Video D2 Análisis: Topología II

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

23 de abril de 2021

Habíamos visto la noción de topología:

Definición. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ una familia no vacía de subconjuntos de X.

Diremos que τ es una **topología sobre** X si se cumplen

1. $\emptyset$ y X están en τ;
2. si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$;
3. si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ es una familia arbitraria, entonces $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman **abiertos**, y (X, τ) **espacio topológico** (e.t.).

Ejemplos de topologías:

1. En cualquier X, $\tau := \{ \emptyset, X\}$ es topología (la grosera, o más pequeña en el sentido de la inclusión).

2. En cualquier X, $\tau := \mathscr{P}(X)$ es la llamada **topología discreta** de X, la más grande posible topología sobre X.

3. En $X = \{0,1\}$, $\tau := \{\emptyset, \{0\}, X\}$ es la llamada **topología de Sierpinski**, muy útil en contraejemplos.

Definición. Dado $X \neq \emptyset$ y τ_1, τ_2 topologías sobre X, diremos que τ_1 **es más fina que** τ_2 si se tiene $\tau_2 \subseteq \tau_1$. (Igual que con las particiones en sumas de Riemann.)

Ejemplo. Siempre $\tau_d = \mathscr{P}(X)$ es más fina que cualquier otra topología sobre X.

Ejemplo importante. En $X = \mathbb{R}^d$, la topología canónica de CVV:

$$\tau_c := \{A \subseteq \mathbb{R}^d \ : \ \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(x,\varepsilon) \subseteq A\},$$

donde $B(x,\varepsilon)$ son las bolas abiertas

$$B(x,\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d \ : \ |x-y| < \varepsilon\ \}, \quad |z| := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} z_j^2}.$$

(A es abierto si en cada punto x de A es posible incluir una bola abierta, incluida en A.)

Definición. Sea X no vacío y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Denotaremos por $\sigma(\mathscr{A})$ a la **topología inducida por** $\mathscr{A}$, es decir la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathscr{A}$:

$$\sigma(\mathscr{A}) := \cap\{\tau \ : \ \ \tau \text{ top. en } X,\ \mathscr{A} \subseteq \tau\}.$$

Además, es la **topología menos fina** (más pequeña) que contiene a $\mathscr{A}$ (ejercicio).

Definición. Dado X conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ función, diremos que d es **distancia o métrica** si se cumple para cualquier $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \implies x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

El par (X,d) se denomina **Espacio Métrico.**

Ejemplos:

1. $X = \mathbb{R}^d$ con $d(x,y) := |x-y|$.
2. X cualquiera con $d(x,y) := 0$ si $x = y$, y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. (Verificar!)

Espacio vectorial normado. Si X es e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una norma sobre X es una función

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R},$$

tal que para todo $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cada norma induce una distancia $d_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x-y\|$.

A $(X, \|\cdot\|)$ se le denomina **Espacio Vectorial Normado** (evn).

Ejemplo clásico: $X = \mathbb{R}^d$ con $\|x\| := |x|$ (norma Euclideana).

Todo espacio métrico (X,d) posee una topología asociada, denominada **topología métrica**, definida como

$$\tau_{dist} := \{A \subseteq X \ : \quad \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B_d(x,\varepsilon) \subseteq A\}.$$

Aquí,

$$B_d(x,\varepsilon) := \{\ y \in X \ : \ d(x,y) < \varepsilon\}.$$

(igual que en $\mathbb{R}^d$!)

Otro ejemplo importante. Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas en $[0,1]$. Para $f \in X$, definimos la **norma infinito, o norma del supremo**, como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

Entonces $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es evn (ejercicio, usar que $|\cdot|$ ya es norma).

La métrica asociada a la norma $\|\cdot\|_\infty$ viene dada por

$$d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty.$$

La topología τ_∞ asociada a esta métrica se denomina **topología de la convergencia uniforme**.

Definición 1. Sea (X, τ) e.t.

Una sub-familia $\mathscr{A} \subseteq \tau$ se dice **sub-base** de τ si

$$\tau = \sigma(\mathscr{A}),$$

(es decir, $\mathscr{A}$ es generador de τ, o τ es la topología menos fina (más chica) que contiene a $\mathscr{A}$).

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{A} := \{\text{rectas}\}$ son tales que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) = \tau_d$ (la topología discreta de $\mathbb{R}^2$). (Hint: $y \in A$ abierto lo obtengo como intersección finita de rectas que pasan por y, luego A lo obtengo como unión arbitraria de $y \in A$).

2. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathscr{A} := \{\text{rectas horizontales}\}$, entonces (Ejercicio!)

$$\sigma(\mathscr{A}) = \{\mathbb{R} \times B \ : \ B \subseteq \mathbb{R}\}.$$

$\sigma(\mathscr{A})$ se calcula como: $\mathscr{A} \mapsto \cap_{fin} \mapsto \cup_{arb} \mapsto \cap_{fin} \mapsto \cup_{arb} \mapsto \cdots$

Definición 2 muy importante. Sea (X, τ) e.t.

Una sub-familia $\mathscr{B} \subseteq \tau$ se dice **base de abiertos** de τ si cualquier abierto $A \in \tau$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathscr{B}$, esto es,

$$\exists (B_i)_{i\in I} \subseteq \mathscr{B} \text{ tales que } A = \cup_{i\in I} B_i.$$

Ojo, los B_i son necesariamente abiertos!

