

Video D5 Análisis: Topología V. Lenguaje Básico de Topología, Continuidad

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

10 de mayo de 2021

Vamos a ver ahora **nociones estándar de topología** (algunas de ellas ya vistas por ustedes). Sea (X, τ) e.t.

Definición. Dado un conjunto $A \subseteq X$, su **interior**, denotado $\text{int}(A)$, es el mayor abierto contenido en A , o bien, la unión de todos los abiertos contenidos en A .

Ejemplo. En $\mathbb{R}^d$, $\text{int}(B(x_0, r)) = B(x_0, r)$ e $\text{int}(\overline{B}(x_0, r)) = B(x_0, r)$.

Ejercicios.

1. $x \in \text{int}(A) \iff \exists V \in \mathcal{N}_x \text{ tq } V \subseteq A \iff A \in \mathcal{N}_x$.
2. A es abierto ssi $A = \text{int}(A)$.
3. $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$.
4. $A \subseteq B \implies \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.
5. $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$; $\text{int}(X) = X$.
6. $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
7. $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$.

Definición. Sea (X, τ) e.t. y $F \subseteq X$. Diremos que F es cerrado si F^c es abierto. Denotamos $\mathcal{F}$ al conjunto de cerrados de la topología τ .

Ejemplos. En $\mathbb{R}^d$,

1. $B(x_0, r)$ no es cerrado.
2. $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrado, pues $\overline{B}(x_0, r) = \{|x - x_0| > r\}^c$.

Proposición. (Ejercicio) Se tienen

1. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.
2. La unión finita de cerrados es cerrado.
3. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Definición. Dado un conjunto $A \subseteq X$, su **cerradura o adherencia**, denotado $\overline{A}$ o $adh(A)$, es el menor cerrado que contiene a A , o bien, la intersección de todos los cerrados conteniendo a A .

Ejemplo. En $\mathbb{R}^d$, $adh(B(x_0, r)) = \overline{B}(x_0, r)$ y $adh(\overline{B}(x_0, r)) = \overline{B}(x_0, r)$.

Ejercicios.

1. $int(A) \subseteq A \subseteq adh(A)$.
2. $x \in adh(A) \iff \forall V \in \mathcal{N}_x, V \cap A \neq \emptyset$.
3. A es cerrado ssi $A = adh(A)$.
4. $adh(adh(A)) = adh(A)$.
5. $A \subseteq B \implies adh(A) \subseteq adh(B)$.
6. $adh(\emptyset) = \emptyset$; $adh(X) = X$.
7. $adh(A \cap B) \subseteq adh(A) \cap adh(B)$.
8. $adh(A) \cup adh(B) = adh(A \cup B)$.

Definición. Dado un conjunto $A \subseteq X$, su **frontera**, denotado $Fr(A)$, es el conjunto $Fr(A) := adh(A) \setminus int(A)$.

Ejemplos. En $\mathbb{R}^d$,

1. $Fr(B(x_0, r)) = S(x_0, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x_0| = r\}$.
2. $Fr(\overline{B}(x_0, r)) = S(x_0, r)$.

Ejercicios.

1. $x \in Fr(A) \iff \forall V \in \mathcal{N}_x, V \cap A \neq \emptyset \text{ y } V \cap A^c \neq \emptyset$.
2. $Fr(A) = adh(A) \cap adh(A^c)$.
3. $adh(A) = A \cup Fr(A)$.
4. $int(A) = adh(A) \setminus Fr(A)$.
5. $(adh(A))^c = int(A^c)$.
6. $(int(A))^c = adh(A^c)$.
7. $adh(A) = (int(A^c))^c$.
8. $int(A) = (adh(A^c))^c$.

Definición. Dado un conjunto $D \subseteq X$, diremos que D es **denso en X** si $\text{adh}(D) = X$, o bien, para cualquier $A \in \tau$, $A \cap D \neq \emptyset$.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}$ con la topología habitual, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.
2. En $\mathbb{R}$ con la topo. discreta, si D es denso en $\mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$.
(Si $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es abierto. Como D es denso, $D \cap \{x\} \neq \emptyset$; luego $x \in D$.)
3. Cuáles son los densos de $\mathbb{R}$ con la topología grosera?

