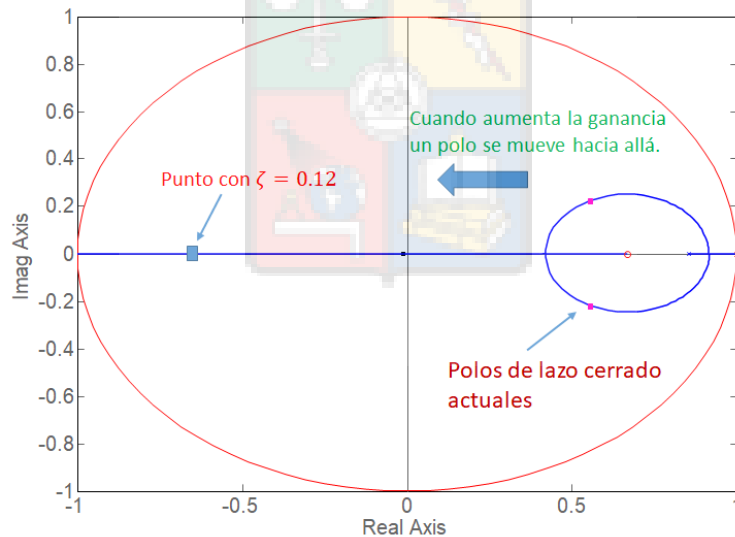


Figura 12.20: Lugar de la raíz considerando que se aumenta la ganancia y uno de los polos queda con un polo que tiene un coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.12$

El coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.12$ equivale a un ángulo de 83.108°

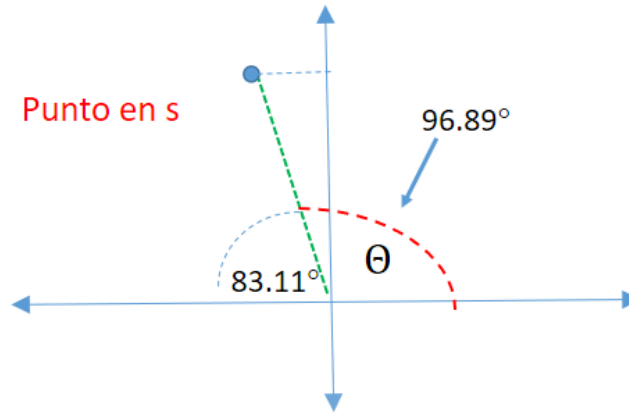


Figura 12.21: Diagrama utilizado para el cálculo de la posición de σ_z

en el segundo cuadrante (ver Fig.12.21). Por lo tanto la ecuación (12.58) se utiliza para calcular la posición de σ_z .

$$96.89^\circ = \text{atan2} \left[\frac{\pi}{\ln(\sigma_z)} \right] \quad (12.58)$$

Despejando el valor de σ_z se llega a $\sigma_z = -0.68404$. En conclusión, cuando el ingeniero mueve la ganancia, uno de los polos de lazo cerrado se mueve al punto -0.68404 , semiplano izquierdo del plano z , todavía al interior del círculo unitario.

Para encontrar la ganancia utilizada, se aplica la condición de módulo del método de Evans tal como se muestra en la ecuación (12.59).

$$0.041023K_c = \frac{\prod(\text{dist a los polos})}{\prod(\text{dist a los ceros})} = \frac{1.68404 \times 1.643}{1.5021} \quad (12.59)$$

Con lo cual se llega a $K_c = 44.902$ (aproximadamente).

12.1.9.3. Resolución Tercera Parte

Esto también es simple de resolver. Dos muestras de retardo en el plano z son equivalentes a utilizar en el lazo de realimentación un término z^{-2} , los que se representan como dos polos en el origen, es decir en el punto $z = 0 + j0$. La Fig. 12.22 muestra los polos y ceros del sistema, incluyendo el retardo de una muestra. Al agregarse los dos polos se debe incluir un ángulo 2θ en la sumatoria de los ángulos de los polos de la ecuación (12.53).

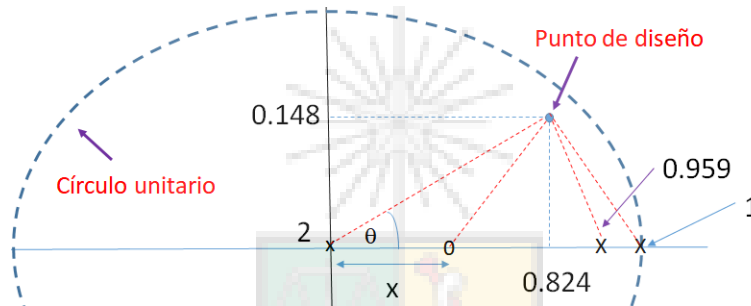


Figura 12.22: Diagrama utilizado para el cálculo de la posición del cero del controlador PI digital

La nueva condición de ángulo requerida para calcular la posición del cero del controlador, se muestra en la ecuación (12.60)

$$2 \operatorname{atan} \left(\frac{0.148}{0.824} \right) + \pi - \operatorname{atan} \left(\frac{0.148}{1 - 0.824} \right) + \pi - \operatorname{atan} \left(\frac{0.148}{0.959 - 0.824} \right) - \operatorname{atan} \left(\frac{0.148}{0.824 - x} \right) = \pi \quad (12.60)$$

simplificando se llega a la ecuación (12.61);

$$\operatorname{atan} \left(\frac{0.148}{0.824 - x} \right) = 1.9665 \rightarrow \frac{0.148}{0.824 - x} = -2.3936 \rightarrow x = 0.824 + \frac{0.148}{2.3936} = 0.88583 \quad (12.61)$$

