

MI3010 — Guía de estudio

Transferencia de momentum

Christian Ihle Leandro Voisin

Marzo 2016, ver. 0.2.9

Contenido

1	Generalidades	2
2	¿Qué son los fenómenos de transporte?	2
2.1	Descripción	2
2.2	Ejemplos	3
2.3	Definición provisional de fluido y flujo	3
2.4	El sistema de unidades	4
2.4.1	Importancia de los sistemas de medición	4
2.4.2	Algunas definiciones generales	4
2.4.3	Aplicación de los sistemas de unidades	4
2.4.4	Definiciones de unidades en el sistema SI	5
2.4.5	Resumen de unidades derivadas	5
2.4.6	Homogeneidad dimensional	6
2.4.7	Sintaxis	6
2.5	Enfoques macroscópico y microscópico	6
2.5.1	Balances macroscópicos	6
2.5.2	Balances microscópicos y moleculares	6
3	La hipótesis de medio continuo	7
3.1	Derivada total y su relación con el campo de velocidad	7
3.1.1	Derivada total	7
3.1.2	Derivada material	8
3.1.3	Magnitudes termodinámicas	8
4	El teorema de transporte de Reynolds	9
4.1	Demostración informal	9
4.2	Conservación de masa y volumen	10
5	Elementos de hidrostática	15
5.1	Ecuación de la hidrostática	15
5.2	Empuje	17
5.3	El concepto de presión relativa	18

6	Movimiento de fluidos	20
6.1	Descripción general	20
6.2	Traslación	21
6.3	Deformación lineal	21
6.4	Deformación angular	22
6.5	Rotación	23
7	Fuerzas en un fluido en movimiento	24
7.1	Caracterización de fuerzas	24
7.2	Relación entre esfuerzo y deformación	25
7.2.1	Ley de Newton-Navier y el concepto de viscosidad	25
7.2.2	Otras reologías	27
8	Transporte de momentum	28
8.1	Aplicaciones de balances de envoltura en transporte de momentum	29
8.2	Enfoque diferencial en transporte de momentum	31
8.2.1	Ley de Newton generalizada	31
8.2.2	Ecuación de movimiento de un fluido cualquiera	32
8.2.3	La ecuación de Navier-Stokes	33
8.3	Capa límite	34
8.3.1	Hipótesis de capa límite	34
8.3.2	Capa límite laminar	35

1 Generalidades

La presente guía contiene material sobre conceptos de transferencia de momentum, con aplicaciones en fluidos. Incluye, a su vez, una serie de ejercicios propuestos guiados orientados al trabajo personal del alumno en la comprensión de los contenidos del curso.

2 ¿Qué son los fenómenos de transporte?

2.1 Descripción

Los fenómenos de transporte se pueden dividir en tres grandes áreas asociadas al *transporte* o *transferencia*:

- Momentum:** Dice relación con el movimiento de medios sólidos o deformables
- Calor:** Se ocupa de los procesos de transporte y conversión de energía
- Masa:** Está relacionado con la transferencia de masa entre distintas especies químicas o fases.

La transferencia de momentum, calor y masa tienen las siguientes propiedades:

- Frecuentemente ocurren de manera simultánea
- Las ecuaciones básicas que los describen son muy semejantes

- Las herramientas matemáticas necesarias son muy similares
- Los mecanismos moleculares que ocurren en estos fenómenos son parecidos y son responsables de la viscosidad, conductividad térmica y difusión

2.2 Ejemplos

Algunos ejemplos de procesos involucrados son:

- Flujo gravitacional, relleno de caserones, etc
- Transporte de pulpa o agua a través de cañerías (piping)
- Clasificación en hidrociclones
- Sistemas de ventilación
- Lixiviación en pilas (flujo en medios porosos)
- Modelación de burbujas en fluidos metalúrgicos
- Extracción por solvente (SX)
- Electro obtención (EW), Electro refinación (ER)
- Tostación, Fusión, Conversión, Refino y Moldeo
- Pérdidas de calor desde reactores metalúrgicos
- Magnetohidrodinámica
- Limpieza de escorias
- Flujo reactivo (plantas de cal)

2.3 Definición provisional de fluido y flujo

Un fluido es una sustancia que no tiene una forma definida y se deforma (fácilmente) frente a un campo de fuerzas externas. Se considera como fluidos los líquidos y los gases. Sin embargo, existen materiales que tienen un comportamiento dual fluido-sólido.

Para que exista un flujo del fluido, una transferencia de calor o una transferencia de masa debe existir una diferencia (gradiente) de una cantidad físico-química llamada *fuerza direccional*:

Presión: p

Temperatura: T

Volumen: V

Concentración: c

$$\text{Tasa} \left(\frac{\text{cantidad}}{\text{tiempo}} \right) = \frac{\text{fuerza direccional}}{\text{resistencia}} \quad (2.1)$$

2.4 El sistema de unidades

2.4.1 Importancia de los sistemas de medición

La modelación de fenómenos físicos requiere efectuar observaciones. Estas consisten en la asignación de valores numéricos a ciertas variables. Los modelos de fenómenos físicos son relaciones funcionales o expresiones matemáticas donde intervienen estas variables. Las variables son *concretas* o *dimensionales* o bien *abstractas* o *adimensionales*. Las variables concretas tienen asociadas magnitudes y dimensiones. La magnitud depende del sistema de unidades usado.

2.4.2 Algunas definiciones generales

Cantidad en el sentido general: Propiedad asociada a fenómenos, cuerpos o sustancias que pueden ser cuantificadas para ser asignadas a un fenómeno cuerpo o sustancia en particular. Ejemplos: masa y carga eléctrica.

Cantidad en el sentido particular: Propiedad cuantificable o asignable atribuida a un fenómeno, cuerpo o sustancia en particular. Ejemplos: la masa de la luna, la carga eléctrica del protón.

Cantidad física: Es una cantidad que puede ser usada en las ecuaciones matemáticas de la ciencia y la tecnología.

Unidad: Es una cantidad física particular, definida y adoptada por convención, con las que otras cantidades particulares del mismo tipo son comparadas con el fin de expresar su valor.

Unidad fundamental: Es aquella unidad que constituye el fundamento del sistema de unidades. Se supone que todas las unidades base son independientes entre sí.

Unidad derivada: Es aquella que puede ser expresada en términos de las unidades base, mediante multiplicaciones y divisiones de las mismas. Ciertas unidades derivadas tienen nombres y símbolos especiales, los que pueden ser usados en combinación con aquellos para las unidades base u otras unidades derivadas.

2.4.3 Aplicación de los sistemas de unidades

Comúnmente los sistemas de unidades se clasifican en dos grupos, según su campo de aplicación:

- (a) Físicos o absolutos
- (b) Técnicos o ingenieriles.

A continuación la distinción entre estos conceptos:

Sistemas físicos: Sus unidades fundamentales son la longitud [L], la masa [M], el tiempo [T] y la temperatura [Θ]. Algunas unidades derivadas comunes son la fuerza [F], el trabajo [W], el esfuerzo [σ], la potencia [P] y la presión [p].

Sistemas técnicos: Sus unidades fundamentales son la longitud [L], la fuerza [F], el tiempo [T] y la temperatura [Θ].

Existen distintas convenciones para nombrar una misma unidad. Las más comunes son los sistemas MKS (metro-kilogramo-segundo), y el sistema inglés (pulgada-libra-segundo). Por otro lado, está el sistema CGS (centímetro-gramo-segundo). El sistema SI es el más ampliamente aceptado en la actualidad.

Las unidades fundamentales del sistema CGS son múltiplos de aquellas del sistema MKS. En este caso se diría que MKS y CGS pertenecen a la misma clase de sistemas de unidades porque ellos difieren solo en su magnitud, pero no en su naturaleza física.

2.4.4 Definiciones de unidades en el sistema SI¹

Estas definiciones se basan en la Novena Conferencia General de Pesos y Medidas, 1948:

metro [m]: Es la longitud de la ruta recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo igual a $1/299\,792\,458$ de un segundo.

kilogramo [kg]: Es la unidad de masa. Es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo (Oficina Internacional de Pesos y Medidas, Sévres, Francia).

segundo [s]: Es la duración de $9\,192\,631\,770$ períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos desde el estado base de un átomo de Cesio-133.

kelvin [K]: Es una unidad de temperatura termodinámica. Corresponde a la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del triple punto del agua.

ampere [A]: Es la corriente constante que, al ser mantenida entre dos conductores paralelos de largo infinito, de sección circular constante, aislados 1 metro en vacío, producirán entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} Newton por metro de longitud.

mol [mol]: Es la cantidad de substancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos en 0.012 kilogramos de carbono 12.

2.4.5 Resumen de unidades derivadas

En la tabla 1 se presenta un resumen de las unidades derivadas más comunes.

Tabla 1: Unidades del sistema físico

Variable	Unidad CGS	Unidad SI
Fuerza [F]	dina = gr cm s ⁻²	Newton (N) = kg m s ⁻²
Trabajo [W]	erg = dina cm	Joule (J) = N m
Esfuerzo [σ]	dina cm ⁻²	N m ⁻²
Potencia [P]	erg s ⁻¹	Watt (W) = J s ⁻¹
Presión [p]	dina cm ⁻²	Pascal (Pa) = N m ⁻²

¹<http://physics.nist.gov/Pubs/SP330/sp330.pdf>

Otras equivalencias importantes:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ 74 J} \quad (2.2)$$

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}. \quad (2.3)$$

Para las unidades técnicas se derivan unidades de fuerza de la siguiente forma:

$$1 \text{ gr peso (gr)} = 1g \times gr = 980 \text{ gr cm s}^{-2} = 980 \text{ dina} \quad (2.4)$$

$$1 \text{ kg peso (kg)} = 1g \times kg = 9.8 \text{ kg m s}^{-2} = 9.8 \text{ N}. \quad (2.5)$$

Ejercicio 2.1: *Muestre que:*

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ N m s}^{-1} = 10^7 \text{ erg s}^{-1}. \quad (2.6)$$

2.4.6 Homogeneidad dimensional

Un concepto que debe tenerse en cuenta en el trabajo con magnitudes dimensionales es el de homogeneidad dimensional de las ecuaciones de la física. Las ecuaciones que modelan fenómenos físicos deben ser dimensionalmente homogéneas, es decir, las dimensiones de ambos miembros de la ecuación deben ser las mismas.

2.4.7 Sintaxis

Se debe escribir las unidades SI en letras no cursivas, en minúsculas, a menos que provengan de un nombre propio. Por ejemplo, kg, J (viene de Joule), s, W (viene de Watt).

Los símbolos no se alteran al ser usados en plural. Por ejemplo, 1 m y 10 m. Las unidades SI no deben ser seguidas por un punto, (a menos que sea necesario un punto seguido o aparte).

