

# MI3010

## FENÓMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Prof. Christian Ihle  
Prof. Leandro Voisin

FCFM Universidad de Chile  
Departamento de Ingeniería de Minas



**fcfm**

Ingeniería de Minas  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

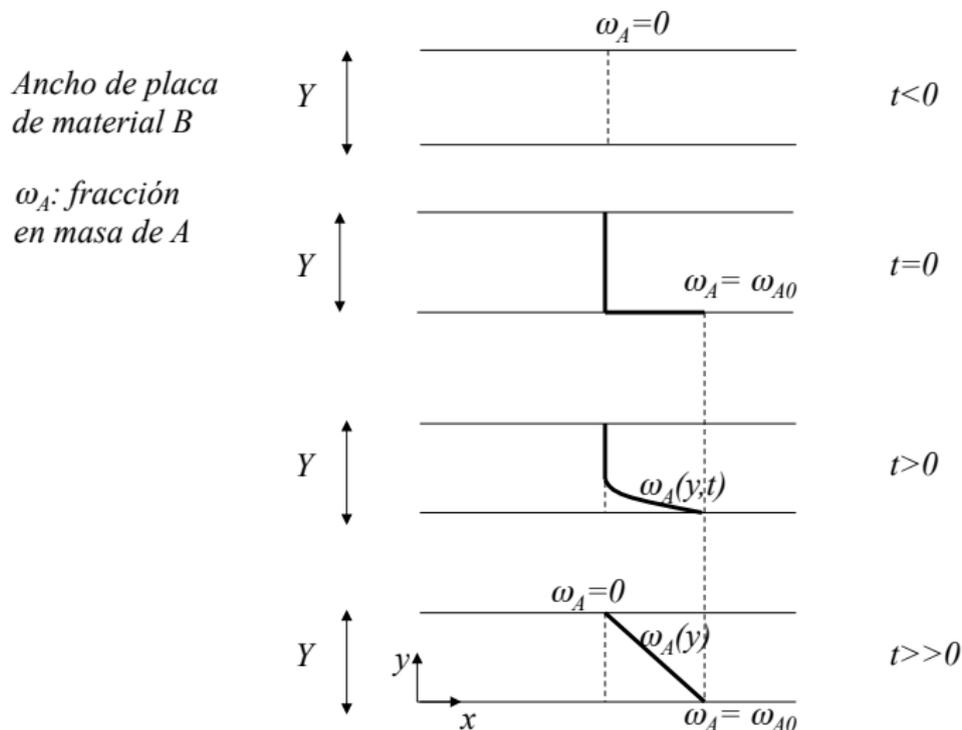


- 1 Objetivos de la clase
- 2 Transferencia de masa impermanente
- 3 Transferencia de masa en interfaces con convección

# Objetivos

- 1 Conocer problemas de transferencia de masa en régimen transiente
- 2 Emplear condiciones de borde convectivas en problemas de transferencia de masa con convección, en régimen laminar y turbulento

Hasta ahora se ha considerado una serie de ejemplos correspondientes a procesos de transferencia de masa en régimen permanente. En muchos casos es relevante conocer además la progresión temporal de concentración.



Si la velocidad media de la mezcla,  $\vec{v} = 0$ , entonces, en ausencia de reacciones químicas, se obtiene la segunda ley de Fick. En una dimensión ( $y$ ):

$$\frac{\partial \lambda_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 \lambda_A}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial parabólica, de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio, por dimensión.

## Técnica de resolución: transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (2)$$

- 1  $\mathcal{L}$  es un operador lineal. Esto es, si  $a$  y  $b$  son constantes:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (3)$$

- 2 Si  $f(t)$  es  $n$  veces diferenciable, entonces, la transformada de Laplace de  $f^{(n)}(t) = d^n f/dt^n$  es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(t=0) - s^{n-2} f'(0) - \dots \\ &\quad - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (4)$$

En particular,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \quad (5)$$

- ③  $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s)$ , con  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .
- ④  $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ . Esto implica que  $e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$ .
- ⑤  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

## Transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) ds. \quad (6)$$

En vez de calcular esta integral, se emplean tablas de transformadas de Laplace.