Definición. Sea (X, τ) e (Y, σ) e.t.s. Diremos que $f : X \rightarrow Y$ es continua en $\bar{x} \in X$ si

$$\forall W \in \mathcal{N}_{f(\bar{x})}, \quad \exists V \in \mathcal{N}_{\bar{x}} \quad \text{t.q.} \quad f(V) \subseteq W.$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon.)$$

Diremos que f es continua en X si lo es en cada punto de X .

Teorema. Sea (X, τ) e (Y, σ) e.t.s. Entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua ssi la preimagen de todo abierto en Y es abierto en X :

$$\forall W \in \sigma, \quad f^{-1}(W) \in \tau.$$

Ejemplos. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por $f(x) := \|x\|$,
 $f^{-1}((1, 2)) = \{1 < \|x\| < 2\} = B(0, 2) \setminus \bar{B}(0, 1).$

Demostración.

($\implies$) Supongamos f continua y sea $B \in \sigma$. Probemos que $f^{-1}(B) \in \tau$, es decir, es vecindad de todos sus puntos.

Sea $x \in f^{-1}(B)$, luego $f(x) \in B$. Como B es abierto, es vecindad de $f(x)$.

Usando que f es continua, existe $A \in \mathcal{N}_x$ tal que $f(A) \subseteq B$. Es decir, $A \subseteq f^{-1}(B)$.

Como A es vecindad de x , $f^{-1}(B)$ también lo es. Esto es, $f^{-1}(B)$ es vecindad de todos sus puntos. OK.

Demostración (cont.)

($\Leftarrow$) Supongamos $f^{-1}(B) \in \tau$ para cualquier $B \in \sigma$. Probemos que f es continua en $\bar{x} \in X$ arbitrario.

Sea $\bar{x} \in X$ y W vecindad de $f(\bar{x})$. Luego, existe B abierto en σ tal que $f(\bar{x}) \in B \subseteq W$.

Luego, $\bar{x} \in f^{-1}(B)$, que es abierto en τ por hipótesis, y es vecindad de $\bar{x}$.

Sea $A := f^{-1}(B)$ vecindad de $\bar{x}$. Entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \subseteq W$ (ejercicio), lo que prueba el resultado.

Corolario (ejercicio). Entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua ssi la preimagen de todo cerrado en Y es cerrado en X :

Proposición. Si $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua en $\bar{x} \in X$, y $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \theta)$ es continua en $\bar{y} = f(\bar{x})$, entonces $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.

Corolario (ejercicio). La composición de funciones continuas es continua.

Proposición. Si $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua en $\bar{x} \in X$, y $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \theta)$ es continua en $\bar{y} = f(\bar{x})$, entonces $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.

Demostración. Sea $W \in \mathcal{N}_{\bar{z}}$, con $\bar{z} = g(f(\bar{x})) = g(\bar{y})$. PDQ existe $U \in \tau$ tal que $g(f(U)) \subseteq W$.

Como g es continua en $\bar{y}$, existe $V \in \mathcal{N}_{\bar{y}}$ tal que $g(V) \subseteq W$.

Como f es continua en $\bar{x}$, existe $U \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ tal que $f(U) \subseteq V$.

Luego, existe $U \in \tau$ tal que $g(f(U)) \subseteq W$. OK.

Observación. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ continua dada. Si agrandamos τ (más fina) o achicamos σ (menos fina), f sigue siendo continua.

Topologías inducidas por funciones. Muy útiles en aplicaciones!
(topologías débiles, cuocientes, espacio producto, etc.)

Definición/Proposición 1. Topología Inversa. Sea $f : X \rightarrow (Y, \sigma)$, con (Y, σ) e.t. Entonces

$$\tau := \{f^{-1}(B) : B \in \sigma\}$$

es topología, denotada **topología inversa** inducida por f . Más aún, es la topología menos fina (más chica) que hace que f sea continua.

