Video B2 Análisis. Demostraciones: Buen Ordenamiento implica Axioma de Elección y Zorn implica Buen Ordenamiento

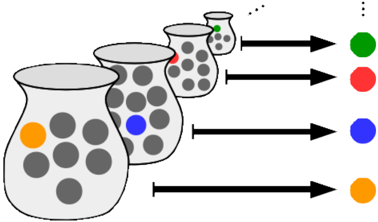
Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

April 12, 2021

Axioma XI de Elección (Zermelo): Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos disjuntos, cada uno no vacío, entonces

Existe un conjunto A formado por exactamente un elemento a_λ de cada A_λ.



Elección equivale a que existe función de elección f:

$$f : \Lambda \to \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \quad \forall\lambda, f(\lambda) \in A_\lambda.$$

Una **cadena** B **en** $(A, \leq)$ es un subconjunto de A tal que $(B, \leq)$ es ahora **orden total**.

Un orden parcial $\leq$ en A se dice **buen orden (o A está bien ordenado, o A es ordinal)**, si

todo subconjunto no vacío B de A posee un primer elemento para $\leq$, es decir

$$\exists x_0 \in B \quad \text{tq} \quad \forall y \in B, \quad x_0 \leq y.$$

Lema de Zorn. Sea $(A, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena $B \subseteq A$ posee cota superior:

$$\exists\ z = z(B) \in A \quad \text{tal que} \quad \forall\ y \in B, \quad y \leq z.$$

Entonces A posee un elemento maximal, es decir

$$\exists\ z^* \in A \quad \text{tal que} \quad \forall\ y \in A, \quad y \leq z^*.$$

Teorema fundamental. Son equivalentes:

1. Axioma de Elección
2. Lema de Zorn
3. Principio de buen ordenamiento: todo conjunto $A \neq \emptyset$ puede ser **bien ordenado**.

Demostración Buen ordenamiento implica Elección:

Sea $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos disjuntos no vacíos. Sea $\mathscr{A} := \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

Por buen ordenamiento, $\mathscr{A}$ **puede ser bien ordenado**. En particular, todo subconjunto B de $\mathscr{A}$ posee primer elemento.

Luego, $B = A_\lambda$ posee un primer elemento, digamos a_λ.
$A := \{a_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ satisface lo pedido.

Demostración de Zorn implica Buen ordenamiento:

Ésta demo es mucho más larga (técnica), pero no difícil. Para ello necesitamos introducir la noción de **Ideal**.

Sea X un conjunto no vacío. Usando Zorn, *vamos a "construir" un buen ordenamiento* $\leq$ en X.

Sea $\mathscr{L}$ la clase de subconjuntos bien ordenados de X :

$$\mathscr{L} := \{(A, \leq) \ : \ A \subseteq X \ \text{ y } \ \leq \text{bien ordena } A\}.$$

$\mathscr{L}$ es no vacío porque para $x_0 \in X$ fijo, $(\{x_0\}, =)$ es bien ordenado.

Pregunta: Es $\mathscr{L}$ conjunto?

Para definir un orden en $\mathscr{L}$ necesitaremos la noción de IDEAL.

Ideal: Sea $(A, \leq)$ un orden parcial.

$S \subseteq A$ es IDEAL si: $\quad x \in S$, $y \in A$, e $y \leq x$ implican $y \in S$.

Por ejemplo, en $(\mathbb{N}, \leq)$, $S = \{0,1,2,3\}$ es ideal, pero $S = \{2,3,4,10\}$ no lo es, "porque tiene hoyos".

$\emptyset$ y A son siempre ideales. En $([0,\infty), \leq)$, $[0,1]$ es ideal, pero $[1,2]$ no lo es.
Vamos a introducir en $\mathscr{L}$ el siguiente **orden parcial particular**:

$$(A_1, \leq_1) \leq (A_2, \leq_2) \iff A_1 \text{ es } \textbf{ideal} \text{ de } A_2 \text{ y}$$
$$\leq_2 \Big|_{A_1} = \leq_1 \quad (\leq_2 \text{ restringida a } A_1 \text{ es } \leq_1).$$

(En particular, $A_1 \subseteq A_2$, y además $x \leq_2 y \iff x \leq_1 y$ si $x, y \in A_1$.)

