

Video C1 Análisis: Ordinales y Cardinales I

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

April 19, 2021

En la clase anterior terminamos de probar:

Teorema fundamental. Son equivalentes:

1. Axioma de Elección
2. Lema de Zorn
3. Principio de buen ordenamiento: todo conjunto $A \neq \emptyset$ puede ser **bien ordenado**.

Observaciones:

1. Todo conjunto $(X, \leq)$ bien ordenado se dice *ordinal*.
2. $(\mathbb{N}, \leq)$ es un ordinal, denotado ω .

Ejercicio. En los naturales impares, $n \leq_e m \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$, es buen orden?

Definiciones. Intervalo inicial. Dado $B \subseteq X$, $x \in X$, definimos su **intervalo inicial hasta** x como

$$S_B(x) := \{y \in B : y < x\}.$$

Ideal: En $(X, \leq)$ bien ordenado, $S \subseteq X$ es ideal si $x \in S$, $y \in X$, $y \leq x$ implican $y \in S$.

Ejercicios.

1. $\emptyset$ y X son ideales. $\emptyset$ es intervalo inicial, pero X no lo es.
2. Todo ideal $\neq X$ es intervalo inicial, y todo intervalo inicial es un ideal $\neq X$.
3. La $\cap, \cup$ de ideales es ideal.

Principio de Inducción Transfinita (PIT). Sea $(X, \leq)$ conjunto bien ordenado y $A \subseteq X$ tal que

$$(\star) \quad \forall x \in X, \quad (S_X(x) \subset A \implies x \in A).$$

Entonces $A = X$.

Observaciones:

1. El PIT generaliza el ppio. de inducción en los naturales, donde $X = \mathbb{N}$.
2. En $X = \mathbb{N}$, $(\star)$ se lee

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\{0, 1, \dots, n\} \subset A \implies n + 1 \in A).$$

3. PIT funciona sobre cualquier conjunto bien ordenado, por ejemplo $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$.

Demostración: Si $X \setminus A$ es no vacío, posee primer elemento m . Luego, el intervalo inicial hasta m cumple $S_X(m) \subseteq A$, y por ende $m \in A$, contradicción.

Isomorfismo entre órdenes. Diremos que $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ conjuntos bien ordenados son **isomorfos** si existe $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que

1. f es biyección de X_1 a X_2 ;
2. f preserva orden: $x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y)$.

Ejemplo: $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$, donde $n \leq m \implies 2n \leq 2m$.

Propiedades. El mapeo

$$M : (X, \leq) \rightarrow (\{\text{intervalos iniciales en } X\}, \subseteq),$$

tal que $M(x) = S_X(x)$; es isomorfismo entre X y la clase de intervalos iniciales de X .

Demostración. En efecto, si $x \leq y$ claramente $S_X(x) \subseteq S_X(y)$ ($z \leq x \leq y$), luego se preserva el orden.

Si ahora $x \neq y$, se tiene $S_X(x) \neq S_X(y)$, lo que prueba que es inyectiva. En efecto, si $x < y$ entonces $x \in S_X(y)$ (pues $x < y$) pero $x \notin S_X(x)$.

La sobreyectividad es directa de que a cada $S_X(x)$ se le asocia x .

Corolario. La clase de ideales de X está bien ordenada con la inclusión.

Basta notar que

$$\{\text{intervalos iniciales en } X\} \cup \{X\} = \{\text{ideales de } X\},$$

por lo que como $\{X\}$ es el término maximal para la inclusión, se concluye.

Teorema. Si W, X son conjuntos bien ordenados, una y solo una de las siguientes tres son ciertas:

1. W es isomorfo a X ;
2. W es isomorfo a un ideal de X , o bien
3. viceversa.

Dem. Ejercicio.

Ejemplos.

