MA4230: Análisis Real I
Profesor: Rodolfo Gutiérrez
Auxiliares: Matías Morales & Nicolás Toro

Auxiliar 6

P1. Una coleccion $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tiene la **Propiedad de la Interseccion Finita (PIF)** si para cada subcoleccion finita

$$\{C_1, ..., C_n\}$$

de $\mathcal{C}$, la interseccion $C_1 \cap ... \cap C_n$ es no vacia.

Teorema: Sea X un espacio topologico. X es compacto si y solo si para cada coleccion $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados de X que tengan la PIF, la interseccion $\cap_{C \in \mathcal{C}} C$ de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía.

a) Demuestre el teorema. Para ello, considere una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y considere:

$$\mathcal{C} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

la colección de sus complementos. Demuestre los siguientes enunciados

(i) $\mathcal{A}$ es una colección de abiertos si y solo si $\mathcal{C}$ es una colección de cerrados

(ii) La colección $\mathcal{A}$ cubre X si y solo si la intersección $\cap_{C \in \mathcal{C}} C$ de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es vacia

(iii) La subcolección finita $\{A_1, ...A_n\}$ de $\mathcal{A}$ cubre X si y solo si la intersección de sus respectivos elementos $C_i = X \setminus A_i$ de $\mathcal{C}$ es vacía.

y concluya el teorema.

b) Concluya que dado una ***secuencia encajonada*** $C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_n \supset C_{n+1} \supset ...$ de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio compacto X, se tendrá que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

es no vacio.

c) Sea (X, d) un espacio metrico compacto y $(K_n)_n$ una secuencia encajonada de cerrados. Definamos:

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

Pruebe que

$$\text{diam}(K_n) \to \text{diam}(K)$$

P2. **Teorema** (Brujis&Erdos, 1951) Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $k \in \mathbb{N}$. Si cada subgrafo finito de G tiene numero cromático a lo mas k, entonces G también.

Indicacion: Puede usar el Teorema de Tychonoff, el cual enuncia que el espacio producto de espacios compactos, es un espacio compacto con la topologia producto.