Video D7 Análisis: Topología, Demostración Teorema Urysohn

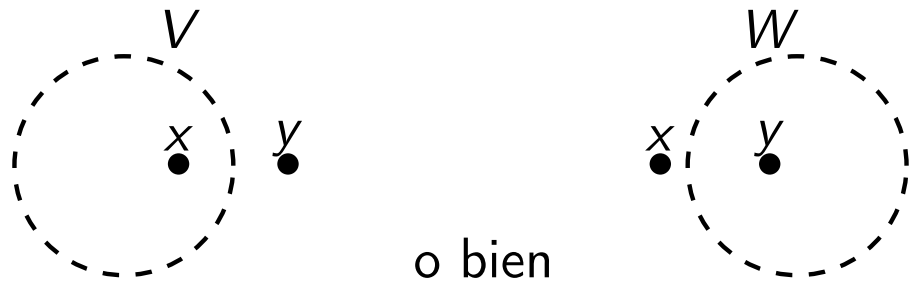
Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

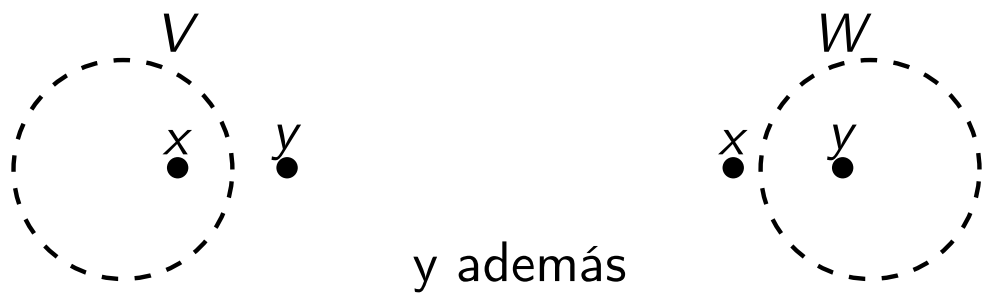
23 de mayo de 2021

Habíamos visto los llamados axiomas de separación T0-T1-T2-T3-T4, y el Teorema de Urysohn. En todo lo que sigue, (X, τ) es e.t.

Definición. Diremos que (X, τ) es T0 (o de Kolmogorov) si para todo $x \neq y$, o bien existe vecindad V de x con $y \notin V$, o bien existe vecindad W de y con $x \notin W$.

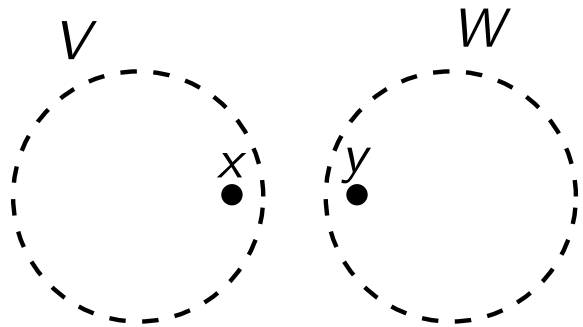


Definición. Diremos que (X, τ) es T1 (o de Fréchet) si para todo $x \neq y$ existen vecindades V de x y W de y tales que $y \notin V$ y $x \notin W$.

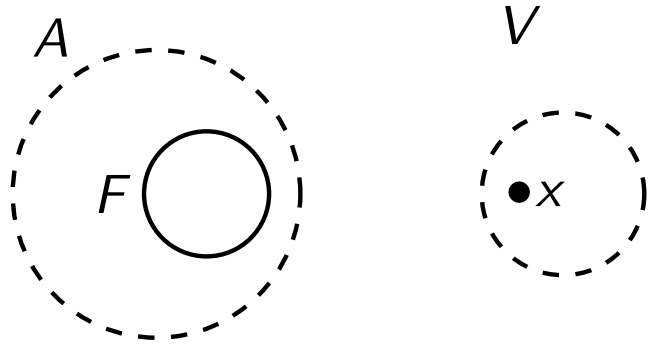


X es T1 ssi todo singleton es cerrado.