$$\mathscr{L} := \{(A, \leq) \ : \ A \subseteq X \ \text{ y } \ \leq \text{bien ordena } A\}.$$

$$(A_1, \leq_1) \ \leq_{\mathscr{L}} (A_2, \leq_2) \iff A_1 \text{ ideal de } A_2 \text{ y}$$

$$\leq_2 \Big|_{A_1} = \ \leq_1 \quad (\leq_2 \text{ restringida a } A_1 \text{ es } \leq_1).$$

Probaremos que

1. $\leq_{\mathscr{L}}$ es un orden parcial;
2. Toda cadena en $(\mathscr{L}, \leq_{\mathscr{L}})$ posee una cota superior;
3. (Zorn) $\mathscr{L}$ posee elemento maximal, denotado $(A_m, \leq_m) \in \mathscr{L}$ (gratis);
4. Ese elemento maximal es $(X, \leq_m)$. FIN.

$$(A_1, \leq_1) \ \leq_{\mathscr{L}} (A_2, \leq_2) \iff A_1 \text{ ideal de } A_2 \text{ y}$$
$$\leq_2 \Big|_{A_1} = \leq_1 \quad (\leq_2 \text{ restringida a } A_1 \text{ es } \leq_1).$$

Observaciones:

1. Ojo que sobre $\mathscr{L}$ NO se coloca la "inclusión" como orden. Se necesita más.
2. Se necesita trabajar $\leq_{\mathscr{L}}$ a través de ideales (y no solo que $A_1 \subseteq A_2$) porque los ideales irán conservando el orden.

$\leq_{\mathscr{L}}$ **es un orden parcial**.

1. Refleja: $(A_1, \leq_1) \ \leq_{\mathscr{L}} (A_1, \leq_1)$ OK.
2. Antisimétrica: $(A_1, \leq_1) \ \leq_{\mathscr{L}} (A_2, \leq_2)$ y $(A_2, \leq_2) \ \leq_{\mathscr{L}} (A_1, \leq_1)$, entonces
$$A_1 = A_2, \qquad \leq_1 = \leq_2 .$$
3. Transitiva: ejercicio.

Toda cadena en $\mathscr{L}$ posee una cota superior.

$$\mathscr{L} := \{(A, \leq) \ : \ A \subseteq X \text{ y } \leq \text{bien ordena } A\}.$$

Sea $(A_\lambda, \leq_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ cadena en $\mathscr{L}$ para $\leq_{\mathscr{L}}$. Es decir,

$$(A_\lambda, \leq_\lambda) \leq_{\mathscr{L}} (A_\mu, \leq_\mu)$$

o bien

$$(A_\mu, \leq_\mu) \leq_{\mathscr{L}} (A_\lambda, \leq_\lambda).$$

Proponemos como cota superior $Z := \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq X$, con el orden

$$x \leq y \iff x \leq_\lambda y, \quad \text{si } x, y \in A_\lambda .$$

PDQ:

1. $\leq$ está bien definido (no depende de λ),
2. bien ordena Z (es decir $(Z,\leq)\in\mathscr{L}$),
3. y que es cota superior de la cadena.

$$x \leq y \iff x \leq_\lambda y, \quad \text{si } x, y \in A_\lambda.$$

$\leq$ **bien definida**. *Todos comparables.*

Si $x, y \in Z = \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, supongamos $x \in A_\lambda$ e $y \in A_\mu$.

Por ser cadena en $\leq_{\mathscr{L}}$, tenemos $A_\lambda \subseteq A_\mu$ o lo contrario (son ideales, luego subconjuntos).

En cualquier caso, x, y son comparables o bien con $\leq_\lambda$ o bien con $\leq_\mu$.

$$x \le y \iff x \le_\lambda y, \quad \text{si } x, y \in A_\lambda.$$

$\le$ **bien definida**. *Duplicidad de $\lambda's$.*

Si existen dos λ, λ' para comparar x, y,

$$\begin{aligned} x \le_\lambda y, &\quad \text{si } x, y \in A_\lambda, \\ x \le_{\lambda'} y, &\quad \text{si } x, y \in A'_\lambda. \end{aligned}$$

Entonces $x, y \in A_\lambda \cap A'_\lambda$. Como A_λ debe ser ideal de $A_{\lambda'}$ o viceversa, podemos asumir $x, y \in A_\lambda \subseteq A_{\lambda'}$, $\le_{\lambda'}\Big|_{A_\lambda} = \le_\lambda$.

