Video D3 Análisis: Topología III. Vecindades

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

1 de mayo de 2021

Habíamos visto la noción de topología:

Definición. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ una familia no vacía de subconjuntos de X.

Diremos que τ es una **topología sobre** X si se cumplen

1. $\emptyset$ y X están en τ;
2. si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$;
3. si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ es una familia arbitraria, entonces $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Los elementos de τ son **abiertos**, y (X, τ) **espacio topológico** (e.t.).

Definición. Dado X conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ función, diremos que d es **distancia o métrica** si se cumple para cualquier $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \implies x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

El par (X, d) se denomina **Espacio Métrico.**

Un caso particular de espacio normado lo da el **Espacio vectorial normado**. Si X es e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una norma sobre X es una función

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R},$$

tal que para todo $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cada norma induce una distancia $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$.

A $(X, \|\cdot\|)$ se le denomina **Espacio Vectorial Normado** (evn).

Ejemplo clásico: $X = \mathbb{R}^d$ con $\|x\| := |x|$ (norma Euclideana).

Recuerdos-Definiciones. Sea X no vacío y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Denotaremos por $\sigma(\mathscr{A})$ a la **topología inducida por** $\mathscr{A}$, es decir la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathscr{A}$:

$$\sigma(\mathscr{A}) := \cap\{\tau \;:\; \tau \text{ top. en } X,\, \mathscr{A} \subseteq \tau\}.$$

Además, es la **topología menos fina** (más pequeña) que contiene a $\mathscr{A}$.

Definición 1. Sea (X,τ) e.t. Una sub-familia $\mathscr{A} \subseteq \tau$ se dice **sub-base** de τ si

$$\tau = \sigma(\mathscr{A}),$$

(es decir, $\mathscr{A}$ es generador de τ, o τ es la topología menos fina (más chica) que contiene a $\mathscr{A}$).

Definición 2 muy importante. Una sub-familia $\mathscr{B} \subseteq \tau$ se dice **base de abiertos** de τ si cualquier abierto $A \in \tau$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathscr{B}$, esto es,

$$\exists (B_i)_{i\in I} \subseteq \mathscr{B} \text{ tales que } A = \cup_{i\in I} B_i.$$

Ojo, necesariamente $\tau = \sigma(\mathscr{B})$, por qué?

Proposición. Sea (X, τ) e.t. y $\mathscr{B} \subseteq \tau$. Son equivalentes:

1. $\mathscr{B}$ es base de abiertos en τ,
2. Para todo $A \in \tau$, si $x \in A$, entonces existe $B \in \mathscr{B}$ con $x \in B \subseteq A$. (muy útil!)

Otro ejemplo importante. Sea $X = C([0,1], \mathbb{R})$. Definamos, para $A \subseteq [0,1]$ de cardinal finito ($|A| < +\infty$), $\varepsilon > 0$ y $f \in X$,

$$V_{f,A,\varepsilon} := \{g \in X \ : \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A\}.$$

Finalmente, sean

$$\mathscr{B} := \{ \ V_{f,A,\varepsilon} \ : \ A \subseteq [0,1], \ |A| < +\infty, \ \varepsilon > 0 \text{ y } f \in X\}.$$

y τ dada por

$$\sigma(\mathscr{B}) = \tau := \{U \subseteq X \ : \ \forall f \in U, \ \exists A \subseteq [0,1], \ |A| < +\infty, \ \varepsilon > 0 \\ \text{t.q. } V_{f,A,\varepsilon} \subseteq U\}.$$

Entonces τ **es topología en** X **para la cual** $\mathscr{B}$ **es base de abiertos.**

Definición 3 muy importante. Sea (X,τ) e.t. y $x \in X$.

Un conjunto N (no necesariamente en τ) se dice **vecindad de** x si existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq N$.

Denotamos $\mathscr{N}_x := \{N \subseteq X \ : \ N \text{ es vecindad de } x\}$ al conjunto de vecindades de x fijo.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^d$, $N = B(x,\varepsilon)$ y $N = \overline{B}(x,\varepsilon)$ son vecindades del punto x. ($A = B(x,\varepsilon)$ sirve!)

2. En $X = \{0,1\}$ con la topología de Sierpinski $\tau_S := \{\emptyset, \{0\}, X\}$, $N = \{0\}$ y $N = X$ son vecindades del 0, pero $N = X$ es la única vecindad de 1 (por qué?).

3. Si $X = C([0,1],\mathbb{R})$ con la topología uniforme, $N = \{f \in X \ : \ \|f\|_\infty \leq 1\}$ es vecindad del origen, porque contiene al abierto $\{f \in X \ : \ \|f\|_\infty < 1/2\} = B_\infty(0,1/2)$.

4. En $\mathbb{R}^2$, una recta que pasa por el origen NO es una vecindad del origen.

Teorema. Sea (X,τ) e.t. Entonces $A \subseteq X$ es abierto ssi es vecindad de todos sus puntos.

Demostración.

$\Longrightarrow$ Si $A \in \tau$ y $x \in A$, $N = A$ es vecindad de x pues contiene al abierto A mismo.