## Ejemplo

$$\frac{\partial \lambda_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 \lambda_A}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Sólido semi-infinito en la dirección  $x$  (infinito en  $y$  y  $z$ ) con una concentración molar inicial  $c_A(t < 0, y) = c_{A,0}$ . Cuando  $t \geq 0$  se impone una salto de concentración en  $y = 0$ , de tal forma que  $c_A(t \geq 0, y = 0) = c_{A,1}$ . Dado que el sólido es semiinfinito, es razonable suponer que  $\lim_{y \rightarrow \infty} c_A(t, y) = c_{A,0}$  para todo  $t \geq 0$ .

Definiendo

$$c_* = \frac{c_A(y, t) - c_{A,0}}{c_{A,1} - c_{A,0}}, \quad (8)$$

con  $y, t \geq 0$  y  $c_* \in [0, 1]$ , se llega a que:

$$\frac{\partial c_*}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_*}{\partial y^2}, \quad (9a)$$

$$c_*(t < 0, y \geq 0) = 0 \quad (9b)$$

$$c_*(t \geq 0, y = 0) = 1 \quad (9c)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} c_*(t, y) = 0 \quad (9d)$$

- 1 Transformada de Laplace a ambos lados de (9):

$$\frac{d^2 \tilde{c}}{dy^2} - \frac{s}{D_{AB}} \tilde{c} = 0. \quad (10)$$

- 2 Transformada de Laplace sobre las condiciones de borde:

$$\tilde{c}(s, y = 0) = \frac{1}{s} \quad (11a)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{c}(s, y) = 0 \quad (11b)$$

- 3 Solución del tipo  $\tilde{c} = a \exp[py] + b \exp[-py]$ :

$$\tilde{c}(s, y) = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{D_{AB}}} y}}{s} \quad (12)$$

4 Tabla de transformadas de Laplace:

$$F(s) = \frac{\exp[-k\sqrt{s}]}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), \quad (13)$$

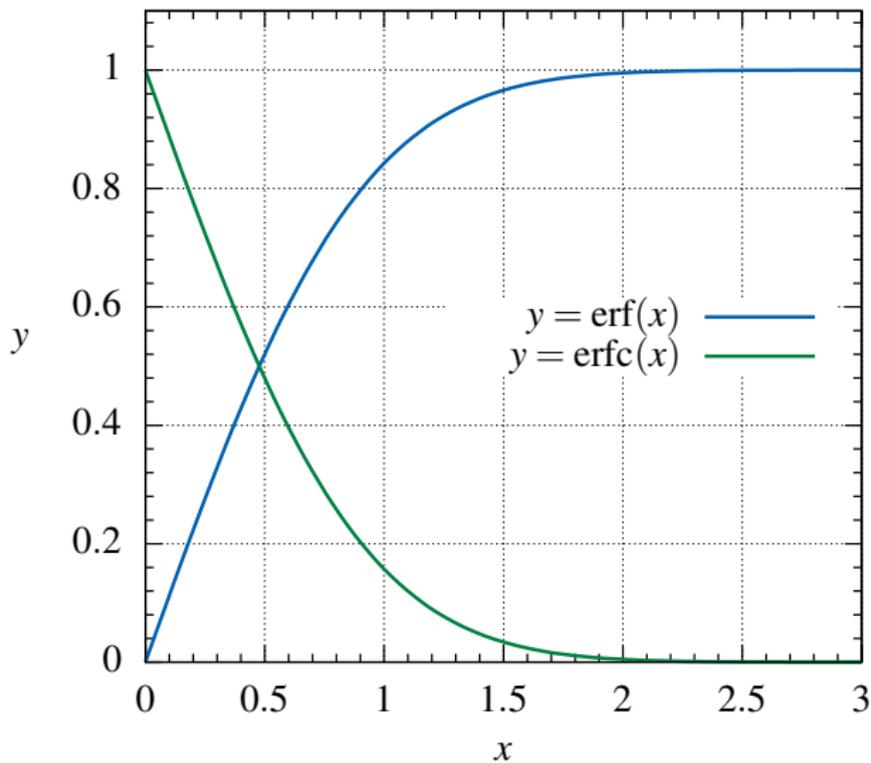
con:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau \quad (14)$$

$$= 1 - \operatorname{erf}(x). \quad (15)$$

Finalmente,

$$\frac{c_A(y, t) - c_{A,0}}{c_{A,1} - c_{A,0}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right). \quad (16)$$



## Propuesto

Resuelva el problema del sólido semiinfinito, esta vez con un *flujo de masa* impuesto en  $y = 0$ :

$$-D_{AB} \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} = J_0. \quad (17)$$

(el resto son las mismas condiciones que en el problema anterior).