2.5 Enfoques macroscópico y microscópico

2.5.1 Balances macroscópicos

No contempla el estudio de los detalles del sistema. En general, son relevantes:

- Las condiciones en la entrada
- Las condiciones en la salida
- Los cambios globales en el volumen de control

2.5.2 Balances microscópicos y moleculares

A diferencia del caso anterior, aquí sí interesan los detalles. Estos son típicamente descritos en términos de ecuaciones diferenciales, útiles para obtener "perfiles" de velocidad, concentración, temperatura, presión, etc.

En el caso de los balances moleculares, se persigue una comprensión fundamental de los mecanismos de transporte en términos de la estructura molecular y las fuerzas intermoleculares.

3 La hipótesis de medio continuo

Es común en física e ingeniería describir medios que están conformados por átomos o moléculas como si se tratara de medios continuos, describiendo variables locales como promedios de comportamientos a nivel molecular. De esta manera, si V es un volumen de control donde hay un número de moléculas, podrá describirse la velocidad local como

$$\mathbf{u} = \langle w \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \mathbf{w} dV. \quad (3.1)$$

Luego, en un enfoque tipo medio continuo se trabaja, en vez de \mathbf{w} , con \mathbf{u} suponiendo que \mathbf{u} es, al menos, una función suave por tramos. Esto último hace posible el empleo de herramientas del cálculo diferencial para describir comportamientos locales y globales asociados al medio. En particular, si se tiene una microestructura (a nivel molecular) cuya longitud característica es δ , y la longitud característica (de *macroescala*) del medio continuo es L , entonces la hipótesis de medio continuo es válida si

$$\delta \ll V^{1/3} \ll L. \quad (3.2)$$

En otras palabras debe ser posible escoger un volumen para promediar que es arbitrariamente pequeño comparado con la macroescala L , pero a la vez mucho más grande que el tamaño de la estructura molecular.

Ejercicio 3.1: Si δ es el tamaño característico de una molécula de agua, estime el mínimo volumen de control que permite describir el comportamiento del agua como un medio continuo (tome, por ejemplo, un factor 1000). ¿Cuál es el menor diámetro que podría tener un tubo para describir el flujo de agua como medio continuo? Resp.: 95.8 nm, 95.8 μm .

3.1 Derivada total y su relación con el campo de velocidad

3.1.1 Derivada total

La derivada total de F se puede expresar, mediante la regla de la cadena, en términos del campo de velocidad:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} u_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \frac{\partial F}{\partial z} u_z. \quad (3.4)$$

Ejercicio 3.2: Una motocicleta viaja con velocidad constante, en línea recta, desde un lugar ubicado a una temperatura T_0 a un sitio ubicado a temperatura T_1 . El vehículo tiene un termómetro que permite medir la temperatura ambiente, que para un observador en reposo es $T = T_0 + mx$, en que $m > 0$ es una constante y $x \in [0, L]$ (para el observador en reposo la temperatura no varía en el tiempo). Indique las unidades que tiene la constante y deduzca la lectura de temperatura $T(t)$ que mide el termómetro montado en la motocicleta.

Ind.: Considere un sistema de referencia fijo, para el que la moto se mueve con velocidad $u = u_{\text{moto}}$ y use (3.4).

Resp.: K/m; $T(t) = T_0 + u_{\text{moto}}mt$, para $t \in [0, L/u_{\text{moto}}]$.

El ejercicio 3.2 es un ejemplo de que (3.4) permite expresar la medición de una propiedad siguiendo el volumen de control con la medición de la misma propiedad desde un observador fijo. Esta propiedad se reafirma a través de la definición de la *derivada material*.

3.1.2 Derivada material

Se define la derivada material de F , DF/Dt como la variación temporal de la propiedad F en descripción *lagrangiana*, esto es, siguiendo la trayectoria del elemento material.

3.1.3 Magnitudes termodinámicas

Existen dos tipos de magnitudes en termodinámica:

Magnitud extensiva: es una magnitud cuyo valor es proporcional al tamaño del sistema que describe. Esta magnitud puede ser expresada como sumatoria de las magnitudes de un conjunto de subsistemas que formen el sistema original.

Magnitud intensiva: es aquella cuyo valor no depende del tamaño ni de la cantidad de materia del sistema, es decir, tiene el mismo valor para un sistema que para cada una de sus partes consideradas como subsistemas abiertos.

En general el cociente entre dos magnitudes extensivas nos da una magnitud intensiva, por ejemplo la división entre masa y volumen nos da la densidad. En la tabla 2 se muestra una comparación de ambos enfoques.

Tabla 2: Comparación entre los enfoques lagrangiano y euleriano

Enfoque	lagrangiano	euleriano
Elemento de control	masa	volumen
Propiedades descritas	extensivas	intensivas
Depende de la cantidad de materia	sí	no
Ejemplos	momentum energía masa peso	velocidad temperatura concentración densidad

En la generalidad de los problemas de fenómenos de transporte se requiere escribir ecuaciones que representen la conservación de propiedades tales como masa, momentum y energía.

Para sistemas discretos (o de pocas partículas) deberá utilizarse el enfoque clásico (siguiendo la trayectoria de *cada* partícula), lo que es muy costoso si se trata de muchas partículas. Cuando es posible emplear aproximaciones tipo medio continuo es conveniente emplear un volumen de control donde:

- El observador está "fijo" en un punto del dominio y ve como varían las propiedades de interés en el tiempo sólo dentro de dicho volumen.
- Se requiere trabajar con variables intensivas.

4 El teorema de transporte de Reynolds

4.1 Demostración informal

Si B es una propiedad extensiva (masa, energía, momentum, volumen, etc.) presente en un volumen de control Ω , se escribirá ésta en términos de la propiedad intensiva b (densidad, velocidad, concentración etc.) de la siguiente forma:

$$B = \int_{\Omega} b d\Omega. \quad (4.1)$$

Por otro lado, si b es un campo escalar continuo y derivable, entonces, se cumple que:

$$\frac{DB}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (b\mathbf{u}) \right] d\Omega \quad (4.2)$$

Ejercicio 4.1: Demuestre (4.2). Para ello, siga los pasos descritos a continuación:

1. Calcule la derivada material de B como

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B(t + \delta t) - B(t)}{\delta t} \quad (4.3)$$

y obtenga

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\Omega(t+\delta t)} b(t + \delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t) d\Omega \right] \quad (4.4)$$

2. Expresar el lado derecho de (4.4) en términos de dos derivadas sumando y restando $\int_{\Omega(t)} b(t + \delta t) d\Omega$. Obtenga que $\frac{DB}{Dt} = I_1 + I_2$ con:

$$I_1 = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega \quad (4.5)$$

$$I_2 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\Omega(t+\delta t)} b(t + \delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t + \delta t) d\Omega \right]. \quad (4.6)$$

3. Note que $I_2 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega(t+\delta t) - \Omega(t)} b(t + \delta t) d\Omega$. Por otro lado, en el límite $\delta t \rightarrow 0$, aproxime $d\Omega \approx \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t dA$, en que \mathbf{n} es el vector unitario normal a la frontera del volumen de control, y apunta hacia afuera. Con esto, obtenga

$$I_2 = \int_{A(t)} b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (4.7)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{DB}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega + \int_{A(t)} b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (4.8)$$

4. Use el teorema de la divergencia en (4.8) y encuentre el resultado pedido.

4.2 Conservación de masa y volumen

A partir de (4.2) y (4.8) es posible obtener resultados útiles.

Ejercicio 4.2 (ecuación de conservación de masa total): Suponga que $b = \rho(\mathbf{x}, t)$ (la densidad del fluido). Aplique el principio de conservación de masa (la masa total no se crea ni se destruye) a (4.2) y obtenga la ecuación de conservación de masa en descripción euleriana:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (4.9)$$

¿A qué se reduce la expresión anterior cuando la densidad del fluido es una constante del espacio y del tiempo? Interprete su resultado, correspondiente a los fluidos llamados incompresibles.

Note que si el volumen de control Ω se mantiene constante en el tiempo, entonces (4.8) se transforma en:

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} b d\Omega + \int_A b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (4.10)$$

Ejercicio 4.3 (problema de vaciado de estanque): Suponga que se tiene un estanque de volumen total conocido, V_0 , que contiene un líquido de densidad constante (del espacio y del tiempo), ρ_0 . Deduzca la ecuación diferencial de vaciado:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_i Q_{e,i} - \sum_j Q_{s,j}, \quad (4.11)$$

en que $V(t)$ es el volumen de líquido, $Q(t)$ representa el caudal volumétrico, definido como

$$Q(t) = \int_A \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} dA \quad (4.12)$$

y los subíndices e y s representan puntos de entrada y salida de fluido, respectivamente.

Ind.: Defina una función escalar $\rho(\mathbf{x}, t)$ en el interior del estanque, tal que:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si hay líquido} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Note además que como el volumen de control V_0 se mantiene constante, puede usar (4.10).

Ejercicio 4.4: Aplique el resultado (4.11) al problema de un estanque cilíndrico, de área basal A , altura total H y altura de líquido inicial h_0 , indicando el volumen de control empleado. Suponga que puede caracterizar el caudal de salida empleando la ley de Torricelli²:

$$Q_s = S \sqrt{2gh}, \quad (4.14)$$

donde S es la sección de salida de líquido (conocida). Suponga que hay un caudal de entrada conocido, Q_0 . Determine la curva de vaciado del estanque.

Ind.: $\int \frac{dx}{1-\alpha x^{1/2}} = -\frac{2[\alpha\sqrt{x} + \ln(1-\alpha\sqrt{x})]}{\alpha^2} + C$.

²Evangelista Torricelli (Faenza, Italia, 15 de octubre de 1608 – Florencia, Italia, 25 de octubre de 1647), físico y matemático italiano.

Ejercicio 4.5 (reactor perfectamente agitado): Suponga que se vierte un líquido de cierta densidad indeterminada en un estanque de volumen V_0 , que tiene líquido con otra densidad. En el estanque hay un agitador suficientemente eficiente como para mantener instantáneamente todo el contenido a la misma densidad. Demuestre que se cumple:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = \sum_i G_{e,i} - \sum_j G_{s,j}, \quad (4.15)$$

donde $\rho = \rho(t)$, pero no del espacio, $V(t)$ es el volumen de líquido y $G(t)$ representa el caudal volumétrico, definido como

$$G(t) = \int_A \rho(t) \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} dA = \rho(t) Q(t). \quad (4.16)$$

Los subíndices e y s representan puntos de entrada y salida de fluido, respectivamente.

Ejercicio 4.6: Considere el transporte de una sustancia disuelta en un flujo de un fluido incompresible. Sea C la concentración de esta sustancia, definida como la masa total (soluto más fluido). Sea ρ la densidad de la mezcla soluto y fluido. La masa de soluto contenida en un volumen de control infinitesimal, dV , es por tanto: $dm = \rho C dV$. Suponga que la concentración de soluto no cambia la densidad de la mezcla, ρ , de modo que esta propiedad se mantiene siempre constante considerando que además se cumple la condición de incompresibilidad.