$\Longleftarrow$ Sea $x \in A$. Como $A \in \mathscr{N}_x$, existe Θ_x abierto tal que $x \in \Theta_x \subseteq A$. Luego,

$$A = \cup_{x\in A}\{x\} \subseteq \cup_{x\in A}\Theta_x \subseteq A.$$

Como A es unión de abiertos, esto prueba el resultado.

Propiedades de las vecindades. Sea (X,τ) e.t. y $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in X}$ la familia de vecindades de X. Entonces

1. Para todo $x \in X$, $X \in \mathcal{N}_x$.
2. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$.
3. Si $V \in \mathcal{N}_x$ y $V \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{N}_x$.
4. Si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $W \in \mathcal{N}_x$ tal que $x \in W \subseteq V$ y además $W \in \mathcal{N}_y$, para cada $y \in W$ (W abierto!).

Demostración. Ejercicios, excepto 2.

Intentemos 2:

Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, existen abiertos $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x \in U_1 \subseteq V_1$ y $x \in U_2 \subseteq V_2$. Entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto (por qué!!!) y

$$x \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \cap V_2.$$

Listo.

Otro ejercicio. Sea X conjunto no vacío y $(\mathscr{N}_x)_{x \in X}$ una familia de elementos en $\mathscr{P}(X)$ tal que satisfacen 1, 2, 3 y 4 en el slide anterior.

Entonces **existe una única topología τ en X que hace a cada $\mathscr{N}_x$ la familia de vecindades de $x \in X$.**

Más aún, A es abierto en τ ssi para cada $x \in A$, se tiene $A \in \mathscr{N}_x$ (ésta es la def. de la topología).

Definición. Sea (X,τ) e.t. y $x \in X$. Una familia $\beta_x \subseteq \mathcal{N}_x$ se dice **base de vecindades** de x si para cada $V \in \mathcal{N}_x$ se tiene que existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subseteq V$.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^d$, $(B(x,\frac{1}{n}))_{n\geq 1}$ y $(\overline{B}(x,\frac{1}{n}))_{n\geq 1}$ son bases de vecindades de un punto $x \in \mathbb{R}^d$ fijo.

(Si V_x es vecindad de x, contiene un abierto $B(x,\varepsilon)$, de donde si n es grande $B(x,\frac{1}{n}) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq V_x$.)

2. Si $X = C([0,1],\mathbb{R})$ con la topología uniforme, $\beta_0 = \{f \in X \ : \ \|f\|_\infty \leq \frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es base de vecindades del origen.

Ambas bases de vecindades son numerables, ojo a eso!

Propiedades de las bases de vecindades. Sea (X, τ) e.t. y β_x base de vecindades de cada $x \in X$. Entonces

1. Para todo $B \in \beta_x$, $x \in B$.
2. Para cualquier $B_1, B_2 \in \beta_x$, existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subseteq B_1 \cap B_2$.
3. Si $B \in \beta_x$, existe $B' \in \beta_x$ con la siguiente propiedad: si $y \in B'$, existe $B'' \in \beta_y$ tal que $B'' \subseteq B$.

Demostraciones. Recordar que $\beta_x \subseteq \mathscr{N}_x$ es base de vecindades si para cada $V \in \mathscr{N}_x$ se tiene que existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subseteq V$.

1. Directa.

2. Si $B_1, B_2 \in \beta_x \subseteq N_x$, $V := B_1 \cap B_2 \in \mathscr{N}_x$, luego, existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subseteq V = B_1 \cap B_2$.

3. Ejercicio.

Ejemplo. Si $X = \mathbb{R}^d$ con la topología canónica τ_c, tomemos la base de vecindades $\beta_x := (B(x, \frac{1}{n}))_{n \geq 1}$.

1. $x \in B(x, \frac{1}{n})$, directo.

2. Para $B(x, \frac{1}{n})$ y $B(x, \frac{1}{m})$, $B = B(x, \frac{1}{m+n})$ está incluida en $B(x, \frac{1}{n}) \cap B(x, \frac{1}{m})$.

3. Si $B = B(x, \frac{1}{n})$, podemos tomar $B' := B(x, \frac{1}{4n})$ y $B'' := B(y, \frac{1}{4n})$.

En efecto, si $y \in B(x, \frac{1}{4n})$, entonces $|x - y| < \frac{1}{4n}$. Por otro lado, si $z \in B(y, \frac{1}{4n})$, $|z - y| < \frac{1}{4n}$, y por ende

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x| \leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n}.$$

Luego, $B'' = B(y, \frac{1}{4n}) \subseteq B = B(x, \frac{1}{n})$.

Teorema. Para cada $x \in X$, sea β_x una familia de subconjuntos de $\mathscr{P}(X)$, tal que

1. Para todo $B \in \beta_x$, $x \in B$.
2. Para cualquier $B_1, B_2 \in \beta_x$, existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subseteq B_1 \cap B_2$.
3. Si $B \in \beta_x$, existe $B' \in \beta_x$ con la siguiente propiedad: si $y \in B'$, existe $B'' \in \beta_y$ tal que $B'' \subseteq B$.

Entonces existe una única topología τ para la cual β_x es la familia de vecindades de cada x.

Esta topología se caracteriza como sigue:

$$A \in \tau \iff \forall x \in A, \exists B \in \beta_x \text{ t.q. } B \subseteq A.$$

Demostración: Próxima clase.