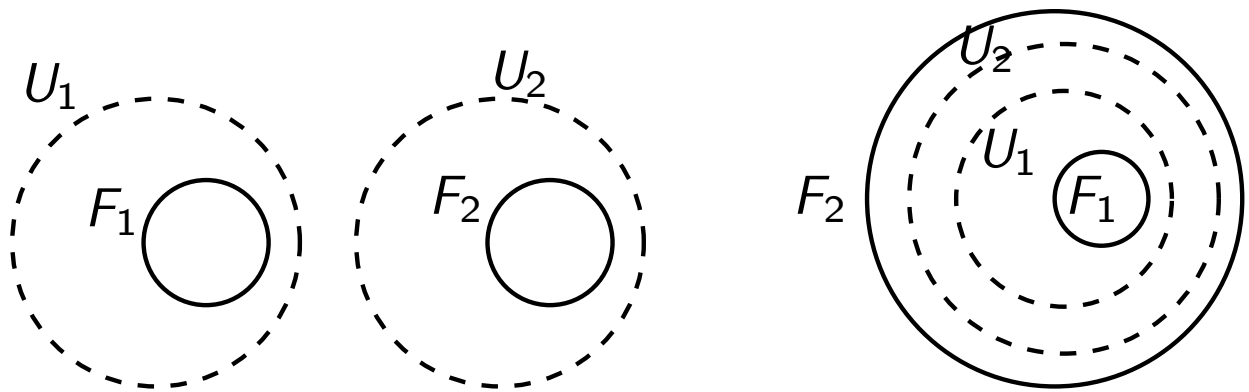
Definición. Diremos que (X, τ) es T2 (o de Hausdorff, o separado) si para todo $x \neq y$ existen vecindades disjuntas $V \in \mathscr{N}_x$, $W \in \mathscr{N}_y$.

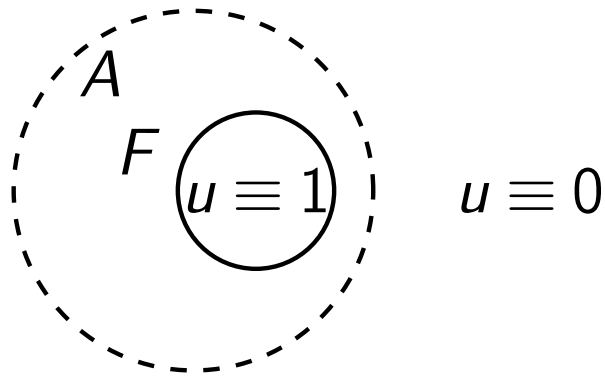


Definición. Diremos que (X, τ) es T3 (o regular) si es T1 y además, para todo cerrado F y $x \notin F$, existen abiertos A y vecindad $V \in \mathscr{N}_x$ tales que $V \cap A = \emptyset$ y $F \subseteq A$.



Definición. Diremos que (X, τ) es T4 (o normal) si es T1 y para cualquier par de cerrados F_1, F_2 disjuntos, existen abiertos U_1, U_2 disjuntos con $F_i \subseteq U_i$.





Teorema de Urysohn. (X, τ) e.t es normal (T4) ssi es T1 y se cumple lo siguiente:

Para todo cerrado F y abierto A tales que $F \subseteq A$, existe $u : X \to [0,1]$ continua entre la topo. τ en X y la topo. traza de la canónica en $\mathbb{R}$ sobre $[0,1]$, tal que

$$u(x) = 1, \quad \forall x \in F$$

y

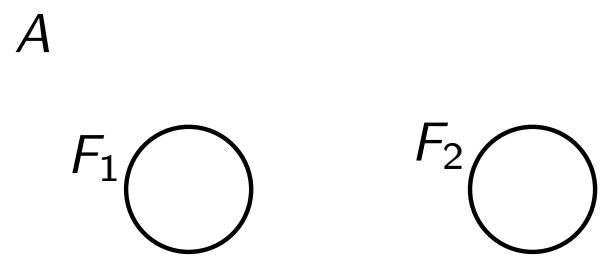
$$u(x) = 0, \quad \forall x \notin A.$$

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que (X, τ) es T1 y existe una función de Urysohn u. Probemos que (X, τ) es T4.