Luego, $x \le_{\lambda'} y$ implica $x \le_\lambda y$ y viceversa.

$\leq$ **bien ordena** Z. Sea $C \subset Z$ conjunto no vacío. PDQ posee primer elemento.

Sea $x \in C$ y λ tal que $x \in A_\lambda$. ($Z = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$)

Sea $C_\lambda := C \cap A_\lambda \neq \emptyset$. Por ser subconjunto de A_λ bien ordenado, C_λ posee primer elemento, $b \in C$.

PDQ b es primer elemento de C.

b **es primer elemento de** C**.** Sea $y \in C$. Dos casos: $y \in A_\lambda$, o bien $y \in A_\mu \backslash A_\lambda$, $\mu \neq \lambda$.

En el primer caso, $y \in C_\lambda = C \cap A_\lambda$, luego $b \leq y$. OK.

En el segundo caso, como A_λ es ideal en A_μ, y $b \in A_\lambda$, si $z \in A_\mu \backslash A_\lambda$ es tal que $z \leq b$, entonces $z \in A_\lambda$, contradicción. Luego, $b \leq z$. Tomando $z = y$, se concluye. OK.

Si ahora b' es otra cota inferior de C, es cota inferior de $C_\lambda = C \cap A_\lambda$, que posee primer elemento b. Luego, $b' \leq b$. FIN.

$$\mathscr{L} := \{(A, \leq) \ : \ A \subseteq X \text{ y } \leq \text{bien ordena } A\}.$$

$$x \leq y \iff x \leq_\lambda y, \quad \text{si } x, y \in A_\lambda.$$

Z **es cota superior**.

Como $\leq$ es una extensión de cada $\leq_\lambda$, esa parte está lista. Basta probar que cada A_λ es ideal en Z.

Sea $x \in A_\lambda$, $y \in Z$, $y \leq x$. Luego, $y \in A_\mu$, dos casos: A_λ ideal de A_μ, o viceversa.

En el primer caso, $y \in A_\lambda$ gratis (ideal). En el segundo, $y \in A_\lambda$ más gratis aún. OK.

Ese elemento maximal es $(X, \leq_m)$.

Si $A_m \neq X$, existe $a \in X \setminus A_m$.

Sea $\tilde{A}_m := A_m \cup \{a\}$. Definamos en $\tilde{A}_m$ el orden parcial

$$\tilde{x} \,\widetilde{\leq_m}\, \tilde{y} \iff \begin{cases} \tilde{x} \leq_m \tilde{y}, & \tilde{x}, \tilde{y} \in A_m, \\ Falso, & \tilde{x} = a,\ \tilde{y} \in A_m, \\ Verdadero, & \tilde{x} \,\widetilde{\leq_m}\, a. \end{cases}$$

Ejercicio: Ver que $\widetilde{\leq_m}$ es orden parcial y $\widetilde{\leq_m}$ extiende a $\leq_m$ de A_m a $\tilde{A}_m$.

$$\mathscr{L} := \{(A, \leq) \ : \ A \subseteq X \text{ y } \leq \text{bien ordena } A\}.$$

Ahora, $(\tilde{A}_m, \widetilde{\leq_m}) \in \mathscr{L}$: $\tilde{A}_m = A_m \cup \{a\} \subseteq X$, OK.

$\widetilde{\leq_m}$ buen orden: si $B \subseteq \tilde{A}_m$, como siempre $\tilde{x} \ \widetilde{\leq_m} \ a$, el primer elemento es o bien a, o bien el primer elemento de $B \cap A_m$. OK.

A_m es ideal de $\tilde{A}_m$: Si $x \in A_m$, $y \in \tilde{A}_m$, $y \ \widetilde{\leq_m} \ x$, como $x \neq a$, $y \in A_m$ necesariamente. OK.

Luego, A_m no es maximal, contradicción.

Próximo video. Demostración de Elección implica Zorn.