*Ind.:*

$$\frac{\exp[-k\sqrt{s}]}{s^{1+\frac{n}{2}}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (4t)^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), \quad (18)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots; k \geq 0$  y

$$i^m \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i^{m-1} \operatorname{erfc}(t) dt, \quad (19)$$

con  $m \geq 0$  e  $i^{-1} \operatorname{erfc}(x) \equiv 2\pi^{-1/2} \exp[-x^2]$ .

## Condición de borde convectiva

Para analizar el transporte de material entre un fluido y una superficie sólida o entre un gas y un líquido, normalmente se emplea la siguiente condición de borde convectiva:

$$-\rho_1 D_1 \left. \frac{d\lambda_A}{dx} \right|_{x=x_0} = h(\langle \lambda_A \rangle - \lambda_{Ay=y_0}), \quad (20)$$

en que  $\langle \lambda_A \rangle$  es la concentración promedio en el fluido y  $h$  es el llamado coeficiente de convección. La tasa de transferencia de masa está gobernada por el espesor relativo de las capas límite de momentum y masa. También,

$$-D_1 \left. \frac{dc_A}{dx} \right|_{x=x_0} = h(\langle c_A \rangle - c_{Ay=y_0}). \quad (21)$$

El coeficiente de transferencia de masa aumenta con el incremento del gradiente de concentración en la superficie y depende de:

- 1 Propiedades del fluido
- 2 Propiedades del flujo
- 3 Geometría del sistema
- 4 Localización dentro del sistema

El espesor relativo de las capas límite de momentum y masa está dado por el número adimensional de Schmidt:

$$Sc = \frac{\text{transporte de momentum}}{\text{difusión de masa}} = \frac{\nu}{D_{AB}} \quad (22)$$

Para el caso de gases,  $Sc \approx 1$ , mientras que para líquidos varíe entre 500 y 1000. Asimismo, se definen los números de Prandtl y Lewis considerando la difusividad térmica como:

$$Pr = \frac{\text{transporte de momentum}}{\text{difusión de calor}} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (23)$$

$$Le = \frac{\text{difusión de calor}}{\text{difusión de masa}} = \frac{\alpha}{D_{AB}} \quad (24)$$

## Capa límite de transferencia de masa

Supongamos un flujo de capa límite laminar donde la capa de momentum es mucho más gruesa que la de masa. Así,

$$y \sim \delta_c \quad (25)$$

$$u \sim \frac{Uy}{\delta_v} \sim \frac{U\delta_c}{\delta_v} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow v = - \int_0^{\delta_c} \frac{\partial u}{\partial x} dy \sim \frac{U\delta_c^2}{\delta_v L} \quad (27)$$

Ecuación de transferencia de masa (régimen permanente, sin fuentes ni sumideros de masa):

$$u \frac{\partial c_A}{\partial x} + v \frac{\partial c_A}{\partial y} = D_{AB} \left( \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \right). \quad (28)$$

Si  $\hat{c}_A$  es una escala de concentración, se obtiene la ecuación

$$\overbrace{U \frac{\delta_c \hat{c}_A}{L \delta_\nu}}^{(A)} \left( u^* \frac{\partial c_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial c_A^*}{\partial y^*} \right) = D_{AB} \hat{c}_A \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 c_A^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\delta_c^2} \frac{\partial^2 c_A^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (29)$$

$$\approx \underbrace{\frac{D_{AB} \hat{c}_A}{\delta_c^2}}_{(B)} \frac{\partial^2 c_A^*}{\partial y^{*2}} \quad (30)$$

Suponiendo que (A) y (B) son del mismo orden,

$$\frac{\delta_c^3}{\delta_\nu} \sim \frac{D_{AB} L}{U}, \quad (31)$$

de donde

$$\frac{\delta_\nu}{\delta_c} \sim Sc^{1/3} \quad \text{y además} \quad \frac{\delta_c}{L} \sim Re^{-1/2} Sc^{-1/3}, \quad (32)$$

con  $Re = UL/\nu$  y  $Sc = \nu/D_{AB}$ .

