Clase B3 Análisis: Demostraciones: Axioma de Elección implica Zorn

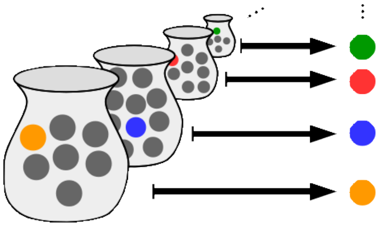
Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2020

April 12, 2021

Axioma XI de Elección (Zermelo): Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos disjuntos, cada uno no vacío, entonces

Existe un conjunto A formado por exactamente un elemento a_λ de cada A_λ.



Elección equivale a que existe función de elección f:

$$f:\Lambda\to\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,\quad \forall\lambda,\, f(\lambda)\in A_\lambda.$$

Una **cadena** B **en** $(A, \leq)$ es un subconjunto de A tal que $(B, \leq)$ es ahora **orden total**.

Lema de Zorn. Sea $(A, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena $B \subseteq A$ posee cota superior:

$$\exists\ z = z(B) \in A \quad \text{tal que} \quad \forall\ y \in B, \quad y \leq z.$$

Entonces A posee un elemento maximal, es decir

$$\exists\ z^* \in A \quad \text{tal que} \quad \forall\ y \in A, \quad y \leq z^*.$$

Teorema fundamental. Son equivalentes:

1. Axioma de Elección
2. Lema de Zorn
3. Principio de buen ordenamiento: todo conjunto $A \neq \emptyset$ puede ser **bien ordenado**.

Demostración de Elección implica Zorn.

Sea $(X, \leq)$ un orden parcial tq toda cadena admite cota superior.

PDQ X posee elemento maximal para $\leq$.

Por contradicción, supongamos que NO existe un elemento maximal.
(Pensar en $(\mathbb{N}, \leq)$!)

$$\sim (\exists\, z \in X \quad \text{tal que} \quad \forall\, b \in X, \quad b \leq z).$$

Luego, para cualquier $z \in X$ **existe** $b \in X$ **con** $\sim (b \leq z) \iff b > z$**.**

En particular, toda cadena C en X posee una cota superior **estricta** (porque posee cota superior por hipótesis, pero esa cota es mayorada estrictamente por otro elemento también).

Luego, para toda cadena C en X,

$$C^* := \{b \in X \ : \ x < b \ \ \forall x \in C\} \neq \emptyset$$

y $C^* \cap C = \emptyset$.

Ejemplo: en $(\mathbb{N}, \leq)$, si $C := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ cadena, entonces $C^* := \{n, n+1, \ldots\}$.

Usando Elección, para cada C cadena de X podemos escoger un elemento $g(C)$ en C^*.

Ejemplo: en $(\mathbb{N}, \leq)$, si $C := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ cadena, entonces una g es $g(C) := n \in C^* := \{n, n+1, \ldots\}$.

Definiciones. Intervalo inicial. Dado $B \subseteq X$, $x \in X$, definimos su **intervalo inicial hasta** x como

$$S_B(x) := \{y \in B \ : \ y < x\}.$$

Por ejemplo, en $(\mathbb{N}, \leq)$,

$$S_{\mathbb{N}}(5) = \{0,1,2,3,4\}, \quad S_{impares}(8) = \{1,3,5,7\}.$$

En $(\mathbb{R}, \leq)$,

$$S_{\mathbb{R}}(3) = (-\infty, 3), \quad S_{[0,1]}(1) = [0,1), \quad S_{[1,2]}(3) = [1,2].$$

Ejercicios. Suponga que $B = X$.

1. Probar que $\emptyset$ es intervalo inicial, pero X no lo es.
2. Probar que todo intervalo inicial es IDEAL, y todo ideal distinto de X es intervalo inicial.
3. Si B está totalmente ordenado, entonces $S_B(x)$ es cadena.

Definiciones. Conjunto Especial. Dado $m \in X$, diremos que $B \subseteq X$ es especial c/r a m si

1. $(B, \leq)$ está bien ordenado ($\implies B$ cadena),
2. m es primer elemento de B ($m \in B$!),
3. para todo $x \in B$, $x \neq m$, $x = g(S_B(x))$.

La última condición nos dice que para el intervalo inicial $S_B(x)$ (**que es cadena**), la función de elección g **escoge** su borde superior, x.

Ejemplo de Conjunto Especial. en $X = \mathbb{N}$ con $\leq$, $m = 0$ y $B = \mathbb{N}$ es especial:

1. $(B = \mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado,
2. 0 es primer elemento de $\mathbb{N}$,
3. para todo $n \geq 1$, $n = g(\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}) = g(n)$ (g definida antes).

Otro ejemplo: $B = \{pares\}$ y $g(\{0, 2, 4, \ldots, 2n-2\}) = 2n$. Fijemos $m \in X$. Sea G la unión de todos los conjuntos especiales en X c/r a m.

Entonces G también es especial c/r a m.

Esto basta y sobra para concluir una contradicción y terminar la demo. En efecto, notemos primero que G es cadena.

Sea $\hat{G} := G \cup \{g(G)\}$. Entonces $\hat{G}$ es especial también.

$\hat{G} := G \cup \{g(G)\}$ **especial**.

1. m es primer elemento de $\hat{G}$: m es primer elemento de cada especial, por lo tanto lo es de la unión de especiales G. Como $g(G) >$ todos los elementos de G, concluimos que m es primer elemento de $\hat{G}$.

2. $\hat{G}$ bien ordenado: como $g(G) \in G^*$, necesariamente $g(G) >$ todo elemento de G. Luego el buen orden se preserva.