La posición del cero es $\sigma_z = 0.885833$. Para obtener la ganancia del controlador, nuevamente se debe utilizar la condición de módulo, como:

$$0.041023K_c = \frac{\prod(\text{dist a los polos})}{\prod(\text{dist a los ceros})} = \frac{0.22993 \times 0.20028 \times 0.83719^2}{0.1604} \quad (12.62)$$

Despejando el valor de K_c desde la ecuación (12.62), se llega a $K_c = 4.8984$. Asumiendo que el controlador de la ecuación (12.56) no se puede modificar, entonces el controlador para dos muestras de retardo es el de la ecuación (12.63).

$$G(z) = 4.8984 \frac{(z - 0.88)}{(z - 1)} = 7.598 \frac{(z - 0.81806)}{(z - 1)} \times 0.64469 \frac{(z - 0.88)}{(z - 0.81806)} \quad (12.63)$$

Donde el término $0.64469 \frac{(z-0.88)}{(z-0.81806)}$ es la red de adelanto necesaria para compensar los efectos de las dos muestras de retardo en el sistema de comunicaciones. Nótese que en este caso se utiliza compensación por cancelación, la cual es una de las opciones más simple.

Como se ha señalado varias veces en esta asignatura, los controladores no son únicos, pero deben funcionar y ser simples. Por lo tanto, otras opciones de mallas de compensación también son válidas y serán evaluadas de acuerdo a mérito.

12.1.9.4. Resolución Cuarta Parte

Este punto también es más conceptual. La función de lazo abierto $G(z)H(z)$ tiene cuatro polos y un cero, por lo tanto existen tres asíntotas, ubicadas en $\pm 60^\circ$ y 180° . El lugar de la raíz resultante se muestra en la Fig. 12.23.

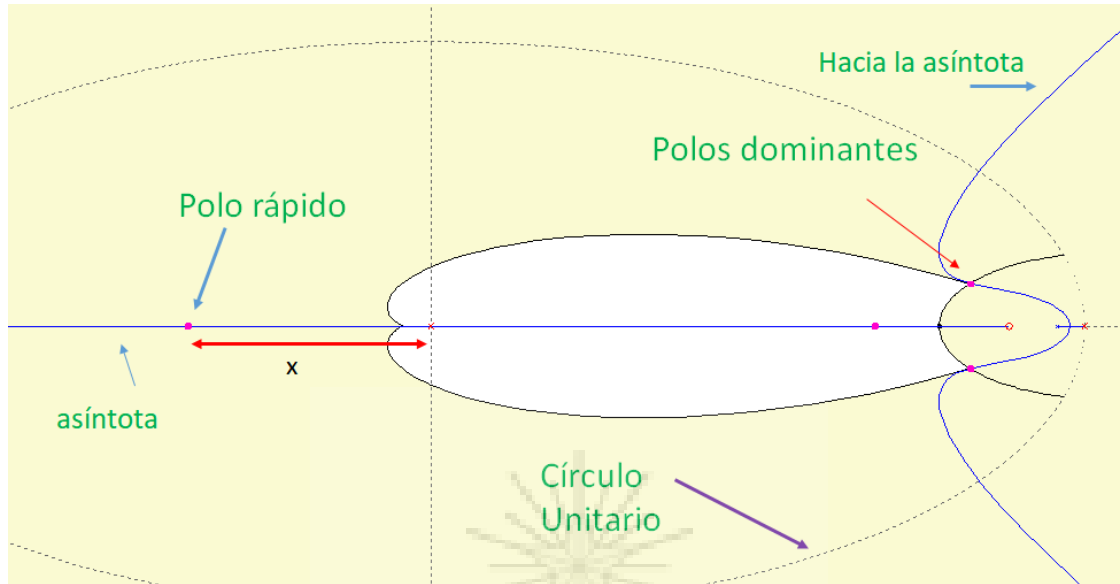


Figura 12.23: Lugar de la raíz mostrando las tres asíntotas.

Como siempre se aplica la condición de módulo [ver ecuación (12.64)]. Pero en este caso se conoce K_c y se plantea la ecuación para calcular el valor de x en la Fig. 12.23

$$0.041023 \cdot K_c = 0.201 = \frac{x^2(x + 0.959)(x + 1)}{x + 0.8853} \rightarrow 0.201x + 0.1779 = x^4 + 1.959x^3 + 0.959x^2 \quad (12.64)$$

Finalmente, las cuatro raíces se encuentran resolviendo la ecuación:

$$x^4 + 1.959x^3 + 0.959x^2 - 0.201x - 0.1779 = 0 \quad (12.65)$$

El polo más rápido se encuentra en $x \approx -0.373$. La frecuencia natural se obtiene

refiriendo este polo al plano s , utilizando la ecuación (12.66).

$$\sigma_s \pm j\omega_s = \frac{1}{T_s} \ln(-0.373) = \frac{1}{T_s} (0.98618 \pm j\pi) \quad (12.66)$$

Con un poco de manipulación matemática se llega a que la frecuencia natural de ese polo es $125.11Hz$ o 786.08rad/seg . El coeficiente de amortiguamiento es aproximadamente $\zeta = 0.3$.

Dado que este problema implica resolver una ecuación de orden cuarto, se considerarán todos los puntos a los que logren plantear la ecuación (12.64):

$$x^4 + 1.959x^3 + 0.959x^2 - 0.201x - 0.1779 = 0 \quad (12.67)$$

