Video C2 Análisis: Ordinales y Cardinales 2

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

19 de abril de 2021

Estábamos viendo cardinalidad.

Cardinalidad. Dos conjuntos A, B se dirán **de igual cardinal** si existe $f : A \to B$ función biyectiva.

Denotamos $|A| = |B|$. Ésta es relación de equivalencia.

Clase de equivalencia de un conjunto A:

$$[A] := \Big\{ \ B \text{ conjunto } \ : \ \text{existe } f : A \to B \text{ biyectiva} \Big\}.$$

A esta clase se le denomina el **cardinal de** A.

Teorema Fundamental (Cantor). Para todo conjunto X, $|X| < |2^X|$.

Demostración. La inyección $|X| \leq |2^X|$ es directa: para cada $a \in X$, definimos $\mathscr{F}(a) := 1_{\{a\}} \in 2^X$, que es inyección (verificar).

En lo que sigue, basta ahora considerar $\mathscr{P}(X)$ en lugar de 2^X (por qué?).

Sea $\mathscr{G} : X \to \mathscr{P}(X)$ función cualquiera. Probemos que no puede ser sobre.

Sea $B \subseteq X$ como sigue:

$$B := \{x \in X \ : \ x \notin \mathscr{G}(x)\} \in \mathscr{P}(X).$$

(Conjunto?) Probemos que B NO puede ser imagen por $\mathscr{G}$ de ningún elemento de X.

En efecto, supongamos que existe $a \in X$ tal que $\mathscr{G}(a) = B$. Tenemos dos casos: $a \in B$ y $a \notin B$.

En el primer caso, $a \in B = \mathscr{G}(a)$, pero al estar en B, de la definición, $a \notin \mathscr{G}(a)$, contradicción.

En el segundo caso, como $a \notin B$, se tiene $a \in \mathscr{G}(a) = B$, contradicción de nuevo.

Corolario más importante del sistema solar. $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$.

Más definiciones.

1. $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ = cardinal de $\mathbb{N}$ (aleph 0).
2. Diremos que α cardinal es finito si $\alpha < \aleph_0$.
3. Diremos que α cardinal es numerable si $\alpha \leq \aleph_0$.

Ejercicio. $|n| < |n+1|$, y si $|n| \leq |A| \leq |n+1|$, entonces $|A| = |n|$ o bien $|A| = |n+1|$.

Notación: $n := |n|$.

Teorema. α es finito ssi $\alpha \in \mathbb{N}$.

Obs. $\mathbb{N}$ es de cardinal no finito, pues $\aleph_0 < \aleph_0$ es contradictorio.

Corolario. $\mathbb{N}$ es el primer cardinal no finito.

Demostración del Corolario. Si α es cardinal no finito, $\alpha \geq \aleph_0$, esto es, existe inyección de $\mathbb{N}$ en A, conjunto con cardinal α. Como $\mathbb{N}$ no es finito, se tiene el resultado.

Ejercicio. Probar que A tiene cardinal infinito si existe $B \subset A$ tal que los cardinales de A y B son los mismos.

Teorema. α es finito ssi $\alpha \in \mathbb{N}$.

Demostración del Teorema.

$(\Longleftarrow)$ Sea $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $\alpha = n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \in \mathbb{N}$, entonces la identidad $id : n \to \mathbb{N}$ es inyección. Luego, $n \leq \aleph_0$. Pero además $n < n+1 \leq \aleph_0$, luego $n < \aleph_0$, es decir, es finito.

($\Longrightarrow$) Si ahora α es finito y no está en $\mathbb{N}$, entonces $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, ... (como conjuntos).

Ahora, $\alpha \neq 0$ y $\alpha \geq 0$ implican $1 \leq \alpha$, pero como $\alpha \neq 1$ y no hay cardinal entre 1 y 2 (teorema anterior), $\alpha \geq 2$. Así, inductivamente,

$$\alpha \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea $A \in \alpha = [A]$. Sea $\varphi_n : n \to A$ inyectiva. Se puede escoger φ_n tal que φ_{n+1} es extensión de φ_n (por qué?).

Sea finalmente

$$\varphi := \cup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n : \mathbb{N} \to A$$

(unión creciente). Tenemos que φ es inyectiva, de donde $\aleph_0 \leq \alpha$. Luego, α es infinito.