Sean F_1, F_2 cerrados disjuntos. Debemos encontrar abiertos U_1, U_2 disjuntos, con $F_i \subseteq U_i$.

Definamos, para poder usar u, $F := F_1$ y $A := F_2^c$, de forma que $F \subseteq A$.

Sea $u : X \to [0,1]$ continua la función de Urysohn asociada a F y A, con $u|_F = 1$ y $u|_{A^c} = 0$.

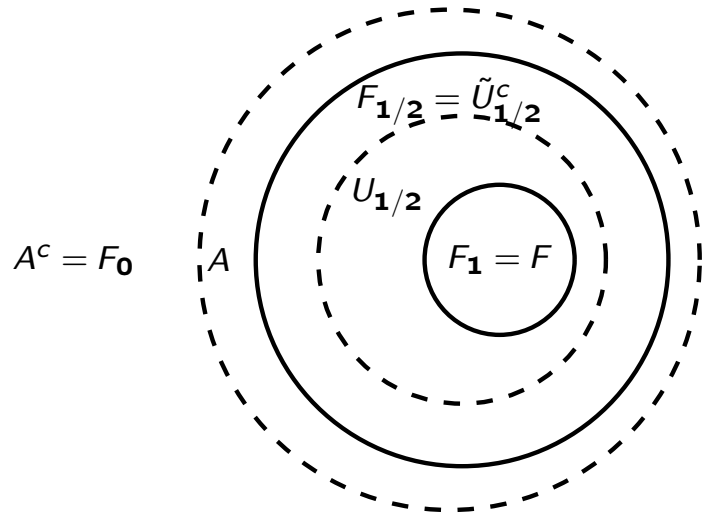


Definamos $U_1 := u^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ y $U_2 := u^{-1}([0, \frac{1}{2}))$.

Notar que U_1 y U_2 son disjuntos: no puede ser que $u(x) > \frac{1}{2}$ y $u(x) < \frac{1}{2}$ al mismo tiempo.

Notar también que $F_1 = F \subseteq U_1$, pues $F \subseteq u^{-1}(\{1\})$. Asimismo, $F_2 \subseteq U_2$.

Como $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son **abiertos** para la topo traza de la canónica para $\mathbb{R}$ sobre $[0, 1]$, se tiene que U_1 y U_2 son abiertos en X. OK.



Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos (X, τ) T4 y probemos que posee función de Urysohn.

Sean F cerrado y A abierto, con $F \subseteq A$. Definimos, para usar T4,

$$F_1 := F, \quad F_0 = A^c, \quad U_0 := A.$$

(Por razones importantes de intuición, tendremos que cambiar de notación!, ver figura arriba.)

Luego, por ser T4, existen un abierto $U_{1/2}$ y un cerrado $F_{1/2} = \tilde{U}^c_{1/2}$ tal que

$$F = F_1 \subseteq U_{1/2} \subseteq F_{1/2} \subseteq U_0 = A.$$

Aplicando el mismo procedimiento anterior con $F_1 \subseteq U_{1/2}$ y con $F_{1/2} \subseteq U_0$, tenemos que existen $U_{3/4}$ y $U_{1/4}$ abiertos, y $F_{3/4}$ y $F_{1/4}$ cerrados, tales que

$$F = F_1 \subseteq U_{3/4} \subseteq F_{3/4} \subseteq U_{1/2} \subseteq F_{1/2} \subseteq U_{1/4} \subseteq F_{1/4} \subseteq U_0.$$

$(1 = \frac{4}{4},\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4}.)$ Otra vez aplicando el mismo argumento

$$F = F_{\mathbf{1}} \subseteq U_{\mathbf{7/8}} \subseteq F_{\mathbf{7/8}} \subseteq U_{\mathbf{3/4}} \subseteq F_{\mathbf{3/4}} \subseteq U_{\mathbf{5/8}} \subseteq F_{\mathbf{5/8}} \subseteq U_{\mathbf{1/2}} \subseteq F_{\mathbf{1/2}} \subseteq U_{\mathbf{3/8}} \subseteq F_{\mathbf{3/8}} \subseteq U_{\mathbf{1/4}} \subseteq F_{\mathbf{1/4}} \subseteq U_{\mathbf{1/8}} \subseteq F_{\mathbf{1/8}} \subseteq U_{\mathbf{0}}.$$

$(\mathbf{1 = \frac{8}{8},\ \frac{3}{4} = \frac{6}{8},\ \frac{1}{2} = \frac{4}{8},\ \frac{1}{4} = \frac{2}{8}.})$

Obs. Un número diádico en $[0,1]$ es un racional de la forma $r = \frac{m}{2^k}$, para algún $k = 0,1,2,\ldots$ y algún $m \in \{0,1,\ldots,2^k\}$. **Ejercicio.** Mostrar que son densos en $[0,1]$.

