Video D6 Análisis: Topología VI. Topología Producto, Axiomas de Separación.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2020

10 de mayo de 2021

Estábamos viendo **Topologías inducidas por funciones.**

Topología Inversa. Sea $f : X \to (Y, \sigma)$, con (Y, σ) e.t. Entonces

$$\tau := \{f^{-1}(B) \ : \ B \in \sigma\}$$

es topología, denotada **topología inversa** inducida por f. Más aún, es la topología menos fina (más chica) que hace que f sea continua.

Ejemplo. Topología Traza. Sea (X, τ) e.t. y $Z \subseteq X$. La **inyección**

$$I_Z : Z \to (X, \tau), \quad I_Z(x) = x,$$

induce en Z la topología inversa (denominada **topología traza** de X sobre Z)

$$\tau\Big|_Z := \{I_Z^{-1}(A) \ : \ A \in \tau\} = \{Z \cap A \ : \ A \in \tau\}.$$

Topología Directa. Sea $f:(X,\tau)\to Y$, con (X,τ) e.t. Entonces

$$\sigma := \{B\subseteq Y \ : \ f^{-1}(B)\in\tau\}$$

es topología, denotada **topología directa** inducida por f. Más aún, es la topología más fina (más grande) que hace que f sea continua.

Ejemplo: Topología Cuociente. Sea (X,τ) e.t. y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia sobre X, con $X/\mathscr{R} := \{[x] \ : \ x\in X\}$ al espacio cuociente (o de clases de equivalencia).

Entonces la función

$$[\cdot]:(X,\tau)\to X/\mathscr{R}, \quad x\mapsto [x],$$

induce sobre $X/\mathscr{R}$ una topología directa (llamada **topología cuociente**), denotada $\tau/\mathscr{R}$.

Por definición, tenemos que $B\in\tau/\mathscr{R}$ (un subconjunto de clases de equivalencia) ssi $[\cdot]^{-1}(B)\in\tau$. Esto es,

$$\{x\in X \ : \ [x]\in B\}\in\tau.$$

Topología (inversa) inducida por una familia de funciones.

Sea X conjunto y $f_\lambda : X \to (X_\lambda, \sigma_\lambda)$ una familia de funciones para $\lambda \in \Lambda$, con $(X_\lambda, \sigma_\lambda)$ ets.

Ejemplo. $X = \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y $f_\lambda := \pi_\lambda$, la proyección de X sobre X_λ.

Queremos inducir una topología inversa sobre X que haga a cada f_λ continua.

Respuesta fácil: Poner en X la topo. discreta $\tau := \mathscr{P}(X)$, que hace continuas todas las f_λ trivialmente. El problema es que es muy grande. Queremos optimizar el tamaño de la topología sobre X.

Si ahora tomamos las topologías

$$\tau_\lambda := \{ f_\lambda^{-1}(A) \ : \ A \in \sigma_\lambda \}$$

y definimos $\tau := \cup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$, no nos queda topología (unión de topos, no necesariamente topo).

Solución: usar una "base de abiertos" y generar la topo. desde allí.

Tomemos como familia generadora

$$\mathscr{B} := \{f_\lambda^{-1}(A) \ : \ A \in \sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

y definimos la topología inducida por las f_λ como la generada por la familia $\mathscr{B}$:

$$\tau := \sigma(\mathscr{B}).$$

Ejercicio 1. Probar que τ es efectivamente una topología, que hace a cada f_λ continua, y es la menos fina que hace esto.

Ejercicio 2. Mostrar que todo elemento en τ se escribe como unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos en $\mathscr{B}$.

Ejercicio 3. Es $\mathscr{B}$ base de abiertos en τ?

Ejemplo muy importante. Topología producto.

Sean $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ets. y sea $X := \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ su espacio producto. (Notación: $X \ni x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.)

La familia de proyecciones canónicas

$$\pi_\mu : X \to X_\mu, \quad \pi_\mu(x) = x_\mu,$$

induce en X una topología (llamada **topología producto** y denotada $\bigotimes_\lambda \tau_\lambda$) que es la menos fina que hace a cada π_μ continua.

Intentemos caracterizar la topología producto.

Definición. Un **cilindro** C en $X = \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es un conjunto de la forma

$$C = \Pi_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \subseteq X,$$

donde cada $C_\lambda \subseteq X_\lambda$ pero el número de λ's tal que $C_\lambda \neq X_\lambda$ es finito.

Diremos que C **es abierto** si cada C_λ lo es en τ_λ (en realidad es abierto en la topo misma, por qué ?)