## Espesores relativos

$$\frac{\delta_v}{\delta_T} \approx Pr^{1/3} \quad (33)$$

$$\frac{\delta_v}{\delta_c} \approx Sc^{1/3} \quad (34)$$

$$\frac{\delta_T}{\delta_c} \approx Le^{1/3} \quad (35)$$

**Propuesto:** Determinar el número de Schmidt para vapor de agua en aire a 25 °C. A dicha temperatura,  $v_{\text{aire}} = 1.58 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  y

$D_{\text{agua-aire}} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

*Resp.:*  $Sc = 0.61$ .

## Escalamiento para coeficiente convectivo

De (21) (en concentración molar),

$$-J_A \approx D_{AB} \frac{\Delta c_A}{\delta_c} \sim h \Delta c_A, \quad (36)$$

de donde,

$$h \sim \frac{D_{AB}}{\delta_c} \quad (37)$$

$$\sim \frac{D_{AB}}{L} Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (38)$$

$$\sim \frac{D_{AB}}{\delta_v} Re^{-1/2} Sc^{1/3} \quad (39)$$

$$\sim Re^{-1/2} Sc^{1/3}. \quad (40)$$

Cálculo de  $h$  para  $Re < 5 \times 10^5$  (gases)

Para  $Re < 5 \times 10^5$ , con  $0.6 \leq Sc \leq 50$ , se tiene que el coeficiente local de transferencia de masa para una placa plana está dado por:

$$h_m \text{ (m/s)} = 0.332 \cdot D_{AB} \cdot Sc^{1/3} \sqrt{\frac{\nu}{vx}}, \quad (41)$$

donde  $x$  es la distancia desde el borde de ataque de la placa y  $\nu$  es la velocidad del flujo.

## valor promediado en la longitudinal

Integrando entre 0 y  $L$ ,

$$\bar{h}_m = \frac{1}{L} \int_0^L h_m(x) dx = 0.664 \cdot D_{AB} \cdot Sc^{1/3} \sqrt{\frac{\nu}{\nu L}} \quad (42)$$

## Ejemplo

Determine la tasa de evaporación de agua de una pequeña piscina cuadrada de 2 m de lado. La temperatura del agua, así como la del aire es de 27 °C y el viento sopla a 1.5 m/s. El aire ambiente tiene una humedad relativa de un 50 %.

*Solución:*

Primero verificamos si el número de Reynolds del flujo permite usar (41):

$$\begin{aligned} Re &= \frac{2\text{ m} \cdot 1.5\text{ m/s}}{1.67 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}} \\ &= 1.8 \times 10^5 < 5 \times 10^5 \quad (\text{OK}) \end{aligned} \quad (43)$$

Además,  $Sc = 0.61 \in [0.5, 50]$ , luego, empleamos (42) para escribir la transferencia de masa entre la superficie libre y el aire:

$$\bar{h}_m = 0.664 \cdot 2.6 \times 10^{-5} \cdot 0.61^{1/3} \sqrt{\frac{1.5 \text{ m/s}}{1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 2 \text{ m}}} = 0.0031 \text{ m/s}. \quad (44)$$

La presión de saturación de vapor en la interfase a  $27^\circ\text{C}$  es 3580 Pa (valor de tabla). Luego, empleando la ley de gases ideales,

$$[\text{H}_2\text{O}]_{y=0} = \frac{p_{\text{sat}}}{RT} = \frac{3580 \text{ Pa}}{8.3144 \text{ J/mol K} \cdot 300 \text{ K}} = 1.43 \text{ mol/m}^3. \quad (45)$$

Por otro lado, como sabemos que la humedad relativa es de un 50 %, se tiene que la presión de vapor de agua será un 50 % de la presión de saturación (i.e. 1790 Pa). Con esto,

$$\begin{aligned} J_{\text{H}_2\text{O}}A &= [1.43 - (1.43 \cdot 0.5)](\text{mol}/\text{m}^3) \cdot 0.0031 \text{ m}/\text{s} \cdot 4 \text{ m}^2 \\ &= 8.887 \times 10^{-3} \text{ mol}/\text{s}. \end{aligned} \quad (46)$$

Convirtiendo a kg/h a través de la masa molecular del agua (18 g/mol), se encuentra un flujo másico de 0.57 kg/h o, en volumen, considerando el área de la piscina, 3.36 mm/día.