- Si m es la masa de soluto, determine la cantidad intensiva asociada a esta propiedad extensiva.
- Plantee el Teorema de transporte de Reynolds para determinar una expresión para la tasa de cambio total de la masa de soluto: Dm/Dt en un volumen de control V con secciones de entrada y salida S_e y S_s , respectivamente. Demuestre que si se considera que C es constante dentro de un volumen de control se cumple:

$$\frac{Dm}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial CV}{\partial t} + \int_S C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right\}. \quad (4.17)$$

Desarrolle el último término para el caso en que la concentración es constante tanto en la sección de entrada como en la sección de salida.

Ejercicio 4.7: Considere el estanque de sección rectangular con área basal A y altura grande comparada con las alturas de líquido incorporado, mostrado en la Figura 1. Este se usa para generar capas de líquido estratificadas y, por otro lado, para mezclar y verter la mezcla. El estanque, junto con el tapón inferior y el tubo deflector conectado al mismo son de masa despreciable y se encuentran apoyados sobre una balanza que entrega la masa de los líquidos alojados en el mismo. En ambos casos puede despreciar el efecto del momentum de los chorros.

En la figura 1a se muestra la primera aplicación. En ella, con el objeto de evitar que se produzca mezcla, se incorpora lentamente por la parte inferior del tanque un caudal Q_1 de un líquido de densidad ρ_1 , al mismo tiempo que por la parte superior se vierte un caudal Q_2 de un líquido de densidad ρ_2 , en que $\rho_2 < \rho_1$. En este caso el tapón, dispuesto en la zona inferior, se encuentra cerrado. Las tasas de incorporación de volumen son, $Q_1 = \min\{at, aQ_0/b\}$ y $Q_2 = \max\{0, Q_0 - bt\}$, con a , b y Q_0 cantidades positivas. Si inicialmente el estanque está vacío, para esta configuración se pide:

- (a) Encontrar una expresión para la evolución temporal de la altura total generada por ambas capas de líquido.
- (b) Estimar la lectura de la balanza en función del tiempo.
- (c) Determine la altura de cada una de las capas, h_1 y h_2 , en función del tiempo.

Suponga ahora que se desea mezclar ambos líquidos, por lo que se reemplaza la adición inferior del producto de densidad ρ_1 por una carga superior y se incorpora un agitador, según se muestra en la figura 1b. Además se desea disponer de la mezcla, para lo que se abre el tapón inferior en $t^* = Q_0/b$. El deflector, conectado a la salida de líquido, tiene como objetivo hacer que el campo de velocidad cerca del tapón sea prácticamente nulo. Además, la deformación de la superficie libre producto de la agitación puede despreciarse en este caso. Suponga además que el caudal volumétrico de descarga puede ser modelado mediante la expresión

$$Q_3 = k\sqrt{gh}, \quad (4.18)$$

en que g es la magnitud de la aceleración de gravedad. Considerando que los caudales volumétricos son los mismos que los de la parte anterior y que inicialmente el estanque tiene una altura de llenado $h_0 > 0$ y una densidad de mezcla $\bar{\rho}(t = 0) = \rho_2$, se pide, para $t \geq 0$:

- (d) Determinar la evolución temporal de la densidad $\bar{\rho}$ de la mezcla.
- (e) Encontrar una expresión para la evolución temporal de la altura total de la mezcla de líquidos
- (f) Determinar una expresión para la lectura de la balanza en función del tiempo.

Ejercicio 4.8: El estanque de área basal A de la Figura 2 se ha llenado con una mezcla de agua fresca y salmuera. Empleando una técnica de laboratorio llamada de Doble balde, se ha generado un perfil de densidad lineal para un tiempo dado, $\rho(z, t)$, descrito por la ecuación:

$$\rho(z, t) = \rho_1(t) - \frac{z}{h(t)} (\rho_1(t) - \rho_0), \quad (4.19)$$

donde ρ_0 es la densidad en la superficie, $\rho_1(t) > \rho_0$ es la densidad en el fondo, $h(t)$ es la altura de la columna en el tiempo t y $0 \leq z \leq h(t)$. Se sabe que $h(t = 0) = H$ y $\rho_1(t = 0) = \rho_{1,0}$ (ambos valores conocidos), y el perfil de densidad tiene la forma mostrada en la Figura 2a. En $t = 0$ se abre un tapón de sección S , dispuesto en el fondo del recipiente, y la mezcla comienza a vaciarse (Figura 2b). Suponga que el proceso ocurre en ausencia de reacciones químicas y que, además, para caracterizar el caudal de vaciado, Q , puede emplear la ley de Torricelli, $Q = S\sqrt{gh}$, con g la aceleración de gravedad. Por otro lado, suponga que el perfil de densidad se mantiene lineal a medida que progresa el vaciado. En otras palabras, puede suponer que el problema de vaciado es unidimensional. Se pide:

- (a) Identificar $h(t)$ y encontrar el tiempo de vaciado del recipiente. Para ello:
 - i. Muestre que se cumple el principio de conservación de volumen cuando un elemento de masa tiene densidad constante en descripción lagrangiana (desde el punto de vista de un observador siguiendo un elemento de fluido).

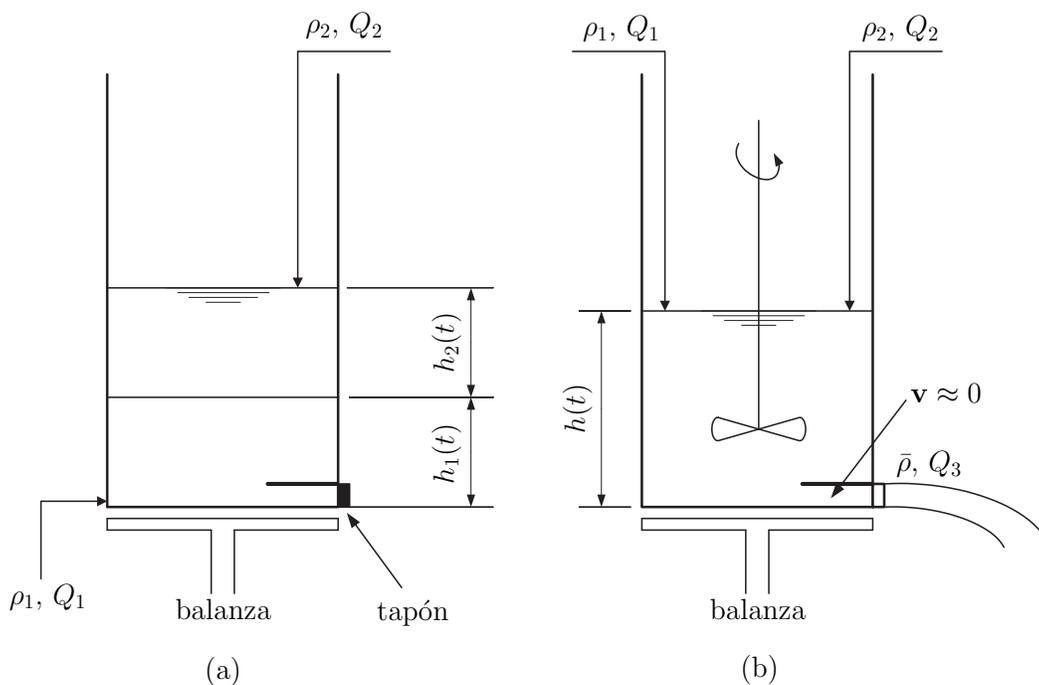


Figura 1: Ejercicio 4.7. (a) Configuración sin mezcla ni salida de líquido. (b) Configuración con agitación y vertido inferior.

ii. Encuentre una expresión para $h(t)$ según lo pedido. Resp.: $h(t) = (H^{1/2} - \frac{S}{2A}g^{1/2}t)^2$

iii. Determine el tiempo de vaciado del estanque. Resp.: $t_v = \frac{2A}{S} \sqrt{\frac{H}{g}}$.

(b) Determinar la densidad en el punto de descarga, $\rho_1(t)$, enunciando claramente el principio de conservación que necesita utilizar. Resp.: $\frac{\rho_1(t) - \rho_0}{\rho_{1,0} - \rho_0} = \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{S}{A} t\right)^2$.

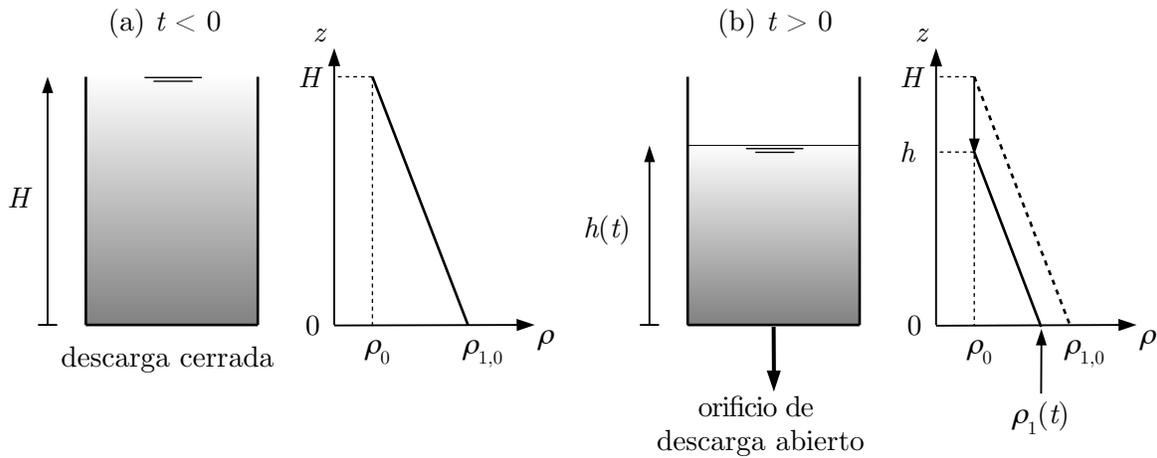
Ind.: Puede ser de utilidad emplear la regla de Leibnitz:

$$\frac{d}{dx} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy + F(x, f_2(x)) \frac{df_2}{dx} - F(x, f_1(x)) \frac{df_1}{dx}. \quad (4.20)$$

Ejercicio 4.9: Un recipiente de volumen V contiene una solución compuesta por un líquido, nutrientes y bacterias. Se sabe que las bacterias se alimentan de los nutrientes, lo que hace que éstas se multipliquen de tal forma que:

$$\frac{Dm_b}{Dt} = \alpha m_b, \quad (4.21)$$

en que α es un parámetro positivo y m_b es la masa de bacterias en el volumen y DF/Dt es la derivada material de la propiedad F .



Hipótesis:

1. El recipiente tiene una altura inicial de líquido H y un área basal A .
2. Las densidades ρ_0 y $\rho_{1,0}$ son constantes y conocidas.
3. El orificio de descarga (sección S) se abre en $t = 0$.
4. El flujo cerca del fondo no altera el perfil de densidad (se mantiene lineal todo el tiempo).
5. No hay reacciones químicas.