Teorema (Cantor). $c := |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| =: 2^{\aleph_0}$.

Antes de demostrar este resultado, algunos puntos muy importantes:

Pregunta fundamental de Cantor. Sea $\aleph_1 > \aleph_0$ el primer cardinal por encima de los naturales. Entonces, qué se tiene?

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_1, \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1, \quad 2^{\aleph_0} > \aleph_1?$$

Hipótesis del continuo (CH):

Entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$ no hay ningún otro cardinal diferente, esto es $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Dicho de otra forma, si $\aleph_0 \leq \alpha \leq 2^{\aleph_0}$, entonces

$$\alpha = \aleph_0 \quad \text{o bien} \quad \alpha = 2^{\aleph_0}.$$

Gödel demostró primero que si (ZF) es consistente, entonces (ZF) + (CH) también lo es.

Cohen demostró después que si (ZF) es consistente, entonces (ZF) + ~(CH) también lo es.

En otras palabras, (CH) es independiente de los axiomas de conjuntos !!!.

(ZF) se puede cambiar por (NBG) sin problemas.

El mundo escogió vivir pensando que (CH) es cierta.

Demostración del teorema de Cantor.

Primero probaremos $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$. Para ello, a cada $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$f(A) := m_0 \sum_{i \in A} 2^{-i} \in \mathbb{R},$$

con $m_0 = 1$ si A es finito, $m_0 = -1$ si A es infinito.

Entonces $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ **es inyectiva** (representación binaria de los naturales).

En efecto, si $f(A) = f(B)$, pero $A \neq B$, esencialmente tenemos 4 casos: $A \subset B$, $B \subset A$, $A \cap B = \emptyset$ y $A \cap B \neq \emptyset$.

En los dos primeros es fácil ver que necesariamente $f(A) \neq f(B)$, porque o A o B tienen más elementos que el otro conjunto.

En el tercero, si n_0 es el primer natural que está en $A \cup B$, entonces notar que $\sum_{i \geq n_0+1} 2^{-i} = 2^{-n_0}$.

Si B fuese $\{n_0 + 1, \ldots\}$ entonces sería infinito y el $m_0 = -1$, de donde $f(A) \neq f(B)$. Si B tiene menos elementos, entonces $f(B) < 2^{-n_0} \leq f(A)$. El caso recíproco es idéntico.

Finalmente, el caso $A \cap B \neq \emptyset$ queda de ejercicio.

Probemos ahora que $|\mathscr{P}(\mathbb{Z})| \geq |\mathbb{R}|$ (por qué es suficiente?). Para ello, a cada $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$g(x) := \{i \in \mathbb{Z} \ : \ x = (x_i), \quad x_i = 1\}.$$

Aquí, x_i es el i-ésimo dígito de la **expansión binaria** de x.
Por ejemplo,

$$x = 2{,}5 = 2 + \frac{1}{2} = 2^1 + 2^{-1} \implies x_1 = 1, \quad x_{-1} = 1, \quad x_{j \neq \pm 1} = 0.$$

Luego, $g(x) = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Asimismo, $g(3) = \{0, 1\}$, porque $3 = 2^1 + 2^0$, luego, $x_0 = x_1 = 1$.

Veamos que g es inyectiva: Si $x \neq y$, sus expansiones binarias son diferentes (verificar!). Luego, $g(x) \neq g(y)$.

`https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_binario`.

Ejercicios.

1. La unión numerable de conjuntos numerables es numerable (ya hecho en clases).
2. Los polinomios reales a coeficientes enteros de grado menor que n fijo, es un conjunto numerable.
3. Si A, B son numerables, $A \times B$ también.

Definiciones. Dados A, B conjuntos, $\alpha = [A]$, $\beta = [B]$,

1. $\alpha + \beta := |A \cup B|$,
2. $\alpha\beta := |A \times B|$,
3. $\alpha^\beta := |A^B|$.

Ejercicio: $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$ y $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta . \gamma}$.

En auxiliar se verá que si α es infinito, $\alpha . \alpha = \alpha$. En particular,

$$c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c.$$

Luego, el cardinal de las sucesiones reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es c.

Próximo video. Topologías.