1. $f_1 : \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f_1(n) = n - 1$ es isomorfismo.
2. $\{a, b, c\}$ con $a < b < c$ es isomorfo al ideal $\{0, 1, 2\}$ de $\mathbb{N}$.
3. $\{1, 2, \dots; 0\}$ no es isomorfo a $\mathbb{N}$ (el orden importa!).
4. $W = \mathbb{N}$ es isomorfo a $\{1, 2, 3, \dots\}$, ideal de $X = \{1, 2, 3, \dots; 0\}$ ($f_3(n) = n + 1$, ojo al orden).

Teorema. La clase de todos los conjuntos bien ordenados está bien ordenada con el orden $W_1 \leq W_2 \iff W_1$ es isomorfo a un ideal de W_2 .

Demostración. Ejercicio: probar que es orden total.

Buen ordenamiento: Si $\mathcal{B}$ es una clase no vacía de conjuntos bien ordenados, y si $W_2 \in \mathcal{B}$, cada $W_1 < W_2$ es **isomorfo a un ideal A_1 de W_2** . Como la clase de ideales de W_2 está bien ordenada con la inclusión, existe primer elemento y concluimos.

Pregunta: $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ a qué es isomorfo?

Cardinalidad. Dos conjuntos A, B se dirán **de igual cardinal** si existe $f : A \rightarrow B$ función biyectiva.

Denotamos $|A| = |B|$.

Notar que en la clase universal $\mathcal{U}$, tener igual cardinal es una **relación de equivalencia**:

1. Refleja: $|A| = |A|$.
2. Simétrica: $|A| = |B|$ entonces $|B| = |A|$.
3. Transitiva: $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$ entonces $|A| = |C|$.

(Ejercicio).

Sea $[A]$ la clase de equivalencia de un conjunto A :

$$[A] := \left\{ B \text{ conjunto} : \text{existe } f : A \rightarrow B \text{ biyectiva} \right\}.$$

A esta clase se le denomina el **cardinal de A** .

Notar que $[A]$ podría no ser conjunto.

Solución parche: trabajar siempre con conjuntos, y no mencionar la clase $[A]$ (¿No lo hacemos siempre? Todo conjunto está en la clase universal!)

Obs: Cardinales y ordinales difieren. Por ejemplo,

$$A := \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{y} \quad B := \{1, 2, 3, \dots, 0\}$$

poseen igual cardinal ($f(n) = n$ es biyección), pero son ordinales diferentes (no son isomorfos, el orden importa!).

Notación importante: X conjunto,

$$2^X := \{f : X \rightarrow \{0, 1\}, \text{ } f \text{ función}\} = \mathcal{F}(X, \{0, 1\}).$$

Más general, $A^B := \mathcal{F}(B, A)$ = funciones de B a A .

Teorema: $|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$ (partes de X).

Demostración. La idea es simple. Para cada $A \subseteq X$, sea $1_A(x)$ la función indicatriz del conjunto A , es decir, 1 si $x \in A$, y 0 si no es el caso.

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{P}(X) \rightarrow 2^X$ dada por $\mathcal{F}(A) = 1_A$. Veamos que $\mathcal{F}$ es biyección.

Si $1_A = 1_{A'}$, y si $A \neq A'$, WLOG podemos suponer existe $x \in A$ que no está en A' . Para ese x , $1 = 1_A(x) \neq 1_{A'}(x) = 0$. Luego, $\mathcal{F}$ es inyectiva.

Finalmente, $\mathcal{F}$ es sobre porque a cada $f \in 2^X$, $A := f^{-1}(\{1\})$ es tal que $f = 1_A = \mathcal{F}(A)$.

Definición. $|A| \leq |B|$ si existe $f : A \rightarrow B$ función inyectiva. Si no existe biyección entre A y B , diremos $|A| < |B|$ o $|A| \neq |B|$.

Ejemplos.

- ▶ $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ porque $f(n) = n$ es inyectiva (inyección, embebido).
- ▶ Más en general, si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.
- ▶ $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$ porque $f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = 2, f(2) = 3, f(-2) = 4$, etc. es inyección.

Ejercicio. Si existe $f : A \rightarrow B$ sobre, entonces $|B| \leq |A|$.