Figura 2: Problema 4.8.

- (a) Muestre que en un volumen de control cualquiera, la densidad total (líquido y nutrientes + bacterias) se puede expresar en términos de la fracción volumétrica de bacterias, $\phi = \left(\frac{\text{volumen de bacterias}}{\text{volumen total}} \right)$, como:

$$\rho = \rho_b \phi + \rho_l (1 - \phi), \quad (4.22)$$

en que ρ_b y ρ_l son la densidad de las bacterias y el líquido con los nutrientes, respectivamente. Empleando el resultado anterior y la relación (4.21) obtenga que m_l , la masa de líquido más nutrientes, varía según la relación

$$\frac{Dm_l}{Dt} = -\alpha m_b \quad (4.23)$$

- (b) Indique cuáles son las propiedades extensiva e intensiva en este problema.
- (c) Emplee el teorema de transporte de Reynolds para determinar la evolución temporal de la concentración de bacterias, $\phi(\mathbf{x}, t)$, suponiendo conocida su concentración inicial, $\phi_0(\mathbf{x})$ (figura 3, izquierda), y no hay movimiento de la mezcla bacterias/líquido. Resp.: $\phi(t) = \phi_0 e^{\alpha t}$.

Considere ahora la configuración de la figura 3 (derecha), consistente en un recipiente de volumen V , conocido y constante, en que se agrega un caudal de líquido con nutrientes (sin

bacterias), Q (conocido), descargándose a la atmósfera por la parte inferior líquido con bacterias. Suponga que el punto de descarga consiste en una perforación de sección S que se encuentra a una altura H (desconocida), medida entre la superficie libre y el punto inferior de descarga. Suponga además que el sistema posee un agitador que mantiene todo el tiempo la concentración de bacterias homogénea en el interior del recipiente y que la concentración inicial de bacterias, ϕ_0 , es conocida. Las densidades de las bacterias y líquido así como la tasa de crecimiento de bacterias y el consumo de nutrientes son los enunciados anteriormente.

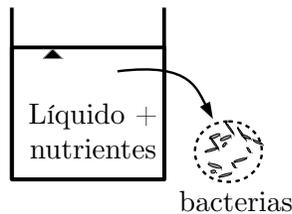
(d) Analice cualitativamente los posibles escenarios del crecimiento de bacterias en términos del caudal Q , para el caso de régimen permanente, lo que implica que V y H se mantienen constantes.

(e) Usando el teorema de transporte de Reynolds y el balance de masa de bacterias, plantee (sin resolver) una ecuación para H en términos de $\phi(t)$ y los datos del problema. Resp.: $\frac{\rho_b \alpha \phi}{\rho_l} = \frac{Q}{V} + \frac{d\phi}{dt} - \frac{S\sqrt{2gH}}{V}(1 - \phi)$.

(f) Mediante un balance en la mezcla líquido/nutrientes y la ecuación obtenida en la parte anterior, plantee una segunda ecuación diferencial y resuélvala para la concentración $\phi(t)$.

Ind.: $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{\ln x - \ln(a+bx)}{a} + C$. Resp.: $\frac{\phi}{\phi_0} \frac{\alpha - \frac{Q}{V} + \left(\frac{\rho_b}{\rho_l} - 1\right)\phi_0}{\alpha - \frac{Q}{V} + \left(\frac{\rho_b}{\rho_l} - 1\right)\phi} = \exp\left[\left(\alpha - \frac{Q}{V}\right)t\right]$.

Parte (c)



Partes (e) y (f)

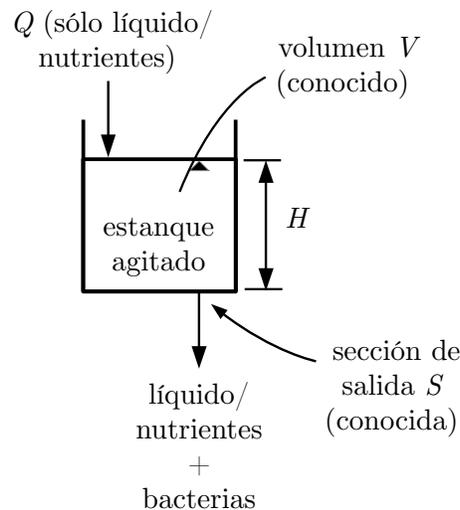


Figura 3: Problema 4.9.

5 Elementos de hidrostática

La hidrostática se ocupa del estudio de los fluidos en equilibrio estático. Un elemento esencial en hidrostática es la caracterización del efecto de la presión sobre cuerpos sumergidos.

5.1 Ecuación de la hidrostática

Definimos la *presión* sobre un fluido como la componente normal de la fuerza que actúa *sobre* éste. En un volumen de control, las fuerzas de presión actúan sobre las caras. A diferencia, de este tipo de fuerza, la gravedad actúa sobre el centro de masa del cuerpo.

Ejercicio 5.1 (la presión es un escalar): Considere la cuña diferencial sumergida, de lados dx , ds y dz , según se muestra en la figura 4. Escriba un balance de fuerzas en los ejes y y

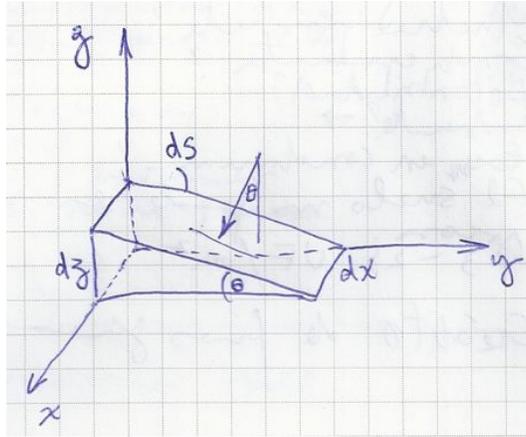


Figura 4: Ejercicio 5.1.

z , denominando $p_p dx dz$, $p_z dx dy$ y $p_s dx ds$ las fuerzas que actúan sobre los planos izquierdo, inferior e inclinado, respectivamente. No olvide considerar el peso de la cuña.

Muestre que:

$$p_y = p_s \quad (5.1)$$

$$p_z - p_s = \rho g \frac{dz}{2}, \quad (5.2)$$

de donde se concluye que cuando el elemento de volumen tiende a cero, $p_y = p_s = p_z$, lo que implica que la presión tiene un valor independiente de la orientación de la cuña, i.e., es un escalar.

La relación (5.2) implica que si $dz \neq 0$, entonces $p = p(z)$. Esto es una consecuencia de que la presión depende del peso del fluido sobre el punto de interés.

Ejercicio 5.2 (ecuación de la hidrostática): Considere un elemento de fluido estático. Si la gravedad también está presente y en equilibrio con las fuerzas de presión y la densidad del fluido es constante, muestre que:

$$p(z) = p_0 - \rho g z, \quad (5.3)$$

en que p_0 es un valor de referencia de la presión, ρ es la densidad del fluido y g es la aceleración de gravedad. Para ello, escriba un volumen de control y haga un equilibrio de fuerzas.

Analice el caso de un fluido con densidad variable ($\rho = \rho(z)$).

Es importante tener en cuenta que (5.3) o, equivalentemente, $\partial p/\partial z = -\rho g$, es válida solamente cuando el fluido está en reposo. En algunos casos en fluidos en movimiento esta expresión es válida como aproximación del comportamiento físico real, pero eso debe ser demostrado para cada caso.

Ejercicio 5.3: Para el caso de un cuerpo sumergido en equilibrio estático discuta el efecto de las fuerzas de presión en el balance de fuerza lateral.

5.2 Empuje³ (principio de Arquímedes)

La ecuación de la hidrostática es válida para un fluido en reposo de densidad ρ . Para el caso de un cuerpo sólido sumergido en un fluido en equilibrio estático, aplica el *Principio de Arquímedes*:

La fuerza de empuje sobre un cuerpo sumergido es igual al peso de *fluido* desplazado por el cuerpo.

Ejercicio 5.4: Demuestre el principio de Arquímedes. Para ello, suponga un cuerpo en equilibrio estático y considere un elemento de volumen del cuerpo con forma de “palo de fósforo”. Escriba un balance de fuerza sobre dicho volumen de control. Empleando el resultado (5.3), deduzca que la fuerza de empuje para un líquido de densidad constante,

$$E = \rho g \forall, \quad (5.4)$$

en que ρ es la densidad de fluido (constante) y \forall el volumen del cuerpo sólido. ¿Por qué el signo es positivo?

Ejercicio 5.5: Un cilindro vertical de altura h_c , radio R y densidad ρ_c se encuentra inmerso en un líquido que contiene una estratificación lineal de densidad, dada por la relación:

$$\rho(z) = \rho_0 + \frac{z}{H}(\rho_H - \rho_0), \quad (5.5)$$

donde los subíndices 0 y H representan el fondo y la superficie, respectivamente, $0 \leq z \leq H$ y $\rho_0 > \rho_H$. Se pide:

- Calcular el empuje que actúa sobre el cilindro en términos de la altura de la cara inferior de éste, z_b . Resp.: $g\pi R^2 h_c \rho \left(z_b + \frac{h_c}{2}\right)$.
- Mostrar que, en condición de equilibrio estático, la coordenada z del centro del cilindro, $z_c = z_b + \frac{h_c}{2}$, verifica la relación $\rho_c = \rho(z_c)$. Deduzca que es posible encontrar una solución al problema si y sólo si $\rho_c < \rho_0$ y que, en este caso, $z_c = \frac{\rho_0 - \rho_c}{\rho_0 - \rho_H} H$.

5.3 El concepto de presión relativa

Se define la presión relativa a aquella respecto de la presión atmosférica. Si \tilde{p} es la presión de un fluido, entonces su presión relativa es $p = \tilde{p} - p_{\text{atm}}$, en que $p_{\text{atm}} \approx 101.3 \text{ kPa}$ es la presión atmosférica. Así, la presión relativa en la superficie de una columna de líquido libre a la atmósfera es 0.

³En muchos textos también se utiliza el término *boyancia*.

A menos que se indique lo contrario se considerará presiones relativas en el tratamiento de líquidos en el presente curso. En el caso de gases, se utilizará con mayor frecuencia presiones absolutas.

Ejercicio 5.6: Deduzca una expresión para el momento ejercido sobre un muro por una columna hidrostática de fluido de densidad constante, altura H , profundidad W y con superficie libre expuesta a la atmósfera en términos de la fuerza total sobre el muro y un punto de aplicación de dicha fuerza, \bar{z} . Deduzca que para este caso $\bar{z} = H/3$ (medida desde el fondo).

Ejercicio 5.7: Considere 2 líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 separados por una pared vertical no permeable como muestra la figura 5.