3. Para todo $x \neq m$, $x \in \hat{G}$, $x = g(S_{\hat{G}}(x))$: Dos casos:

a) Si $x = g(G)$,

$$S_{\hat{G}}(x) = \{y \in \hat{G} \ : \ y < g(G)\} = G.$$

Luego, $g(S_{\hat{G}}(x)) = g(G) = x$.

b) Si $x \in G$, como $g(G) >$ todos los elementos de$G$,

$$S_{\hat{G}}(x) = \{y \in \hat{G} \ : \ y < x\} = \{y \in G \ : \ y < x\} = S_G(x).$$

Luego, $g(S_{\hat{G}}(x)) = g(S_G(x)) = x$ (G especial).

Conclusión final. G es el máximo conjunto especial, pero encontramos uno con un elemento más, $\hat{G}$.

Luego, necesariamente $\hat{G} \subseteq G$ y por ende $g(G) \in G$.

Pero g por definición es tal que $g(G) \in G^*$, lo que es contradicción (G es cadena).

Luego, g no puede existir, es decir, X posee elemento maximal. FIN.

Probemos ahora que G, la unión de todos los conjuntos especiales en X, es especial (c/r a m).

1. m es primer elemento. $m \in G$ pues está en cada especial. Si $x \in G$, está en algún especial B, cuyo primer elemento es m: $m \leq x$.

2. G es cadena. Usaremos el siguiente lema muy útil:

Si B, D son especiales $\implies$ B es ideal de D o viceversa.

Usando este lema, si $x, y \in G$, existen B, D espec. tales que $x \in B$ e $y \in D$. Del lema anterior, o bien $x, y \in B$, o bien $x, y \in D$. En ambos casos, al ser especiales B y D tenemos x e y relacionados.

3. G está bien ordenado. Por contradicción: si no es el caso, existe $B := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{k+1} < x_k$ (i.e., sin primer elemento).

Sea B_k especial tal que $x_k \in B_k$. Entonces o bien B_0 es ideal de B_k o al revés.

Caso 1: B_k **ideal en** B_0. Tenemos $x_k \in B_k \subseteq B_0$. OK.

Caso 2: B_0 **ideal en** B_k. Como $x_k < x_0$ si $k \geq 1$, al ser B_0 ideal en B_k, $x_k \in B_0$. OK.

En cualquier caso, $x_k \in B_0$ para todo k. Pero B_0 está bien ordenado, y $B = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_0$ no posee primer elemento, contradicción.

4. Para cualquier $x \in G$, $x \neq m$, $x = g(S_G(x))$.

Sea $B \subseteq G$ especial tal que $x \in B$. Gratis tenemos $S_B(x) \subseteq S_G(x)$.

$\supseteq$. Si ahora $y \in S_G(x)$, y D es especial tal que $y \in D$, entonces $D \subseteq B$ o bien B es ideal en D. En ambos casos $y \in B$ (en el segundo, se usa que $y < x$).

Luego, $y \in S_B(x)$. Concluimos que $S_B(x) = S_G(x)$ por lo que $x = g(S_B(x)) = g(S_G(x))$ (B especial). OK.

Nos falta solamente probar el lema

$$\text{Si } B, D \text{ son especiales } \implies B \text{ es ideal de } D \text{ o viceversa.}$$

IDEA: Sea $E := \{x \in B \cap D \ : \ S_B(x) = S_D(x)\}$.

Probaremos que E es ideal en ambos B y D. Luego probaremos que $E = B$ o $E = D$.

Ejemplo. Pensar en $B = (\{0, 1, 2, \ldots, n\}, \leq)$ y $D = (\{0, 1, 2, \ldots, n+1, n+2\}, \leq)$. Entonces $B \cap D = B$ y si $m \leq n$, se tiene que $S_B(m) = S_D(m) = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Luego, $E = B$.

B, D especiales. Sea $E := \{x \in B \cap D \ : \ S_B(x) = S_D(x)\}$.

1. E ideal en ambos B y D: Sólo probaremos que E es ideal en B (por qué?).

Sea $x \in E$, $y \in B$, $y \leq x$.

a). Si $y = x$, gratis $y \in E$. OK.

b). Si ahora $y < x$, como $y \in B$, $y \in S_B(x)$. Como $x \in E$, $S_B(x) = S_D(x)$. Luego $y \in D$.

Por lo tanto, $y \in B \cap D$.

Falta probar que $S_B(y) = S_D(y)$. Como $y < x$,

$$S_B(y) = \{z \in B \ : \ z < y\} = \{z \in S_B(x) \ : \ z < y\},$$

y como $S_B(x) = S_D(x)$,

$$\{z \in S_B(x) \ : \ z < y\} = \{z \in S_D(x) \ : \ z < y\}.$$

Pero

$$\{z \in S_D(x) \ : \ z < y\} = \{z \in D \ : \ z < y\} = S_D(y),$$

porque al estar en D y $z < y$, se tiene $z < y < x$, esto es, $z \in S_D(x)$.

Concluimos que $y \in E$, i.e., E es ideal de B. OK.

Falta probar que $E = B$ o bien $E = D$.

Si no es el caso, existen v primer elemento de $B \setminus E$ (B bien ordenado), y w primer elemento de $D \setminus E$.

Al ser primeros elementos, $E = S_B(v)$ y $E = S_D(w)$.

Como B y D son especiales, $g(S_B(v)) = v$ y $g(S_D(w)) = w$.

Luego, $g(E) = v = w$. Por lo tanto $v \in B \cap D$, y $S_B(v) = S_D(v)$. Luego $v \in E$. Pero $v \in E = S_B(v)$, lo que implica $v < v$, contradicción. FIN.

Próximo video. Ordinales y Cardinales.