Notar finalmente que todo cilindro es de la forma (ver figura en próximo slide)

$$C = \bigcap_{\lambda \in I, I \subseteq \Lambda \text{ finito}} \pi_\lambda^{-1}(C_\lambda).$$

O bien (aquí $I = \{1, 4\}$)

$$C = \cdots X_0 \times C_1 \times \cdots \times C_4 \times X_5 \times \cdots$$

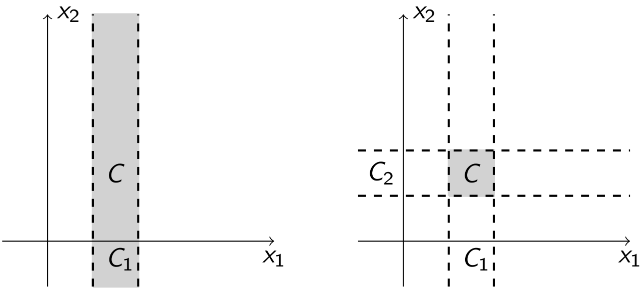


FIGURA: A la izquierda, un cilindro abierto a una coordenada “fija” en C_1. A la derecha, un cilindro abierto con dos coordenadas fijas.

Teorema importante. La familia de cilindros abiertos es una base de abiertos para la topología producto $\bigotimes_\lambda \tau_\lambda$. Esto es, A es abierto en $\bigotimes_\lambda \tau_\lambda$ ssi

$$\forall x \in A, \quad \exists C \text{ cilindro abierto tq } \quad x \in C \subseteq A.$$

Observación importante: en dim. infinita, el producto infinito de abiertos $C_\lambda \neq X_\lambda$ no necesariamente es abierto. Por eso los cilindros tienen un número finito de coordenadas diferentes a X_λ.

Demostración.

$(\implies)$ Sea A abierto en τ. Entonces A es **unión arbitraria de intersecciones finitas** de elementos de $\mathscr{B}$, que son de la forma

$$B_\lambda := \pi_\lambda^{-1}(C_\lambda), \quad C_\lambda \text{ abierto en } X_\lambda.$$

Claramente B_λ es un uni-cilindro (a una coordenada fija que va a C_λ, solamente).

Sea $x \in A$. Entonces x está en particular en una intersección finita de elementos $B_1, \ldots, B_n$ en $\mathscr{B}$, que está a su vez contenida en A. Luego, está en cada uno de ellos.

Escribiendo $B_j := \pi_j^{-1}(C_j)$, tenemos

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} B_j = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(C_j) =: C,$$

que es un cilindro, contenido en A, que es lo queríamos probar.

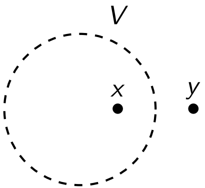
($\Longleftarrow$) Probaremos que A es vecindad de todos sus puntos. Sea $x \in A$. Entonces existe C cilindro abierto tal que $x \in C \subseteq A$. Pero C es abierto, porque es elemento de $\mathscr{B}$. Esto prueba que A es vecindad de sus puntos, ie. abierto.

Axiomas de Separación. Vamos a introducir nociones importantes que permiten entender cuándo una topología **permite distinguir entre puntos** (recordar que las topologías son colecciones de abiertos, solamente).

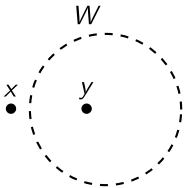
La siguiente descripción es estándar en la literatura, aunque hay variaciones específicas que consideran definiciones intermedias, que probablemente se verán en auxiliar.

Axiomas de Separación. En todo lo que sigue, (X,τ) es e.t.

Definición. Diremos que (X,τ) es T0 (o de Kolmogorov) si para todo $x \neq y$, o bien existe vecindad V de x con $y \notin V$, o bien existe vecindad W de y con $x \notin W$.



o bien



Ejemplos. 1. Casi cualquier e.t. es T0, pero X de dos o más elementos, con la topo. grosera, no lo es.

2. $X = \{0,1\}$ con $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ es T0, pues $\{0\}$ es vecindad de 0 que no contiene a 1.

Ejercicios.

1. X es T0 ssi para cada par de puntos distintos x, y, existe un abierto A que contiene únicamente a x o y.

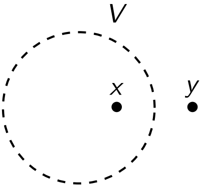
2. X es T0 ssi para todo $x \neq y$, $adh(\{x\}) \neq adh(\{y\})$.

Solución. ($\Longrightarrow$) Supongamos existe $V \in \mathscr{N}_x$ tal que $y \notin V$. WLOG V abierto. Entonces V^c es cerrado, no contiene a x, y contiene a y. Luego, $adh(\{y\}) \subseteq V^c$ y por ende $x \in adh(\{x\}) \neq adh(\{y\}) \not\ni x$.