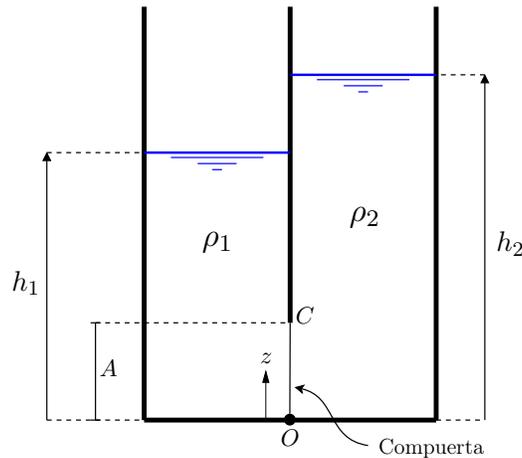


Figura 5: Ejercicio 5.7

La compuerta puede rotar en el punto O de tal forma que el punto C se mueve libremente. La compuerta tiene dimensiones de alto A y profundidad B conocidas. La altura del líquido h_1 también es conocida. Encuentre la altura h_2 de tal forma que la compuerta permanezca en la posición vertical, según se indica. Resp.: $h_2 = \frac{2A}{3} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(h_1 - \frac{2A}{3} \right)$.

Ejercicio 5.8: Un camión debe trasladar un estanque consistente en un semicilindro horizontal de radio R , y altura H , con un líquido de densidad ρ y viscosidad dinámica μ . Cuando el camión está en reposo, el nivel de líquido es $(1 - \lambda)R$, medido desde la base del semicilindro, con $0 < \lambda < 1$ y λ conocido (Figura 6a). El contenedor se encuentra destapado (en contacto con la atmósfera), por lo que existe el riesgo de que en la aceleración de la partida del camión ($d\mathbf{v}/dt = a\hat{\mathbf{i}}$) se derrame líquido fuera de éste (Figura 6b). Se pide determinar la máxima aceleración (constante), para la situación de equilibrio estático, a la que puede estar sometido el camión para que no haya pérdida de líquido. Para ello:

- (a) Identifique las fuerzas que actúan sobre un elemento de líquido de volumen $dx dy dz$ inmerso en el contenedor, para la situación con el recipiente acelerado (Figura 6b).

Ind.: Recuerde que en la situación de equilibrio estático que se requiere estudiar las parcelas de fluido no tienen movimiento relativo.

- (b) A partir de las fuerzas identificadas en la parte anterior, plantee las ecuaciones de equilibrio en el fluido. Resp.: $\nabla p = -\rho \begin{pmatrix} a \\ g \end{pmatrix}$.
- (c) Resuelva el sistema de ecuaciones obtenido en la parte anterior. En particular, muestre que las isóbaras (líneas de igual presión) son líneas rectas. Determine una ecuación para la posición de la superficie libre y deduzca el ángulo que debe tener la superficie libre respecto de la horizontal en términos de la aceleración \mathbf{a} . Resp.: $p(x, z) = \rho g(R - \frac{a}{g}x - z)$, donde las isóbaras se determinan a partir de la condición $p = \text{constante}$.
- (d) Indique la condición geométrica límite para que no haya derrame y concluya el valor de la aceleración \mathbf{a} . Resp.: Ángulo de la superficie libre respecto de la horizontal, $\alpha = \arcsin \lambda$; $a = \frac{g\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$.

Ind.: Aproveche la forma del contenedor para obtener su respuesta. Relacione geométricamente el ángulo de la superficie libre encontrado en la parte anterior con la condición límite para que no haya derrame.

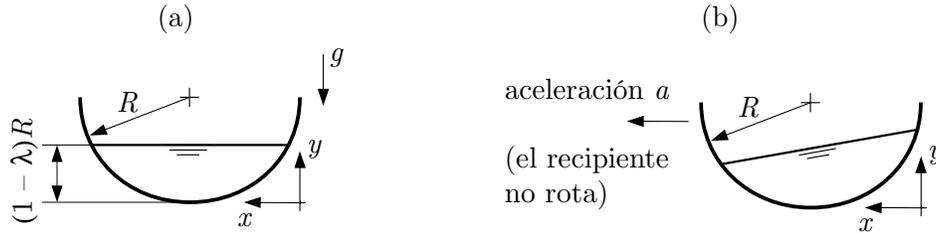


Figura 6: Problema 5.8. (a) Situación con el camión en reposo. (b) Camión desplazándose a la izquierda con aceleración $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}$ (constante). En ambos casos el líquido se mantiene estático dentro del recipiente.

Ejercicio 5.9: Un estanque atmosférico contiene un líquido con un perfil de densidad, medido desde la base del estanque, dado por la expresión:

$$\rho(z) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho_H}{H}z, \quad (5.6)$$

donde ρ_0 y $\rho_H < \rho_0$ son las densidades del líquido en $z = 0$ y en la superficie libre en $z = H$, respectivamente. Un recipiente cilíndrico de radio R y largo L se encuentra sumergido en reposo con su eje principal dispuesto horizontalmente a una profundidad $(1 - \lambda)H$, con $R/H \leq \lambda \leq 1 - R/H$. Se pide:

- (a) Calcular el empuje sobre el cilindro, en términos de λ , R , L y los parámetros de la función densidad. Ind.: Aproveche la simetría del cilindro para definir un elemento de área conveniente. Resp.: Si $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{E} = gV[\lambda\rho_H + (1 - \lambda)\rho_0]\mathbf{k}$, en que V es el volumen del cilindro.
- (b) Si la densidad del cilindro es ρ_s , determine valor de λ que mantiene el cuerpo en equilibrio estático. Deduzca una relación entre ρ_0 , ρ_H y ρ_s para que el problema tenga solución. Resp.: $\lambda^* = \frac{\rho_0 - \rho_s}{\rho_0 - \rho_H}$.

6 Movimiento de fluidos

6.1 Descripción general

Consideremos un campo permanente de velocidades, es decir, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. Tomemos un punto P de este campo de velocidades, de coordenadas (x, y, z) , el que tiene una velocidad $\mathbf{v} = (u, v, w)$. Consideremos además un punto P' , cercano al punto P , distante a una distancia $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, con una velocidad $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, con $d\mathbf{v} = (du, dv, dw)$. En general, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$. El diferencial total de cada una de las componentes de velocidad se escribe, en régimen permanente, como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (6.1)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (6.2)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (6.3)$$

En notación compacta,

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} [dx, dy, dz]^T, \quad (6.4)$$

con

$$\left. \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right|_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}. \quad (6.5)$$

La diferencia de velocidades está caracterizadas por 9 derivadas parciales, que podemos asociar a 4 efectos distintos:

- Traslación
- Deformación lineal
- Deformación angular
- Rotación

Las distintas deformaciones básicas que se pueden identificar están dadas por los valores que pueden tomar las derivadas parciales que definen el diferencial de velocidad $d\mathbf{v}$. Consideremos el cubo $ABCDEFPP'$, dentro del elemento de fluido, cuyo vértice, P , se encuentra en el origen del sistema de coordenadas (figura 7).

6.2 Traslación

En este caso $d\mathbf{v} = 0$ y sólo se mueve el centro de masa del volumen de control.

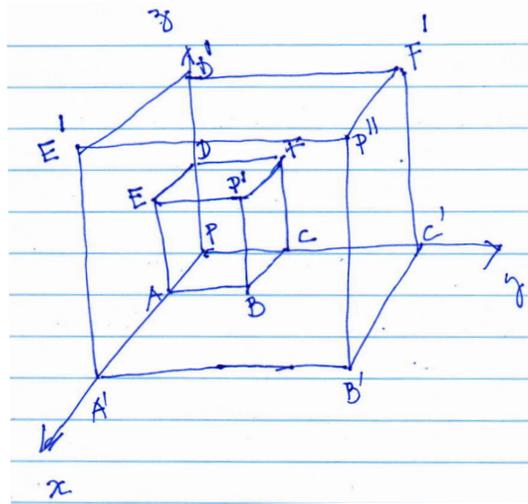


Figura 7: Elemento de volumen.

6.3 Deformación lineal

Corresponde a la modalidad $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ si $i \neq j$, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \neq 0$ si $i = j$. En este caso,

$$d\mathbf{v} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial y} dy, \frac{\partial w}{\partial z} dz \right]^T. \quad (6.6)$$

Con esto,

$$d\mathbf{v}_A = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx, 0, 0 \right]^T \quad (6.7)$$

$$d\mathbf{v}_C = \left[0, \frac{\partial v}{\partial y} dy, 0 \right]^T \quad (6.8)$$

$$d\mathbf{v}_D = \left[0, 0, \frac{\partial w}{\partial z} dz \right]^T. \quad (6.9)$$

Con estas tres componentes, podemos deducir la velocidad en el resto de las componentes:

$$d\mathbf{v}_B = d\mathbf{v}_A + d\mathbf{v}_C \quad (6.10)$$

$$d\mathbf{v}_E = d\mathbf{v}_A + d\mathbf{v}_D \quad (6.11)$$

$$d\mathbf{v}_F = d\mathbf{v}_C + d\mathbf{v}_D. \quad (6.12)$$

Finalmente,

$$d\mathbf{v}_{P'} = d\mathbf{v}_A + d\mathbf{v}_C + d\mathbf{v}_D \quad (6.13)$$

Habíamos mencionado que en un fluido incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.14)$$

Luego, si $\partial u / \partial x > 0$ y $\partial v / \partial y > 0$, entonces $\partial w / \partial z < 0$. En otras palabras, la compresión de una dimensión implica una expansión en alguna de las otras.

6.4 Deformación angular

Corresponde a la configuración $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ si $(i, j) = (2, 3)$ y $(3, 2)$, donde se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \neq 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0 \quad (6.16)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0 \quad (6.17)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (6.18)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 \quad (6.19)$$

En este caso,

$$d\mathbf{v} = \left[0, \frac{\partial v}{\partial z} dz, \frac{\partial w}{\partial y} dy \right]. \quad (6.20)$$

Las deformaciones de las caras están dadas por (figura 8).