## Versión adimensional: el número de Sherwood

Aunque exista una ecuación exacta para el flujo laminar sobre una placa plana, esta es más una excepción que una regla. Para muchas situaciones prácticas es muy difícil describir el flujo matemáticamente y dependemos de relaciones empíricas para determinar coeficientes de transferencia de masa. Para hacer esto se encontró útil definir el número de Sherwood ( $Sh$ ). El número de Sherwood es un número adimensional que puede ser usado para relacionar los coeficientes de transferencia de masa con otros números adimensionales tales como  $Re$  y  $Sc$ , El número de Sherwood es correspondiente con el número de Nusselt.

Las propiedades físicas de ambos números son aquellas relativas al fluido. Para una cañería, cilindro o esfera, la longitud característica ( $x$ ) es el diámetro. En el caso de una placa plana, la distancia desde el borde. El número de Sherwood proporciona una medida de la importancia relativa de la transferencia de masa por convección versus la difusión. Un gran número de  $Sh$  implica que la contribución convectiva a la transferencia de masa es mayor que aquella debida a la difusión. Similarmente, un número de Nusselt grande indica la predominancia de la transferencia convectiva de calor.

## Comparación

Número	Significado físico	Definición	Gradiente dimensional
Nusselt	Gradiente de temperatura adimensional en la superficie	$Nu = \frac{h \cdot x}{k}$	$Nu \approx \frac{-\left(\frac{dT}{dy}\right)_{y=0}}{\left(\frac{T_s - T_f}{x}\right)}$
Sherwood	Gradiente de concentración adimensional en la superficie	$Sh = \frac{h_m \cdot x}{D_{AB}}$	$Sh \approx \frac{-\left(\frac{d[A]}{dy}\right)_{y=0}}{\left(\frac{[A]_s - [A]_f}{x}\right)}$

## Número de Sherwood local

El número de Sherwood local para una placa plana se define como:

$$Sh(x) = \frac{h_m(x)x}{D_{AB}} = 0.332 \cdot Sc^{1/3} \cdot Re_x^{1/2}. \quad (47)$$

Con eso, es posible calcular el coeficiente local de transferencia de masa en función de la distancia ( $x$ ) desde el borde inicial. El número promedio  $\bar{Sh}$  sobre una longitud  $L$  de una placa plana es:

$$\bar{Sh} = \frac{\bar{h}_m L}{D_{AB}} = 0.664 \cdot Sc^{1/3} \cdot Re_L^{1/2}. \quad (48)$$

De la razón entre los coeficientes de calor y masa se tiene:

$$\frac{h}{h_m} = \frac{kPr^{1/3}}{D_{AB}Sc^{1/3}} \quad (49)$$

## Números de Sherwood (laminar y turbulento)

<i>Situación</i>	<i>Condición</i>	$Sh = h_m \cdot D / D_{AB}$ ; cañería $Sh = h_m \cdot L / D_{AB}$ ; placa
<i>Cañería - laminar</i>	<i>Concentración constante en la superficie</i>	$1,86 (Re \cdot Sc \cdot D / L)^{1/3}$
<i>Cañería - turbulento</i>		$0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{1/3}$
<i>Placa plana - laminar</i> $(Re < 3 \cdot 10^5)$	<i>Local (x); <math>0,6 &lt; Sc &lt; 50</math></i> <i>Promedio (L); <math>0,6 &lt; Sc &lt; 50</math></i>	$0,332 \cdot Re(x)^{0,5} \cdot Sc^{1/3}$ $0,664 \cdot Re(L)^{0,5} \cdot Sc^{1/3}$
<i>Placa plana – turbulento</i> $5 \cdot 10^5 < Re < 10^8$	<i>Local (x); <math>0,6 &lt; Sc &lt; 3000</math></i> <i>Promedio (L); <math>0,6 &lt; Sc &lt; 3000</math></i>	$0,029 \cdot Re(x)^{0,8} \cdot Sc^{1/3}$ $0,037 \cdot Re(L)^{0,8} \cdot Sc^{1/3}$