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}$, $\mathscr{B} := \{(a,b) \ : \ a,b \in \mathbb{R}, \quad a < b\}$, la familia de intervalos abiertos reales, es una base para τ_c. Hint: A abierto, $x \in A$, entonces A contiene un intervalo centrado en x (miembro de $\mathscr{B}$); luego unir arbitrariamente sobre $x \in A$.

2. Otra familia que es base de abiertos en $\mathbb{R}$ es $\widetilde{\mathscr{B}} := \{(a,b) \ : \ a,b \in \mathbb{Q}, \quad a < b\}$. Para ello, basta notar (por qué?) que todo intervalo (x,y) se puede escribir como

$$(x,y) = \cup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n), \quad a_n, b_n \in \mathbb{Q},$$

y con $a_n \to x$, $b_n \to y$. Ojo que $\widetilde{\mathscr{B}}$ es numerable! Eso será muy importante después.

3. En $X = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{B}$ dada por

$$\mathscr{B} := \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \ : \ x \in \mathbb{Q}^d, \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

es una base numerable de abiertos de τ_d de $\mathbb{R}^d$. (verificar!)

4. En X cualquiera, con $\tau_d = \mathscr{P}(X)$ su topología discreta, $\mathscr{B}$ dada por

$$\mathscr{B} := \{ \ \{x\} \ : \ x \in X \} = \{\text{singletons}\}$$

es la base de abiertos más pequeña para τ_d (por qué?)

Vamos a empezar a probar propiedades.

Proposición. Sea (X, τ) e.t. y $\mathscr{B} \subseteq \tau$. Son equivalentes:

1. $\mathscr{B}$ es base de abiertos en τ,
2. Para todo $A \in \tau$, si $x \in A$, entonces existe $B \in \mathscr{B}$ con $x \in B \subseteq A$. (muy útil!)

Demostración.

1) $\Longrightarrow$ 2) Sea $A \in \tau$ no vacía, y $x \in A$. Como $A = \cup_{i \in I} B_i$, con $B_i \in \mathscr{B}$ (por ser base), entonces para algún j, $x \in B_j \subset A$. OK.

2) $\Longrightarrow$ 1) Sea $A \in \tau$ no vacía. Para cada $x \in A$, existe $B_x \in \mathscr{B}$ con $x \in B_x \subseteq A$ (Ax. Elección). Entonces

$$A = \cup_{x \in A} \{x\} \subseteq \cup_{x \in A} B_x \subseteq A.$$

Esto prueba el resultado.

Otro ejemplo importante. Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$. Definamos, para $A \subseteq [0,1]$ de cardinal finito ($|A| < +\infty$), $\varepsilon > 0$ y $f \in X$,

$$V_{f,A,\varepsilon} := \{g \in X \ : \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A\}.$$

Finalmente, sean

$$\mathscr{B} := \{ \ V_{f,A,\varepsilon} \ : \ A \subseteq [0,1], \ |A| < +\infty, \ \varepsilon > 0 \text{ y } f \in X\}.$$

y τ dada por

$$\begin{aligned}\sigma(\mathscr{B}) &= \tau \\ &:= \{U \subseteq X \ : \ \forall f \in U, \ \exists A \subseteq [0,1], \ |A| < +\infty, \ \varepsilon > 0 \\ &\qquad\qquad \text{t.q. } V_{f,A,\varepsilon} \subseteq U\}.\end{aligned}$$

Entonces τ es topología en X para la cual $\mathscr{B}$ es base de abiertos.

τ es topología.

1. $\emptyset$, X abiertos: propuesto.

2. **Intersección finita:** Sean $U, V \in \tau$, sea $W := U \cap V$. PDQ $W \in \tau$.

Sea $f \in W$, luego está en U y V. Como U, V son abiertos, existen $\varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$, A_U, A_V subconjuntos finitos de $[0,1]$, tales que

$$V_{f,A_U,\varepsilon_U} \subseteq U, \qquad V_{f,A_V,\varepsilon_V} \subseteq V.$$

Luego, si

$$A := A_U \cup A_V, \quad \varepsilon := min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\},$$

entonces

$$V_{f,A,\varepsilon} := \{g \in X \ : \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A\}$$

satisface $V_{f,A,\varepsilon} \subseteq V_{f,A_U,\varepsilon_U}$, $V_{f,A,\varepsilon} \subseteq V_{f,A_V,\varepsilon_V}$. Finalmente, $V_{f,A,\varepsilon} \subseteq V_{f,A_U,\varepsilon_U} \cap V_{f,A_V,\varepsilon_V} \subseteq U \cap V = W$, lo pedido.

3. **Unión arbitraria**. Propuesto (no es difícil, sólo notar que si $V_{f,A,\varepsilon} \subseteq U_\lambda$, entonces $V_{f,A,\varepsilon} \subseteq \cup_\lambda U_\lambda$).

4. $\mathscr{B}$ **es base de abiertos**. PDQ todo abierto $U \in \tau$ se describe como unión de tipos de la forma $V_{f,A,\varepsilon}$.

Sea $U \in \tau$. Luego, para cada $f \in U$, existen A_f, ε_f tales que $V_{f,A_f,\varepsilon_f} \subseteq U$.

Pero $\{f\} \subseteq V_{f,A_f,\varepsilon_f}$, luego, $U = \cup_{f\in U}\{f\} \subseteq \cup_{f\in U} V_{f,A_f,\varepsilon_f} \subseteq U$.

Luego, U se escribe como elementos $V_{f,A,\varepsilon}$ de $\mathscr{B}$.

Próximo video. Topologías 3: Bases de vecindades.