Procediendo de manera inductiva, tendremos definidos, para cada r diádico en $[0,1]$, abiertos U_r y cerrados F_r de modo tal que

$$r_1 > r_2 \implies U_{r_1} \subseteq F_{r_1} \subseteq U_{r_2} \subseteq F_{r_2}.$$

Ahora si, definimos, para $x \in X$,

$$u(x) := \sup\{r \ : \ x \in F_r\}.$$

$$F = F_1 \subseteq U_{7/8} \subseteq F_{7/8} \subseteq U_{3/4} \subseteq F_{3/4} \subseteq U_{5/8} \subseteq F_{5/8} \subseteq U_{1/2} \subseteq F_{1/2} \subseteq U_{3/8} \subseteq F_{3/8} \subseteq U_{1/4} \subseteq F_{1/4} \subseteq U_{1/8} \subseteq F_{1/8} \subseteq U_0.$$

$$u(x) := \sup\{r \ : \ x \in F_r\}.$$

Si $x \in F = F_1$, entonces $u(x) = 1$. Si $x \notin A = U_0$, entonces $u(x) = 0$ pues $\forall r \ F_r \subseteq U_0$. En $A \backslash F$, claramente $u(x) \in [0,1]$.

Ahora **tenemos que probar que** u **es continua**. Debemos probar que la preimagen de todo abierto de $[0,1]$ con su topo traza, es abierto en X.

Como los intervalos abiertos son base de abiertos de $(\mathbb{R}, \tau_c)$, y la preimagen se lleva bien con la unión de abiertos, basta tomar abiertos en $[0,1]$ de la forma

$$(a,b) \cap [0,1], \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b.$$

Luego, como $0 \leq u \leq 1$,

$$u^{-1}((a,b) \cap [0,1]) = u^{-1}((a,b)).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} u^{-1}((a,b)) &= \{x \in X \ : \ a < u(x) < b\} \\ &= \{x \in X \ : \ a < u(x)\} \cap \{x \in X \ : \ u(x) < b\}. \end{aligned}$$

Probaremos entonces que $\{x \in X \ : \ a < u(x)\}$ y $\{x \in X \ : \ u(x) < b\}$ son abiertos, o equivalentemente, $\{x \in X \ : \ u(x) \leq a\}$ y $\{x \in X \ : \ u(x) \geq b\}$ son cerrados. Probemos el primero, el segundo, ejercicio.

Ahora, $x \in X$ tal que $u(x) \leq a$, como $u(x) = \sup\{r \ : \ x \in F_r\}$, equivale a

$$\forall r > a, \quad x \notin F_r. \qquad (A)$$

Probaremos que esta última aseveración es equivalente a

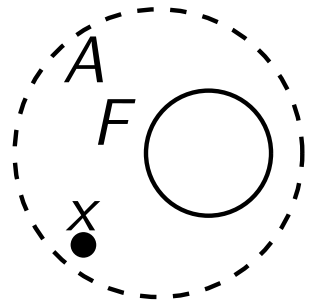
$$\forall r > a, \quad x \notin \text{int}(F_r). \qquad (B)$$

Esto probaría que $\{x \in X \ : \ u(x) \leq a\}$ es cerrado, pues

$$\begin{aligned} x \in X \text{ tq } u(x) \leq a &\iff \forall r > a, \quad x \notin \text{int}(F_r) \\ &\iff \forall r > a, \quad x \in (\text{int}(F_r))^c. \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $\{x \in X \text{ tq } u(x) \leq a\} = \cap_{r>a}(\text{int}(F_r))^c$.

