

Video D1 Análisis: Topología I

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

23 de abril de 2021

En esta nueva parte del curso, comenzaremos a estudiar los **espacios topológicos**, la base de todo el Análisis Matemático.

La idea de las topologías es capturar, de la forma más simple posible, **formas y figuras de conjuntos**, sobre la base de que las formas están codificadas en la cantidad de subconjuntos abiertos que posee el conjunto.

Definición. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia no vacía de subconjuntos de X .

Diremos que τ es una **topología sobre X** si se cumplen

1. $\emptyset$ y X están en τ ;
2. si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$;
3. si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ es una familia arbitraria, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman **abiertos**, y (X, τ) **espacio topológico**.

La intersección en el punto 2 se puede reemplazar por **cualquier familia finita de abiertos, pero no por una numerable**. Ejemplo:

$A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ que intersectan $\{0\}$, que no es abierto en $\mathbb{R}$.

Ejemplos de topologías:

1. En cualquier X , $\tau := \{ \emptyset, X \}$ es topología (**la grosera o indiscreta**, o más pequeña en el sentido de la inclusión).
2. En cualquier X , $\tau := \mathcal{P}(X)$ es la llamada **topología discreta** de X , la más grande posible topología sobre X .
3. En $X = \{0, 1\}$, $\tau := \{ \emptyset, \{0\}, X \}$ es la llamada **topología de Sierpinski**, muy útil en contraejemplos.

Ejercicios. Sea $X \neq \emptyset$ conjunto.

1. Si $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de topologías sobre X , entonces $\cap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ también es topología en X (la más grande incluida en cada τ_λ).
2. Por qué lo anterior no contradice el ejemplo de intersección numerable de abiertos?
3. La unión de topologías **no es necesariamente topología** (dé un ejemplo).
4. Por qué lo anterior no contradice la propiedad topológica de unión arbitraria de abiertos?

Ejemplo importante. En $\mathbb{R}$, definimos la **topología canónica** τ_c como

$$A \in \tau_c \iff \text{para todo } x \in A, \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A.$$

(A es abierto si en cada punto x de A es posible incluir un intervalo abierto, incluido en A .)

Veamos que τ_c es topología:

1. $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ están en τ_c ; **OK.**
2. si $A, B \in \tau_c$, entonces $A \cap B \in \tau_c$;
3. si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau_c$, entonces $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_c$. **OK.**

Veamos 2.

PDQ: si $A, B \in \tau_c$, entonces $A \cap B \in \tau_c$.

Si $x \in A \cap B$, entonces está en A y en B .

Para A , tenemos $(x - \varepsilon_A, x + \varepsilon_A) \subseteq A$. Para B , tenemos $(x - \varepsilon_B, x + \varepsilon_B) \subseteq B$.

Tomando $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$, tenemos $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$, lo pedido.

Definición. Dado $X \neq \emptyset$ y τ_1, τ_2 topologías sobre X , diremos que τ_1 es **más fina que** τ_2 si se tiene $\tau_2 \subseteq \tau_1$. (Igual que con las particiones en sumas de Riemann.)

Ejemplo. Siempre $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ es más fina que cualquier otra topología sobre X .

Más ejercicios. En $X = \mathbb{R}$, sean

$$\tau_+ := \{ A \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (x - \varepsilon, \infty) \subseteq A \},$$

(abiertos semi-infinitos hacia infinito), y

$$\tau_- := \{ A \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (-\infty, x + \varepsilon) \subseteq A \},$$

(abiertos semi-infinitos hacia menos infinito).

Probar que $\tau_+ \subseteq \tau_c$ y $\tau_- \subseteq \tau_c$ (τ_c topología canónica de $\mathbb{R}$), y que $\tau_+ \cap \tau_- = \tau_g$ (topología grosera de $\mathbb{R}$).

Definición. Sea X no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{A})$ a la **topología inducida por $\mathcal{A}$** , es decir la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{A}$:

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap \{ \tau : \tau \text{ top. en } X, \mathcal{A} \subseteq \tau \}.$$

Además, es la **topología menos fina** (más pequeña) que contiene a $\mathcal{A}$ (ejercicio).

Por ejemplo,

1. Si $\mathcal{A} = \tau$ es topología en X , $\sigma(\tau) = \tau$,
2. Si $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}\}$ en $X = \{0, 1\}$, entonces sólo $\{\emptyset, \{0\}, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son las topologías que contienen a $\mathcal{A}$. Luego,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, X\} = \text{Sierpinski}.$$

3. $\sigma(\tau_+ \cup \tau_-) = \tau_c$ (ejercicio).

Último ejemplo: En $X = \mathbb{R}^d$, la topología canónica de CVV:

$$\tau_c := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(x, \varepsilon) \subseteq A\},$$

donde $B(x, \varepsilon)$ son las bolas abiertas

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < \varepsilon\}, \quad |z| := \sqrt{\sum_{j=1}^d z_j^2}.$$

Notar que τ_c equivale a $\tilde{\tau}_c$, donde

$$\tilde{\tau}_c := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \overline{B}(x, \varepsilon) \subseteq A\},$$

y donde $\overline{B}(x, \varepsilon)$ son las bolas cerradas

$$\overline{B}(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq \varepsilon\}.$$

Esto viene de las desigualdades $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$ y $\overline{B}(x, \varepsilon/2) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Definición. Dado X conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ función, diremos que d es **distancia o métrica** si se cumple para cualquier $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \implies x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El par (X, d) se denomina **Espacio Métrico**.

Ejemplos:

1. $X = \mathbb{R}^d$ con $d(x, y) := |x - y|$.
2. X cualquiera con $d(x, y) := 0$ si $x = y$, y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.
(Verificar!)
3. Cualquier espacio vectorial normado (ver próximo slide).

Veremos más ejemplos avanzando en este capítulo.

Un caso particular de espacio normado lo da el **Espacio vectorial normado**. Si X es e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una norma sobre X es una función

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para todo $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cada norma induce una distancia $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$.

A $(X, \|\cdot\|)$ se le denomina **Espacio Vectorial Normado** (evn).

Ejemplo clásico: $X = \mathbb{R}^d$ con $\|x\| := |x|$ (norma Euclideana).

Todo espacio métrico (X, d) posee una topología asociada, denominada **topología métrica**, definida como

$$\tau_{dist} := \{A \subseteq X : \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B_d(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Aquí,

$$B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

(igual que en $\mathbb{R}^d$!)

Próximo video. Topologías 2: bases de abiertos.