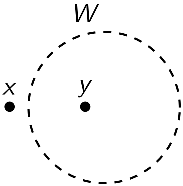
($\Longleftarrow$) Supongamos que para $x \neq y$ toda vecindad V de x cumple $y \in V$, y toda vecindad W de y cumple $x \in W$. Entonces las vecindades de x e y son las mismas, en particular mismos abiertos, y por ende mismos cerrados. Por lo tanto, $adh(\{x\}) = adh(\{y\})$.

3. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T0.

Definición. Diremos que (X, τ) es T1 (o de Fréchet) si para todo $x \neq y$ existen vecindades V de x y W de y tales que $y \notin V$ y $x \notin W$.



y además



Ejemplos. 1. X con la topología discreta es claramente T1.

2. $X = \{0, 1\}$ con $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ NO es T1, pues 1 posee sólo a X como vecindad, que no separa de 0.

Ejercicios.

1. X es T1 ssi todo singleton es cerrado.

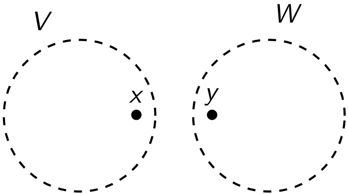
Solución. ($\Longrightarrow$) Si $y \in X \backslash \{x\}$, existe vecindad $W \in \mathscr{N}_y$ que no contiene a x, y WLOG, W es abierto. Luego, $X \backslash \{x\}$ es abierto.

($\Longleftarrow$) Si $\{x\}$ es cerrado, $X \backslash \{x\}$ es abierto, y es vecindad de cualquier $y \neq x$.

2. X es T1 ssi cada singleton es la intersección de sus vecindades.

3. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T1.

Definición. Diremos que (X, τ) es T2 (o de Hausdorff, o separado) si para todo $x \neq y$ existen vecindades disjuntas $V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$.



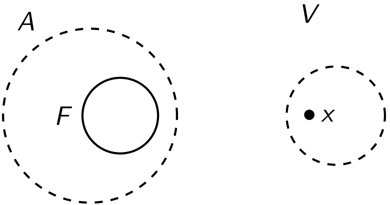
Ejemplo. $\mathbb{R}^d$ con la topología canónica es Hausforff: Si $x \neq y$, y $r := \frac{1}{4}|x - y|$, entonces $V = B(x, r)$ y $W = B(y, r)$ satisfacen lo pedido.

Ejercicios.

1. Probar que T2 implica T1.

2. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T2.

Definición. Diremos que (X, τ) es T3 (o regular) si es T1 y además, para todo cerrado F y $x \notin F$, existen abiertos A y vecindad $V \in \mathcal{N}_x$ tales que $V \cap A = \emptyset$ y $F \subseteq A$.



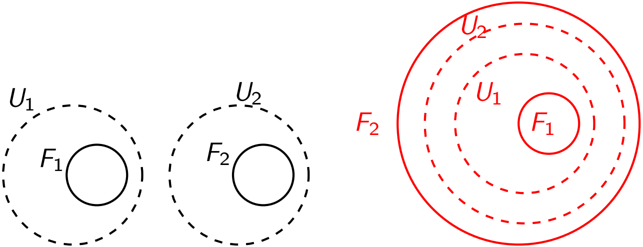
Ejemplo. $\mathbb{R}^d$ con la topología canónica es T3: Si $F = \bar{B}(x_0, r_0)$ es cerrado y $x \notin F$, y $r := \frac{1}{4} d(x, F)$, entonces $A = B(x_0, r_0 + r)$ y $V = B(x, r)$ satisfacen lo pedido. Hacer el caso general.

Ejercicios.

1. Mostrar que T3 implica T2.

2. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T3.

Definición. Diremos que (X, τ) es T4 (o normal) si es T1 y para cualquier par de cerrados F_1, F_2 disjuntos, existen abiertos U_1, U_2 disjuntos con $F_i \subseteq U_i$.

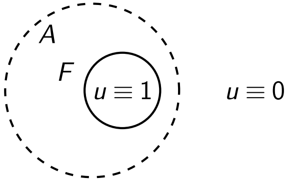


Ejemplo. $\mathbb{R}^d$ con la topo. canónica es T4. Hacer la demostración.

Ejercicios.

1. Mostrar que T4 implica T3.

2. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T4.



Teorema de Urysohn. (X,τ) e.t es normal (T4) ssi es T1 y se cumple lo siguiente:

Para todo cerrado F y abierto A tales que $F \subseteq A$, existe $u : X \to [0,1]$ continua entre la topo. τ en X y la topo. traza de la canónica en $\mathbb{R}$ sobre $[0,1]$, tal que

$$u(x) = 1, \quad \forall x \in F, \quad u(x) = 0, \quad \forall x \notin A.$$

Ojo que A^c es cerrado, juega el rol del otro cerrado en T4. La demo de este resultado es complicada, requiere bastantes conceptos.

Corolario no trivial. Todo espacio métrico es normal.

Próximo video. Demo. del Teorema de Urysohn y su corolario.