Probemos $(A) \iff (B)$. La implicancia $(A) \implies (B)$ es directa. Para la otra, si $r > a$, tomemos $r' \in (a, r)$, y usando (B), $x \notin \text{int}(F_{r'})$; de donde $x \notin F_r$, porque $F_r \subseteq \text{int}(F_{r'})$.



Corolario no trivial. Todo espacio métrico (X, d) es normal.

Demostración. Vamos a probar que (X, d) e.m. posee una función u de Urysohn. **Probar que es T1 como ejercicio**.

Sea F cerrado y A abierto conteniendo a F, ambos en X. Sea $u(x)$ definida por (ver dibujo)

$$u(x) := \frac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, F)},$$

donde $d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$. Claramente, si $x \in B$, $d(x, B) = 0$.

$$u(x) := \frac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, F)}.$$

Probaremos dos cosas:

1. Que u está bien definida: $u \in [0,1]$ y su denominador no se anula.
2. Que u es continua entre las respectivas topologías en X y $[0,1]$.

$$u(x) := \frac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, F)},$$

1. u **está bien definida:**

Si para cierto $x \in X$ se tiene $d(x, A^c) + d(x, F) = 0$, entonces ambos términos son cero.

Si $d(x, F) = 0$, por definición de ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $y_\varepsilon \in F$ tq $d(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$.

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $y_\varepsilon \in B(x, \varepsilon) \cap F$. Luego, $x \in adh(F) = F$. ($x \in adh(B)$ ssi $\forall V \in \mathcal{N}_x$, $V \cap B \neq \emptyset$.)

Pero A^c es cerrado, y $d(x, A^c) = 0$. Aplicando mismo argumento de antes, $x \in A^c$. Es decir, $F \cap A^c \neq \emptyset$, una contradicción.

Finalmente, claramente $0 \leq u(x) \leq 1$. Notemos que si $x \in F$, $d(x, F) = 0$ y por ende, $u(x) = 1$. Asimismo, si $x \in A^c$, $d(x, A^c) = 0$ y luego $u(x) = 0$.

$$u(x) := \frac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, F)}.$$

2. u **es continua:** Basta probar que para B fijo,

$$d_B : X \to \mathbb{R}, \quad d_B(x) := \mathrm{d}(x, B)$$

es continua entre (X, d) y $\mathbb{R}$. El resultado general se obtiene por **composición de funciones continuas** y que el denominador nunca se anula.

Fijemos $B \subseteq X$. Vamos a probar la siguiente identidad, válida para todo $x, y \in X$:

$$|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y).$$

$$|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y).$$

Con esta identidad, no es difícil probar que d_B **es continua en cada** $x_0 \in X$.

En efecto, por def. de continuidad, debemos probar que

$$\forall W \in \mathscr{N}_{d_B(x_0)} \quad \exists V \in \mathscr{N}_{x_0} \quad \text{t.q.} \quad d_B(V) \subseteq W.$$

Esta sentencia, traducida al lenguaje de espacios métricos, se lee

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x \in B(x_0, \delta) \implies |d_B(x) - d_B(x_0)| < \varepsilon.$$

(aquí, $W = (d_B(x_0) - \varepsilon, d_B(x_0) + \varepsilon)$ y $V = B(x_0, \delta)$).

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon > 0$, de donde

$$x \in B(x_0, \delta) \implies d(x, x_0) < \varepsilon.$$

Además, usando la identidad

$$|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y),$$

con $x = x$, $y = x_0$, tenemos

$$|d_B(x) - d_B(x_0)| \leq d(x, x_0) < \varepsilon.$$

Que era lo pedido.

$$|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y),$$

Probemos la identidad en azul. Para todo $z \in B$,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Tomando ínfimo sobre los $z \in B$,

$$d(x,B) \leq d(x,y) + d(y,B).$$

Luego,

$$d(x,B) - d(y,B) \leq d(x,y).$$

Notar que la desigualdad anterior es más útil si $d(x,B) - d(y,B) \geq 0$.

Finalmente, cambiando los roles de x e y, y usando que $d(x,y) = d(y,x)$, se concluye

$$|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y).$$

Próximo video. Mas sobre espacios de Hausdorff (T2).