Demostración:

1. $\emptyset, X \in \tau$. Ejercicio.

2. **Intersección finita.** Si $A_1, A_2 \in \tau$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$ y $A_2 = f^{-1}(B_2)$ para ciertos $B_1, B_2 \in \sigma$. Entonces $B_1 \cap B_2 \in \sigma$ y se tiene

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$

Luego, $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

3. **Unión arbitraria.** Ejercicio.

4. **La menos fina que hace f continua.** Claramente f es continua pues por definición $f^{-1}(B) \in \tau$, para $B \in \sigma$.

Además, si $\tilde{\tau}$ es otra topo en X que hace f continua, entonces $f^{-1}(B) \in \tilde{\tau}$ para cada $B \in \sigma$. Luego, $\tau \subseteq \tilde{\tau}$.

Definición/Proposición 2. Topología Directa. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow Y$, con (X, τ) e.t. Entonces

$$\sigma := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \tau\}$$

es topología, denotada **topología directa** inducida por f . Más aún, es la topología más fina (más grande) que hace que f sea continua.

Observación. Si $\tau = \mathcal{P}(X)$, entonces $\sigma := \{\emptyset, Y\}$ hace $f : X \rightarrow Y$ continua.

Demostración:

1. $\emptyset, Y \in \sigma$. Ejercicio.

2. **Intersección finita.** Ejercicio.

3. **Unión arbitraria.** Sean $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \sigma$. Entonces $f^{-1}(A_\lambda) \in \tau$. Luego,

$$f^{-1}(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) \in \tau.$$

Luego, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \sigma$.

4. **La más fina que hace f continua.** Claramente, para cada $B \in \sigma$, $f^{-1}(B) \in \tau$ por definición. Luego, f es continua.

Además, si $\tilde{\sigma}$ es otra topo en Y que hace f continua, entonces $f^{-1}(B) \in \tau$ para cada $B \in \tilde{\sigma}$. Luego, $B \in \sigma$, esto es, $\tilde{\sigma} \subseteq \sigma$.

Definición 3. Topología Traza. Sea (X, τ) e.t. y $Z \subseteq X$. La **inyección**

$$I_Z : Z \rightarrow (X, \tau), \quad I_Z(x) = x,$$

induce en Z la siguiente topología inversa (denominada **topología traza** de X sobre Z)

$$\tau|_Z := \{I_Z^{-1}(A) : A \in \tau\} = \{Z \cap A : A \in \tau\}.$$

Observaciones. 1. Ojo que $Z \cap A$ es abierto en Z , pero no en X necesariamente!!!

Por ejemplo, $(-a, a) \cap [0, \infty) = [0, a)$ es abierto en $Z = [0, \infty)$ pero no en $\mathbb{R}$ (con la top. canónica).

2. Las vecindades de $z \in Z$ son de la forma $Z \cap V$, con $V \in \mathcal{N}_x(\tau)$ y algún $x \in X$.

3. $(Z, \tau|_Z)$ se llama subespacio topológico de (X, τ) .

Definición 4. Topología Cuociente. Sea (X, τ) e.t. y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre X .

Denotemos por $X/\mathcal{R} := \{[x] : x \in X\}$ al espacio cuociente (o de clases de equivalencia).

Tenemos que la función

$$[\cdot] : (X, \tau) \rightarrow X/\mathcal{R}, \quad x \mapsto [x],$$

induce sobre $X/\mathcal{R}$ una topología directa (llamada **topología cuociente**), denotada $\tau/\mathcal{R}$.

Por definición, tenemos que $B \in \tau/\mathcal{R}$ (un subconjunto de clases de equivalencia) ssi $[\cdot]^{-1}(B) \in \tau$. Esto es,

$$\{x \in X : [x] \in B\} \in \tau.$$

Próximo video. Topología producto. Axiomas de separación.