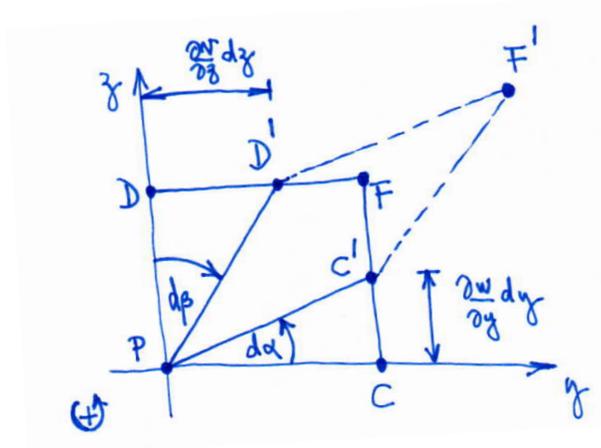


Figura 8: Esquema de deformaciones en plano yz (no hay deformaciones en los otros planos).

$$\text{Desplazamiento } CC' : |d\mathbf{v}_C \delta t| = \frac{\partial w}{\partial y} dy \delta t \quad (6.21)$$

$$\text{Desplazamiento } DD' : |d\mathbf{v}_D \delta t| = \frac{\partial v}{\partial z} dz \delta t \quad (6.22)$$

Considerando la convención de ángulo positivo para giros en el sentido contrario a las agujas del reloj, se tiene:

$$\delta\alpha \approx \frac{\partial w}{\partial y} \delta t; \quad \delta\beta \approx -\frac{\partial v}{\partial z} \delta t. \quad (6.23)$$

La deformación angular total es:

$$\delta\gamma = \delta\alpha - \delta\beta, \quad (6.24)$$

de donde,

$$\delta\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta t. \quad (6.25)$$

Definimos la tasa de deformación en el plano yz como:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\delta\gamma}{\delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (6.26)$$

Repetiendo este análisis para los planos xy e yz , se tiene:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.27)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (6.28)$$

En general, escribimos el *tensor de deformación*, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.29)$$

donde $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T$.

6.5 Rotación

Si el ángulo $\delta\beta$ es *positivo*, entonces se genera un movimiento equivalente a una rotación. En torno al eje x , se define:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \frac{\delta\alpha + \delta\beta}{\delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (6.30)$$

Análogamente,

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (6.31)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.32)$$

El vector ω se denomina *vorticidad*, y se puede escribir como:

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}, \quad (6.33)$$

con

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (6.34)$$

Ejercicio 6.1: Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, demuestre que:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\Omega}}, \quad (6.35)$$

con:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} & 0 & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

7 Fuerzas en un fluido en movimiento

7.1 Caracterización de fuerzas

En el caso de fluidos que se mueven y deforman según lo visto en la sección 6, aparecen esfuerzos de corte, que actúan sobre el fluido en conjunto con la presión y las fuerzas de volumen. En general, las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido corresponde a una de las tres siguientes categorías:

Fuerzas de presión: son debido a la presión y actúan normales al volumen de control.

Fuerzas de cuerpo o volumen: actúan sobre el centro de masa del volumen de control (por ejemplo, gravedad o fuerzas electromagnéticas)

Fuerzas normales: Actúan normales al volumen de control pero no corresponden a las fuerzas de presión. Dependen de la presencia de un flujo (campo de velocidades no nulo) mientras que la presión existe aún en reposo.

Fuerzas de corte: Actúan tangenciales al volumen de control.

Se denomina esfuerzos a las fuerzas expresadas por unidad de área. Por conveniencia, las fuerzas normales y de corte se expresan, de manera compacta, en la forma de un *tensor de esfuerzos*, $\underline{\underline{\tau}} = \tau_{ij}$, cuyos primer subíndice corresponde a la normal y el segundo a la dirección en que apunta. Se denomina tensor “desviador”⁴ a aquel que incluye los esfuerzos normales y de corte, sin incluir la presión:

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Así, τ_{21} (también τ_{yx}) corresponde a la fuerza tangencial con normal y , apuntando en la dirección x , que actúa sobre una cara del volumen de control.

⁴Del inglés *deviatoric tensor*.

En la literatura aparece la definición de un tensor total de esfuerzos, $\underline{\underline{\Pi}}$, que incluye la presión:

$$\underline{\underline{\Pi}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}, \quad (7.2)$$

donde $p > 0$ es la presión sobre el volumen de control, $\underline{\underline{I}}$ es la identidad de 3×3 y $\underline{\underline{\tau}}$ está dado por (7.1). Por convención la fuerza de presión es la que actúa sobre el volumen de control. En consecuencia, las fuerzas de presión que actúan en una cara orientada en $+\hat{x}$ tienen signo negativo, lo que justifica el signo menos en el primer término del lado derecho de (7.2). Por otro lado, en un fluido en reposo, se debiera tener sólo la condición hidrostática, es decir, $\Pi_{ij} = -p\delta_{ij}$ si $\mathbf{u} = 0$ ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en caso contrario).

En la presente definición $\underline{\underline{\tau}}$ es el tensor de esfuerzos *sobre* el volumen de control. En particular, en la cara orientada en $+\hat{z}$, cuando τ_{zx} apunta hacia la derecha tiene signo positivo.

7.2 Relación entre esfuerzo y deformación

A nivel molecular, distintos fluidos responden de diferente manera a distintas fuerzas externas. Por ejemplo, el pegamento fluyen sobre un plano inclinado de distinta forma que el agua, y a la vez de distinta forma que la mayonesa. La rama de la física que estudia la razón entre esfuerzo y deformación se denomina *reología*.

7.2.1 Ley de Newton-Navier y el concepto de viscosidad

Supongamos dos placas paralelas de área A , separadas por una distancia e , pequeña. En el espacio entre ellas hay un fluido (líquido o gas). Inicialmente, el sistema está en reposo. En $t = 0$ la placa se pone lentamente en movimiento. Nos concentraremos en el movimiento en la dirección x , con una velocidad constante, cuando $t \rightarrow \infty$ (figura 9).

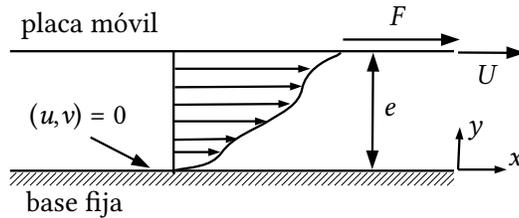


Figura 9: Flujo 2D en estado estacionario

De la figura 10:

$$\tan d\gamma \approx d\gamma = \frac{dx}{dy} \quad (7.3)$$

$$= \frac{(u_{y+dy} - u_y)dt}{dy} \quad (7.4)$$

$$\approx \frac{\partial u}{\partial y} dt. \quad (7.5)$$

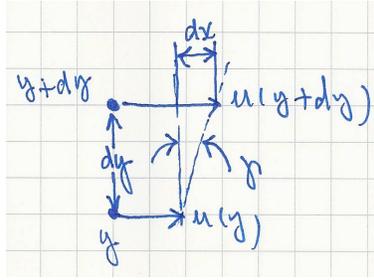


Figura 10: Ley de Newton-Navier

Definimos $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ (tasa de deformación). Si u es sólo función de y , entonces,

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}. \quad (7.6)$$

Supongamos que el desplazamiento de la parcela de fluido diferencial es inducido por una fuerza por unidad de área (esfuerzo) que denominaremos τ_{yx} [Pa] (*el fluido* responde a la fuerza externa con una fuerza por unidad de área igual y opuesta, $-\tau_{yx}$). La relación más simple posible entre esfuerzo y deformación es una lineal, donde:

$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = -\tau'_{yx} = \mu \frac{du}{dy}, \quad (7.7)$$

donde el signo ' denota el esfuerzo del fluido. Si $\rho eU/\mu$ es pequeño y $v = w = 0$, entonces $u = Uy/e$ para una variedad de fluidos (flujo de corte simple), y se cumple la ley de Newton-Navier:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{U}{e}. \quad (7.8)$$

La constante de proporcionalidad, μ , se llama *viscosidad dinámica*, y $[\mu] = \text{Pa}\cdot\text{s}$.

En general la viscosidad es función de variables termodinámicas fundamentales que definen un sistema tales como la temperatura, la presión, el volumen, la composición del fluido, etc.

$$\mu = f(T, P, V, n_i, \dot{\gamma}). \quad (7.9)$$

A presión constante, la viscosidad del aire aumenta con la temperatura de 1.72×10^{-5} Pa·s a 0°C a 2.2×10^{-5} Pa·s a 100°C . Se puede considerar las siguientes relaciones empíricas para determinar las viscosidades del aire y del agua:

$$\mu_{\text{aire}} = [-1.0585 + 0.16803\sqrt{T(K)}] \times 10^{-5} \quad (7.10)$$

$$\mu_{\text{agua}} = \exp[0.6885 - 0.10024(T(^{\circ}\text{C}))^{0.65}] \times 10^{-3}. \quad (7.11)$$

En la tabla 3 hay una idea de los valores que puede tener la viscosidad dinámica en distintos fluidos.

Ejercicio 7.1: Un bloque de 30 kg se desliza a velocidad constante por un plano inclinado de 30° sobre una delgada capa de aceite de densidad 800 kg/m^3 . Calcule la velocidad en estado estacionario y confirme la aplicabilidad de la ley de Newton-Navier. Considere $\mu = 0.26 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $A = 0.5 \text{ m}^2$ y $e = 0.15 \text{ mm}$.

Resp.: $U = 17 \text{ cm/s}$, $\rho eU/\mu \approx 0.08 \ll 1$.

Tabla 3: Viscosidades dinámicas para distintos fluidos

Fluido	Viscosidad [mPa·s]		
<i>gases</i>	0.01	~	0.1
<i>agua</i>	0.3	~	1.75
<i>metales líquidos</i>	0.5	~	5
<i>sales fundidas</i>	1	~	5
<i>matas fundidas</i>	1	~	4
<i>nitratos y carbonatos</i>	5	~	20
<i>aceites</i>	100	~	5000
<i>escorias y lavas</i>	300	~	10000

7.2.2 Otras reologías

La interpretación de los distintos modelos reológicos se puede ver de manera simplificada a través de la versión bidimensional del tensor de esfuerzo. Para el caso de un fluido newtoniano,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.12)$$

en que u es la componente de velocidad en la dirección x . Esta relación se escribe comúnmente, de manera simplificada, como $\tau = \mu\dot{\gamma}$, en que $\dot{\gamma} = \partial u/\partial y$ es la tasa de deformación. La interpretación del modelo newtoniano se puede ver en la figura 11, donde el gráfico $\dot{\gamma}$ - τ se denomina *curva de flujo*.

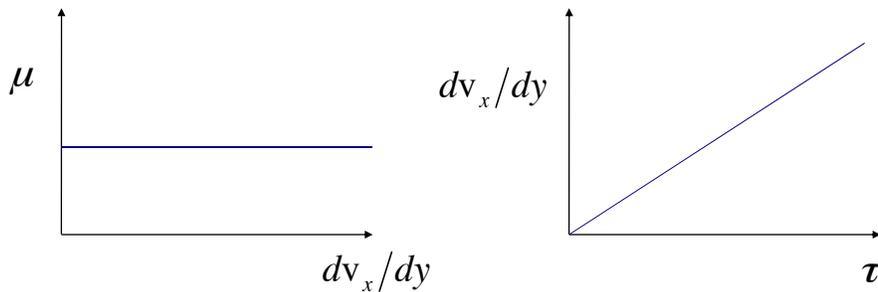


Figura 11: Modelo reológico newtoniano simplificado (7.12)

En algunos casos, la viscosidad depende de la tasa de deformación generada por el flujo del fluido, por ejemplo para un flujo unidireccional en la dirección x , $\dot{\gamma} = du/dx$. Un ejemplo son los plásticos de Bingham, donde

$$\tau = \tau_y + \mu_B \dot{\gamma} \Leftrightarrow \mu_{eq} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + \mu_B = f(\dot{\gamma}), \quad (7.13)$$

en que τ_y y μ_B se denominan *esfuerzo de fluencia* y viscosidad plástica, respectivamente. En este caso se ha expresado la viscosidad como el cociente entre el esfuerzo de corte y la tasa de deformación, y el resultado es dependiente de la tasa de deformación, a diferencia del caso de los fluidos newtonianos.

