

Video D8 Análisis: Topología, Espacios de Hausdorff. Redes y Convergencia.

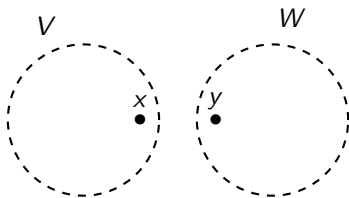
Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

23 de mayo de 2021

En estos slides veremos de manera más profunda los espacios T2, o de Hausdorff.

Definición. Diremos que (X, τ) es T2 (o de Hausdorff, o separado) si para todo $x \neq y$ existen vecindades disjuntas $V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$.



Primeros resultados. Para (X, τ) et., son equivalentes:

1. (X, τ) es Hausdorff.
2. Para $x \in X$ e $y \neq x$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ con $y \notin \text{adh}(V)$.
3. Para todo $x \in X$, $\bigcap \{\text{adh}(V) : V \in \mathcal{N}_x\} = \{x\}$.
4. La diagonal $D := \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $(X \times X, \tau \otimes \tau)$.

Demostración.

1. $\implies$ 2. Ejercicio.

2. $\implies$ 3.

($\supseteq$) Si $V \in \mathcal{N}_x$, $x \in V \subseteq \text{adh}(V)$. Luego, $x \in \bigcap \{\text{adh}(V) : V \in \mathcal{N}_x\}$.

($\subseteq$) Si $y \in \bigcap \{\text{adh}(V) : V \in \mathcal{N}_x\}$ es distinto de x , por hipótesis existe $V \in \mathcal{N}_x$ con $y \notin \text{adh}(V)$, contradicción.

3. $\implies$ 4.

Probemos que D^c es abierto. Sea $(x, y) \in D^c$, es decir $x \neq y$. Luego, $y \notin \bigcap \{\text{adh}(V) : V \in \mathcal{N}_x\}$.

Luego, para cierto, $V \in \mathcal{N}_x$, $y \notin \text{adh}(V)$. Sean A abierto tal que $x \in A \subseteq V$, y $B := (\text{adh}(V))^c$ abierto con $y \in B$. Entonces $A \times B$ es abierto contenido en D^c , y $(x, y) \in A \times B$. OK.

4. $\implies$ 1.

Si $x \neq y$, $(x, y) \notin D$. Como D es cerrado, D^c es abierto en $X \times X$. Luego, existen A, B abiertos en τ tales que $(x, y) \in A \times B \subseteq D^c$.

Consecuentemente $x \in A$ e $y \in B$, y $A \cap B = \emptyset$ porque si no lo fuese $A \times B$ intersectaría la diagonal D . OK.

Más propiedades.

1. Todo subespacio de un Hausdorff es Hausdorff. **(Ejercicio)**
2. El producto arbitrario de Hausdorff es Hausdorff.

Probemos la segunda afirmación. Sean $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Hausdorff, y $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, con topología $\tau := \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$.

Sean $x \neq y$ en X . Luego, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \neq y_\lambda$. Como X_λ es Hausdorff, existen abiertos A_λ, B_λ disjuntos que contienen a x_λ e y_λ respectivamente.

El resultado final se obtiene considerando los cilindros abiertos $C_A := A_\lambda \times \prod_{\mu \neq \lambda} X_\mu$ y $C_B := B_\lambda \times \prod_{\mu \neq \lambda} X_\mu$, que contienen a x e y respectivamente, y que son disjuntos. OK.

Ejercicio. Probar que es un ssi: $\prod$ es Hausdorff ssi cada uno es Hausdorff.

Otro ejemplo de espacio que no es Hausdorff.

$X = [0, 1]$ con la base de vecindades (abiertas) $(\beta_x)_{x \in [0, 1]}$ siguiente:

$$x \in (0, 1) \implies \beta_x := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [0, 1]\}_{\varepsilon > 0}.$$

Si $x = 0, 1$, tomamos

$$\beta_0 = \beta_1 := \{[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]\}_{\varepsilon > 0}.$$

X con la topología generado no es Hausdorff, porque no puedo separar al 0 del 1. (En realidad, X es muy similar a un círculo, pero no es igual.)

Si X no es Hausdorff, es posible que límite de sucesiones no sean único!

Redes y convergencia.

Resulta que en e.t. arbitrarios, las sucesiones **no son buenas herramientas para medir convergencia** (veremos ejemplos).

En cierta forma, se necesita una mejora (generalización) del concepto de sucesión, para trabajar espacios más generales.

Aquí aparece el concepto de **red**, que naturalmente generaliza el de sucesión.

Definición 1. Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que Λ es **dirigido** si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ con $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Definición 2. Un subconjunto $B \subseteq \Lambda$ se dice **cofinal** si para todo $\alpha \in \Lambda$, existe $\beta \in B$ con $\alpha \leq \beta$. (“Una subsucesión”).