Una generalización de los plásticos de Bingham son los fluidos de Herschel-Bulkley:

$$\tau = \tau_y + K_{HB}\dot{\gamma}^n, \quad (7.14)$$

en que K_{HB} y n son el *coeficiente de consistencia* e *índice de flujo*, respectivamente. En la figura 12 se ven gráficamente las diferencias entre estos distintos tipos de fluido.

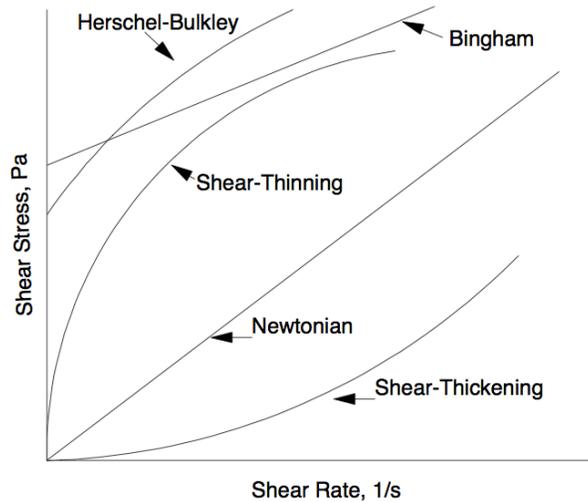


Figura 12: Curvas de flujo para fluidos con distintos comportamientos reológicos

8 Transporte de momentum

Hemos revisado hasta ahora algunas aplicaciones del teorema de transporte de Reynolds, empleando los principios de conservación de masa y volumen. En esta sección se revisará la aplicación de (4.8), empleando la segunda ley de Newton.

8.1 Aplicaciones de balances de envoltura en transporte de momentum

El teorema de transporte de Reynolds se puede utilizar, en combinación con la segunda ley de Newton para expresar la dinámica de fluidos.

Ejercicio 8.1 (segunda ley de Newton para un volumen de control de fluido): *Utilice la segunda ley de Newton y el teorema de transporte de Reynolds para escribir una ecuación para el campo de velocidad. En particular, muestre que, para un volumen de control por el que pasa un fluido, se cumple, la relación vectorial*

$$\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_r = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} d\Omega + \int_A \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA, \quad (8.1)$$

en que \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_τ , \mathbf{F}_p y \mathbf{F}_r son las fuerzas que actúan sobre el centro de masa, fuerzas de corte (tangenciales), fuerzas de presión, y reacciones de contacto entre el volumen de control y el medio exterior. Para ello, considere $b = \rho \mathbf{u}$ en (4.8) (momentum por unidad de volumen).

En (8.1), el primer término del lado derecho da cuenta de la variación temporal del flujo, mientras que el segundo, denominado *término convectivo*, es relevante cuando el flujo transfiere mucha energía por su inercia comparado con la transferencia de momentum molecular, dada por el segundo término del lado izquierdo.

Ejercicio 8.2 (ecuación conservación de cantidad de movimiento): *Deduzca, a partir de (8.1), que en régimen permanente, si las propiedades del flujo en las secciones de entrada y salida se mantienen constantes, y se pueden despreciar las pérdidas de energía en el volumen de control, entonces se cumple que*

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \rho Q (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_e), \quad (8.2)$$

en que \mathbf{u}_s u \mathbf{u}_e son los vectores velocidad de salida y entrada, respectivamente, ρ es la densidad del fluido y Q es el caudal volumétrico.

Ejercicio 8.3 (cálculo de reacción en un codo por flujo de un chorro): *Suponga que se hace incidir un chorro de agua atmosférico (de sección constante A , conocida) con un caudal volumétrico (Q , en m^3/s) horizontalmente sobre un deflector que hace que cambie su dirección en un ángulo θ . El deflector está conectado a un soporte que lo mantiene fijo en posición. Se pide determinar la reacción en el soporte. Para ello, considere las siguientes hipótesis:*

1. El flujo es en régimen permanente
2. Puede despreciar el peso del volumen de control
3. Puede despreciar la fuerzas de roce en las paredes del volumen de control
4. Suponga que las propiedades son constantes tanto en la sección de entrada como en la sección de salida

Resp.: $R_x = \frac{\rho Q^2}{A} (\cos \theta - 1)$; $R_y = \frac{\rho Q^2}{A} \sin \theta$.

Ejercicio 8.4: *Emplee el concepto de balance de envoltura para determinar el perfil de velocidad en un canal inclinado en un ángulo θ , de ancho W y largo L , donde puede despreciar los efectos de borde en la entrada y salida. Para resolver el problema suponga que el flujo es uniforme y unidireccional. Note que en el canal la superficie está expuesta a la atmósfera. Considere todas las fuerzas que actúan en un volumen de control de alto dz y ancho W ubicado entre $z = 0$ y e (el espesor de escurrimiento en la zona donde el flujo es uniforme). En particular:*

(a) *Enuncie las condiciones de borde del problema.*

Resp.: $\tau_{yx}(y = e) = 0$, $u(y = 0) = 0$.

(b) *¿Cuál es el flujo convectivo neto en ambas direcciones? Resp.: 0 (¿por qué?)*

(c) *Encuentre el perfil de esfuerzo de corte, $\tau_{yx}(y)$. Resp.: $\tau_{yx}(y) = \rho g(e - y) \sin \theta$.*

(d) *Determine el perfil de velocidad. Resp.: $u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(e - \frac{y}{2} \right)$*

(e) Determine el caudal y la velocidad promedio.

(f) Determine el flujo convectivo en x , entrante en el volumen de control.

Ejercicio 8.5: Determine ahora el perfil de velocidad para el caso del flujo en un tubo horizontal de radio R donde se aplica un gradiente de presión Δp , conocido. Similar al caso anterior, considere flujo uniforme en una distancia L en la coordenada axial. Responda, para este caso, las mismas preguntas que en el ejercicio anterior.

(a) $u(R) = 0$, y el esfuerzo de corte es finito en $r = 0$.

(b) 0

(c) $\tau_{rz} = -\frac{\Delta p}{L} \frac{r}{2}$

(d) $u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2)$

(e) $Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}$; $\langle u \rangle = \frac{R^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}$.

(f) $FM = 2\pi \int_0^R \rho u^2 r dr$.

Ejercicio 8.6: Una celda de Couette circular es un arreglo de cilindros concéntricos de radios interior y exterior r_1 y r_2 , respectivamente, que inducen un flujo entre ellos. Suponga que el cilindro interior rota con velocidad angular Ω pero el cilindro exterior se mantiene estático. Suponga además que ambos cilindros son infinitamente largos.

(a) Mediante un balance de envoltura determine el perfil de velocidad de este flujo. *Ind.:* Dada la simetría, escriba un balance de torque sobre un volumen de control escogido apropiadamente. ¿Por qué no es conveniente emplear un balance de fuerzas en este caso? Considere que, en coordenadas cilíndricas, $\tau_{r\theta} = \mu r d\omega/dr$, en que ω es la velocidad angular del fluido.

Resp.: $u_\theta = -\frac{c_1}{2\mu r} + c_2 r$, con c_1 y c_2 dados por las condiciones de borde $\omega(r = r_1) = \Omega$ y $\omega(r = r_2) = 0$.

(b) Suponga ahora que el cilindro tiene un alto L , conocido. Determine el torque que debe ejercer el cilindro interior para mantener la velocidad angular Ω . *Resp.:* $T =$

$$4\pi r_2^2 L \mu \Omega \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]^{-1}.$$

8.2 Enfoque diferencial en transporte de momentum

8.2.1 Ley de Newton generalizada

Hasta ahora, la viscosidad ha sido definida en términos de un flujo de corte simple en estado estacionario, en el cual v_x es sólo función de y , es decir v_y y $v_z = 0$. En general nos interesan flujos más complicados en los cuales están presentes las tres componentes de la velocidad y éstas dependen de las tres coordenadas dimensionales e incluso del tiempo.

En analogía con la ley de Hooke de la elasticidad, y similar al caso de la ley de Newton-Navier, la hipótesis más simple es decir que los esfuerzos de corte varían linealmente con la tasa de deformación (Stokes, 1845). Stokes supuso:

1. El fluido es un continuo y el tensor de esfuerzos τ_{ij} es a lo más una función lineal de la tasa de deformación angular $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (6.29), pero no depende de las rotaciones,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.3)$$

2. El fluido es isótropo, i.e., sus propiedades son independientes de la dirección.
3. Si las tasas de deformación son cero, debe obtenerse la condición de presión hidrostática.

Se puede probar que:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + K\varepsilon_{ij} + C(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (8.4)$$

cumple con las hipótesis anteriores. Definiendo $K = 2\mu$ y $C = \lambda$ (segundo coeficiente de viscosidad), se obtiene:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (8.5)$$

Notar que $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$ (tensor simétrico).

Definiendo la presión media, \bar{p} , como:

$$\bar{p} = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}, \quad (8.6)$$

usando (8.6) en (8.5), se obtiene:

$$\bar{p} = p - \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right) \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (8.7)$$

Definiendo $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$ (κ se denomina *viscosidad dilatacional*), se obtiene que la presión media:

$$\bar{p} = p - \kappa \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (8.8)$$

Recordemos que, de la ecuación de conservación de masa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (8.9)$$

Si ρ es constante, entonces el fluido es incompresible, y entonces, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Con esto, el tensor de esfuerzo para un fluido newtoniano *incompresible* se puede escribir como:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (8.10)$$

$$= -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (8.11)$$

con

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (8.12)$$

Por otro lado, se obtiene que la presión media, \bar{p} (8.8) es igual a la presión termodinámica, p , sólo si el fluido es incompresible.

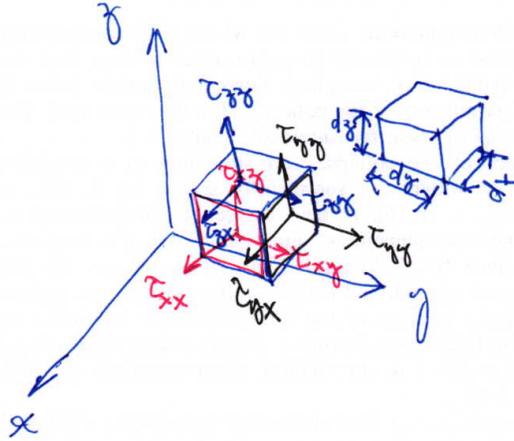


Figura 13: Elemento diferencial de volumen empleado para la deducción de la ecuación de movimiento.

8.2.2 Ecuación de movimiento de un fluido cualquiera

En el caso del enfoque diferencial, no se considera un volumen de control explícitamente. En vez, se evalúan las propiedades locales del flujo. Consideremos un volumen de control de tamaño diferencial según se muestra en la figura 13.

Ejercicio 8.7: Deduzca la ecuación de movimiento de un fluido cualquiera (newtoniano o no newtoniano) empleando el teorema de transporte de Reynolds. Para ello, siga los siguientes pasos:

- Escriba el teorema de transporte de Reynolds considerando como propiedad extensiva el momentum ($M \cdot \mathbf{u}$).
- Demuestre que si $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ es la densidad del fluido y $e = e(\mathbf{x}, t)$ es un campo escalar (por ejemplo, una componente de la velocidad), entonces se cumple que:

$$\frac{DB}{Dt} = \int_{\Omega} \rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e \right] d\Omega, \quad (8.13)$$

siempre que se cumpla la ecuación de conservación de la masa total:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (8.14)$$

con \mathbf{u} el vector velocidad y $B = \int_{\Omega} \rho e d\Omega$ la propiedad extensiva asociada a la propiedad intensiva ρe . Aplique resultado definiendo e como cada una de las componentes del vector velocidad y suponiendo que el volumen de integración es un elemento diferencial de volumen.

- Desarrolle el término de fuerzas externas considerando el tensor de esfuerzo total, $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$, y las fuerzas de volumen. Concluya que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} + \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}, \quad (8.15)$$

en que \mathbf{f}_{ext} representa el vector de fuerzas externas.

8.2.3 La ecuación de Navier-Stokes

Ejercicio 8.8: Deduzca la ecuación de Navier-Stokes para el caso de un fluido newtoniano, incompresible:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (8.16)$$

en que ∇^2 (operador diferencial laplaciano) está definido por: $\nabla^2 F = \partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + \partial^2 F / \partial z^2$.

Para ello, siga los siguientes pasos:

- Considere el tensor de esfuerzos de Newton, según (8.10).
- Proceda de manera similar al problema 8.7, recordando que para los fluidos incompresibles, se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Obtenga (8.16).
- Interprete el lado izquierdo de (8.16) para el caso del régimen permanente. Los términos $\mathbf{u} \cdot \nabla u$, $\mathbf{u} \cdot \nabla v$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla w$ para las componentes x , y y z , respectivamente, se denominan términos convectivos. ¿Cuándo no son despreciables?

Ejercicio 8.9: Muestre que si la fuerza externa por unidad de volumen correspondiente al segundo término del lado derecho de (8.16) es constante, entonces puede escribir la ecuación de Navier-Stokes en términos de un gradiente de presión motriz, $\nabla \hat{p}$, donde

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (8.17)$$

¿Cuál es la expresión de \hat{p} ?

Ejercicio 8.10: Expanda el lado izquierdo de (8.16) e identifique el término transiente y los términos convectivos. Asimismo, expanda el lado derecho, y demuestre que para la componente i de la ecuación, se tiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_{\text{ext},i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right), \quad (8.18)$$

donde se define $\nu = \mu/\rho$ como la viscosidad cinemática del fluido.

8.3 Capa límite

El concepto de capa límite es fundamental para entender la aparición de la turbulencia y el mecanismo de disipación de energía en fluidos en contacto con cuerpos sólidos u otros fluidos. Por ahora consideraremos que una capa límite es una estructura de flujo larga y delgada adyacente a una pared sólida con un borde de ataque.

Ejercicio 8.11: Mediante un balance de fuerzas, y empleando el teorema de transporte de Reynolds aplicado al problema de conservación de masa y momentum, muestre que si se tiene un volumen de control con una placa induciendo un perfil de velocidad paralelo a ésta (Figura 14), entonces debe aparecer una fuerza neta sobre la placa. Determine ésta en función del perfil de velocidad en términos de la velocidad aguas arriba de la placa, u_∞ , y del espesor de la zona donde existe un gradiente de velocidad, δ .

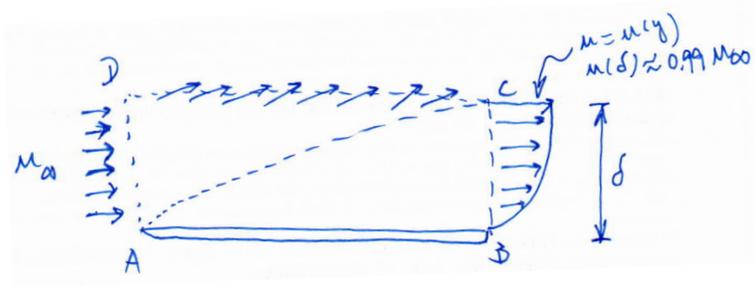


Figura 14: Volumen de control para el cálculo de la fuerza sobre la placa.

8.3.1 Hipótesis de capa límite

Los flujos de capa límite son largos y delgados. En términos de *escalas*, se tendrá que si x es la coordenada longitudinal (paralela a la placa) y y es la coordenada normal a la placa, entonces:

$$x \sim X \quad (8.19)$$

$$y \sim \delta, \quad (8.20)$$

y además,

$$\frac{\delta}{X} \ll 1. \quad (8.21)$$

Esto quiere decir que *cerca* del borde de ataque las aproximaciones de capa límite no tienen sentido. Por otro lado, se puede considerar como escala de velocidad para las aproximaciones de capa límite la velocidad aguas arriba de la placa, U (constante), de donde,

$$u \sim U. \quad (8.22)$$

Ejercicio 8.12: Empleando deduzca (8.19), (8.20) y (8.22) junto con la ecuación de continuidad en dos dimensiones, deduzca que la escala para la velocidad en el eje y , v es

$$v \sim \frac{U\delta}{X}. \quad (8.23)$$

8.3.2 Capa límite laminar

Ejercicio 8.13: (a) Para un flujo bidimensional con componente principal en la dirección x , use la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones y régimen permanente y continuidad junto con las escalas para las aproximaciones de capa límite dadas por (8.19), (8.20), (8.22) y (8.23), para deducir la ecuación de capa límite laminar en el eje x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (8.24)$$

¿Cuál es la escala que debe tener la presión? Deduzca además que, si los términos de esta ecuación son del mismo orden, necesariamente se debe cumplir que

$$\delta \propto \sqrt{X} \quad (8.25)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\delta}{X} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_X}}, \quad (8.26)$$

con $Re_X = UX/\nu$.

- (b) Escriba la ecuación de Navier-Stokes en el eje y y, a partir de aproximaciones de capa límite, deduzca que la presión no varía significativamente en una coordenada x fija. Muestre además que, en términos adimensionales, se tiene que

$$\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial y^*} \sim \mathcal{O} \left[\left(\frac{\delta}{X} \right)^2 \right], \quad (8.27)$$

donde $p^* = \hat{p}/\mathcal{P}$ e $y^* = y/\delta$, con \mathcal{P} la escala de presión determinada anteriormente.

Ejercicio 8.14: Considere el estanque de la Figura 15, de ancho W , alimentado desde la parte superior con un líquido de densidad ρ , viscosidad dinámica μ y un caudal volumétrico Q_0 . En su parte inferior, el estanque cuenta con un orificio de descarga, con una profundidad igual a W y un ancho e_0 . Suponga que para la descarga se puede emplear la ley de Torricelli ($v = \sqrt{2gh}$, en que g es la magnitud de la aceleración de gravedad y h la altura de líquido en el estanque). El líquido descarga a la atmósfera, según se muestra en la figura. Se pide:

- (a) Determinar el ancho del orificio (e_0) para que la altura h_0 se mantenga constante si el caudal Q_0 de entrada de líquido también es constante.

Se requiere estimar el ancho del chorro de salida (laminar) a una altura $x \geq x_1$, según se muestra en la figura. Note que el flujo de descarga no es uniforme (esto es, $\partial u/\partial x \neq 0$ para $0 \leq x$). Por otro lado, se ha fotografiado el ancho del chorro en la posición $x = x_1$ (figura 15), por lo que el dato $e(x = x_1) = e_1$ es conocido. Despreciando el esfuerzo de corte entre el chorro y el medio exterior (aire), así como la tensión superficial del líquido, se pide:

- (b) Mostrar, apoyándose en la ecuación de continuidad en dos dimensiones, que si $u(x \geq x_1) \approx u(x)$, entonces $v \approx 0$.
- (c) Determinar la presión al interior del chorro. Apóyese en el resultado de la parte anterior y en las ecuaciones de Navier-Stokes o bien utilice argumentos de capa límite.
- (d) Encontrar una ecuación diferencial ordinaria para la velocidad longitudinal del chorro $u(x)$, indicando las condiciones de borde para resolverla.
- (e) Determinar el ancho del chorro, $e = e(x)$ para el caso límite $\mu = 0$.

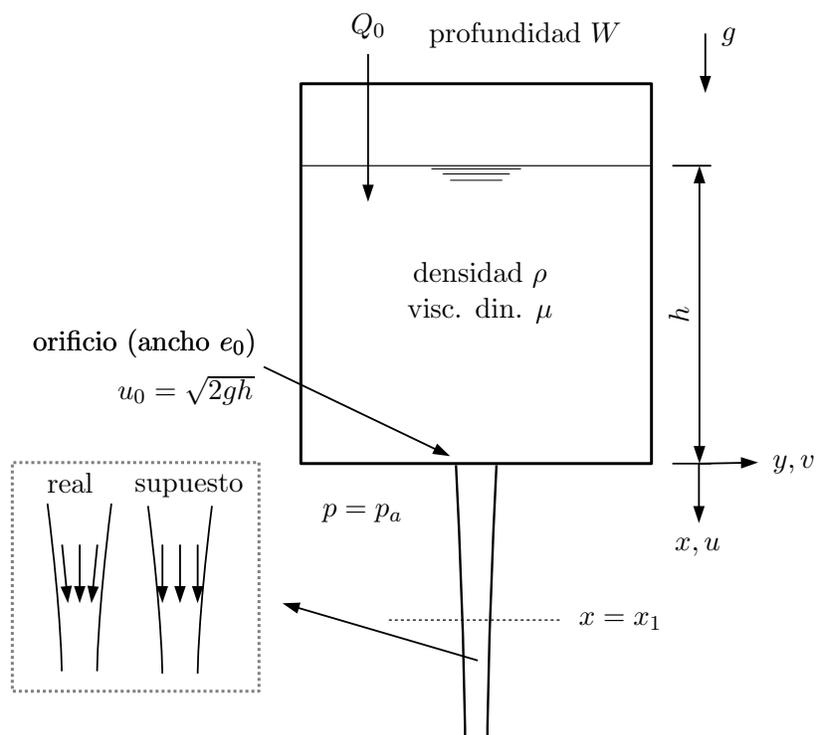


Figura 15: Problema propuesto.