Ejemplos.

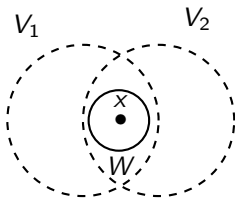
1. $(\mathbb{N}, \leq)$ es dirigido, y $2\mathbb{N}$ es cofinal en $\mathbb{N}$.
2. $(\mathbb{R}, \leq)$ es dirigido, pero $(-\infty, 0]$ no es cofinal en $\mathbb{R}$.
3. Todo conjunto cofinal es dirigido (ejercicio).

Otro ejemplo importante: vecindades de un punto como conjunto dirigido.

Sea (X, τ) y $x \in X$ dado. Entonces $\Lambda = \mathcal{N}_x$ con el orden $V \leq W \iff W \subseteq V$ (**inclusión inversa**) es dirigido.

Es claro que $\leq$ es orden, pero no es total porque no todos los conjuntos están relacionados.

Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $W := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$ y cumple $V_1 \leq W$ y $V_2 \leq W$.



Definición. Sea X conjunto y $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido. Una **red** es una función $x : \Lambda \rightarrow X$.

Notación: $x = x(\lambda)$ pero es mejor $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Obs. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, las llamamos sucesiones.

Ejemplos.

1. Cualquier función $f : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \mathbb{R}$ es una red.
2. En $(\Lambda, \leq) = (\mathcal{P}(X_0), \subseteq)$, para $A \subseteq X_0$, $x_A := 1_A$ es una red con valores en $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.
3. En $X = \{0, 1\}$ con la topo de Sierpinski, $\Lambda = \mathcal{N}_1$, entonces $x_V = 1$ para $V \in \mathcal{N}_1$ es red a valores en X .

Definición. Sea (X, τ) e.t. Diremos que la red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ **converge** a $\bar{x} \in X$, si

$$\forall V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}, \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ t.q. } \lambda \geq \lambda_0 \implies x_\lambda \in V.$$

Ejemplos.

1. $x_\lambda = \bar{x}$ converge a $\bar{x}$.
2. En $X = \{0, 1\}$ con la topo de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, tomemos $\Lambda = \mathcal{N}_0 = \{\{0\}, X\}$ **con la inclusión inversa**, y sea la red $x_V = 0$ para $V \in \mathcal{N}_0$.

Entonces $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_0}$ converge a ambos, 0 y 1 !!!

En efecto, $V = X$ es la única vecindad de $\bar{x} = 1$. Tomando $\lambda_0 = \{0\}$, $\lambda = \{0\} \geq \lambda_0$, se tiene $0 = x_V \in V = X$.

Pero además, si ahora $\bar{x} = 0$, $V = \{0\}, X$ son vecindades de 0. Tomando $\lambda_0 = \{0\}$, $\lambda = \lambda_0$, en ambos casos de V uno tiene $0 = x_V \in V$.

Teorema. Si (X, τ) es Hausdorff, entonces toda red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convergente posee un único límite.

Demostración.

Supongamos x_λ converge a $\bar{x}$ y $\hat{x}$ diferentes. Como X es Hausdorff, existen vecindades disjuntas V y W de $\bar{x}$ y $\hat{x}$, respectivamente.

Por otro lado, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in V$. Además, existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_1$, $x_\lambda \in W$.

Como Λ es dirigido, existe $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $\lambda_2 \geq \lambda_0$, $\lambda_2 \geq \lambda_1$. En particular, para $\lambda \geq \lambda_2$, $x_\lambda \in V \cap W$, contradicción.

Más resultados sobre redes.

Teorema. Si (X, τ) es e.t. y $A \subseteq X$, entonces $x \in \text{adh}(A)$ ssi existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ con $x_\lambda \rightarrow x$.

Demostración.

($\implies$) Sea $x \in \text{adh}(A)$. Luego, para cualquier $V \in \mathcal{N}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$.

Para cada $V \in \mathcal{N}_x$, ordenado con la inclusión inversa, sea $x_V \in V \cap A \subseteq A$.

Luego, $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_x}$ es red y converge a x , pues para cada $W \in \mathcal{N}_x$, existe $V_0 := W \in \mathcal{N}_x$ tal que para $V \subseteq V_0$, $x_V \in W$.

($\impliedby$) Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ red con $x_\lambda \rightarrow x$. Luego, para cada $V \in \mathcal{N}_x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $x_\lambda \in V$. Luego, $V \cap A \neq \emptyset$. OK.

Teorema. Si (X, τ) y (Y, σ) son e.t. y $f : X \rightarrow Y$ función, entonces f es continua en $\bar{x} \in X$ ssi

$$\forall x_\lambda \rightarrow \bar{x}, \quad f(x_\lambda) \rightarrow f(\bar{x}).$$

Demostración.

($\implies$) Supongamos f continua en $\bar{x}$, y sea $x_\lambda \rightarrow \bar{x}$. PDQ $f(x_\lambda) \rightarrow f(\bar{x})$.

Sea $W \in \mathcal{N}_{f(\bar{x})}$. Por continuidad, existe $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ tal que $f(V) \subseteq W$.

Como $x_\lambda \rightarrow \bar{x}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in V$. Luego, para $\lambda \geq \lambda_0$, $f(x_\lambda) \in f(V) \subseteq W$. OK.

($\impliedby$) Por contradicción, supongamos f no continua en $\bar{x}$. Luego, existe una vecindad $W \in \mathcal{N}_{f(\bar{x})}$ que para cualquier $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$, satisface $f(V) \not\subseteq W$.

Para cada $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$, sea $x_V \in V$ tal que $f(x_V) \notin W$. Pero $x_V \rightarrow \bar{x}$ (con conjunto dirigido $\Lambda = \mathcal{N}_{\bar{x}}$ y orden inverso, ejercicio!!), y $f(x_V)$ no converge a $f(\bar{x})$, porque $f(x_V) \notin W$. Contradicción. OK.

Ejercicios.

1. Si f es continua en $\bar{x}$, entonces $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ para $x_n \rightarrow \bar{x}$ (aquí, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es red con $\Lambda = \mathbb{N}$).

(Revisar $(\implies)$ de la demo anterior y verificar que $\Lambda = \mathbb{N}$ funciona. Ver dónde $(\Longleftarrow)$ no funciona si $\Lambda = \mathbb{N}$.)

2. Mostrar que la recíproca no es cierta en general.

En realidad, la implicación contraria es cierta cuando X posee una **base de vecindades numerable**.

Definiciones.

1. (X, τ) e.t. se dice que cumple el **primer axioma de numerabilidad (PAN)** si cada punto $x \in X$ posee una base de vecindades β_x numerable.
2. (X, τ) e.t. se dice que cumple el **segundo axioma de numerabilidad (SAN)** si τ admite una base de abiertos numerable.

Observaciones. 1. SAN implica PAN (por qué?)

2. Todo espacio métrico satisface el PAN. Basta tomar $\beta_x = \{B(x, \frac{1}{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejercicios. 1. Si (X, τ) es e.t. que satisface el PAN, y $A \subseteq X$, entonces $x \in \text{adh}(A)$ ssi existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \rightarrow x$.

2. Si (X, τ) y (Y, σ) son e.t., con X satisfaciendo el PAN, y $f : X \rightarrow Y$ función, entonces f es continua en $\bar{x} \in X$ ssi

$$\forall x_n \rightarrow \bar{x}, \quad f(x_n) \rightarrow f(\bar{x}).$$

Definiciones. Dado (X, τ) e.t., y $A \subseteq X$, diremos que A es denso en X si $\text{adh}(A) = X$. Si ahora X posee un denso numerable, diremos que es **separado**.

Ejemplos. $\mathbb{R}$ es separable (con la topo canónica), porque $\mathbb{Q}$ es denso numerable.

Teorema. Si (X, τ) es e.t. que satisface el SAN, entonces satisface el PAN y es separable. La recíproca no es cierta en general !!

Ejercicio. Si (X, d) es e.m. separable, entonces satisface el SAN.

Hint: Si $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ es denso numerable en X , tomar

$\mathcal{B} := \{B(x_i, \varepsilon) : x_i \in D, \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ y probar que es base de abiertos para τ_d .

Definiciones.

1. Sean Λ, Θ dos conjuntos dirigidos. Diremos que $(y_\theta)_{\theta \in \Theta}$ es una **subred** de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ si

1. Existe $F : \Theta \rightarrow \Lambda$ función con $F(\theta) = \lambda$,
2. Para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $\theta \in \Theta$ tal que para cualquier $\theta' \geq \theta$, $F(\theta') \geq \lambda$.

2. Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en (X, τ) e.t. Diremos que $\bar{x} \in X$ es **punto de acumulación** de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ si para cualquier $V \in \mathcal{N}_x$, y para cualquier $\lambda \in \Lambda$, existe $\lambda' \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.

Obs. Ojo a la diferencia entre pto. de acumulación y la definición de convergencia!

La próxima clase veremos:

Teorema 1. Si (X, τ) es e.t. y $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red convergente a $\bar{x}$, entonces toda subred de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge al mismo $\bar{x}$.

Teorema 2. $\bar{x}$ es punto de acumulación de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ssi existe una subred $(y_\theta)_{\theta \in \Theta}$ de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que converge a $\bar{x}$.

Próximo video. Más sobre redes y convergencia. Ejemplos de e.t.