

Video D9 Análisis: Topología. Redes II, Homeomorfismos y ejemplos de ets.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

29 de mayo de 2021

Redes y convergencia (recuerdo).

Definición 1. Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que Λ es **dirigido** si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ con $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Ejemplos.

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ son dirigidos.
2. Sea (X, τ) y $x \in X$ dado. Entonces $\Lambda = \mathcal{N}_x$ con el orden $V \leq W \iff W \subseteq V$ (**inclusión inversa**) es dirigido.

Definición 2. Sea X conjunto y $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido. Una **red** es una función $x : \Lambda \rightarrow X$.

Notación: $x = x(\lambda)$ pero es mejor $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Obs. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, las llamamos sucesiones.

Definición 3. Sea (X, τ) e.t. Diremos que la red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ **converge** a $\bar{x} \in X$, si

$$\forall V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}, \quad \exists \lambda_0 \in \Lambda \quad \text{t.q.} \quad \lambda \geq \lambda_0 \implies x_\lambda \in V.$$

Obs. Si X no es Hausdorff, el límite puede no ser único.

Teorema 1. Si (X, τ) es Hausdorff, entonces toda red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convergente posee un único límite.

Teorema 2. Si (X, τ) es e.t. y $A \subseteq X$, entonces $x \in \text{adh}(A)$ ssi existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ con $x_\lambda \rightarrow x$.

Teorema 3. Si (X, τ) y (Y, σ) son e.t. y $f : X \rightarrow Y$ función, entonces f es continua en $\bar{x} \in X$ ssi

$$\forall x_\lambda \rightarrow \bar{x}, \quad f(x_\lambda) \rightarrow f(\bar{x}).$$

Definiciones.

1. Sean Λ, Θ dos conjuntos dirigidos. Diremos que $(y_\theta)_{\theta \in \Theta}$ es una **subred** de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ si

1. Existe $F : \Theta \rightarrow \Lambda$ función con $F(\theta) = \lambda$ (i.e., $y_\theta = x_{F(\theta)}$).
2. Para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $\theta \in \Theta$ tal que para cualquier $\theta' \geq \theta$, $F(\theta') \geq \lambda$.

2. Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en (X, τ) e.t. Diremos que $\bar{x} \in X$ es **punto de acumulación** de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ si para cualquier $V \in \mathcal{N}_x$, y para cualquier $\lambda \in \Lambda$, existe $\lambda' \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.

Obs. Ojo a la diferencia entre pto. de acumulación y la definición de convergencia!

Teorema 1. Si (X, τ) es e.t. y $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red convergente a $\bar{x}$, entonces toda subred de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge al mismo $\bar{x}$.

Demostración.

Sea $(y_\theta)_{\theta \in \Theta}$ subred de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Probemos que $y_\theta \rightarrow \bar{x}$.

Es decir, para cualquier $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$, existe $\theta_0 \in \Theta$ tal que si $\theta \geq \theta_0$, $y_\theta \in V$.

Sea $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$. Como $x_\lambda \rightarrow \bar{x}$, sea $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in V$.

Sea $F : \Theta \rightarrow \Lambda$ la función tal que $y_\theta = x_{F(\theta)}$. Por ser subred, para el λ_0 anterior, existe un $\theta_0 \in \Theta$ tal que, para cualquier $\theta \geq \theta_0$, $F(\theta) \geq \lambda_0$.

Luego, si $\theta \geq \theta_0$, $\lambda := F(\theta) \geq \lambda_0$ y entonces $y_\theta = x_{F(\theta)} = x_\lambda \in V$. OK.

Teorema 2. $\bar{x}$ es punto de acumulación de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ssi existe una subred $(y_\theta)_{\theta \in \Theta}$ de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que converge a $\bar{x}$.

Demostración.

($\Leftarrow$) Sean $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ y $\lambda \in \Lambda$. Probaremos que existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.

Dado que $y_\theta \rightarrow \bar{x}$, existe θ_0 tal que $y_\theta \in V$ para $\theta \geq \theta_0$.

Sea $F : \Theta \rightarrow \Lambda$ tal que $y_\theta = x_{F(\theta)}$. Por def. de subred, sea $\theta_1 \in \Theta$ tal que si $\theta \geq \theta_1$, $F(\theta) \geq \lambda$.

Usando que Θ es dirigido, sea ahora $\theta_2 \in \Theta$ tal que $\theta_2 \geq \theta_1$ y $\theta_2 \geq \theta_0$.

Luego, se tiene que

$$y_{\theta_2} \in V, \quad F(\theta_2) \geq \lambda, \quad y_{\theta_2} = x_{F(\theta_2)}.$$

Denotando $\lambda' := F(\theta_2)$, se tiene lo pedido.

($\implies$) Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ red y $\bar{x}$ punto de acumulación. Sea $\Theta := \Lambda \times \mathcal{N}_{\bar{x}}$ con el orden siguiente:

$$(\lambda, V) \leq (\lambda', V') \iff (\lambda \leq \lambda' \text{ y } V' \subseteq V).$$

Ejercicio: Mostrar que esta definición es orden parcial y hace a Θ conjunto dirigido.

Sean $(\lambda, V) \in \Theta$. Para estos, sea $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ tal que $x_{\tilde{\lambda}} \in V$ (por ser pto. de acumulación). Definamos

$$y_{(\lambda, V)} := x_{\tilde{\lambda}}, \quad F(\lambda, V) := \tilde{\lambda}, \quad \theta = (\lambda, V).$$

Probemos que esta subred está bien definida, y converge a $\bar{x}$.

Bien definida significa lo siguiente:

1. Existe $F : \Theta \rightarrow \Lambda$ función con $F(\theta) = \lambda$ (i.e., $y_\theta = x_{F(\theta)}$). OK.
2. Para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $\theta \in \Theta$ tal que para cualquier $\theta' \geq \theta$, $F(\theta') \geq \lambda$.

Probemos lo segundo: para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $\theta \in \Theta$ tal que para cualquier $\theta' \geq \theta$, $F(\theta') \geq \lambda$.

Sea $\lambda \in \Lambda$. Tomemos $\theta \in \Theta$ dado por $\theta := (\lambda, X)$. Si ahora $\theta' = (\lambda', V') \geq \theta$, quiere decir que $\lambda' \geq \lambda$ y que $V' \subseteq X$.

Esto último es redundante, por lo que solo tenemos $\lambda' \geq \lambda$. De aquí, $F(\theta') = F(\lambda', V') = \tilde{\lambda}'$, para cierto $\tilde{\lambda}' \geq \lambda' \geq \lambda$ (def. subred). OK.

Mostremos ahora que converge. Sea $V \in \mathcal{N}_{\tilde{X}}$ y sea $\theta_0 := (\lambda_0, V)$, para cierto λ_0 fijo arbitrario.

Sea ahora $\theta = (\lambda', V') \geq \theta_0$. Entonces $\lambda' \geq \lambda_0$ y $V' \subseteq V$.

Pero por definición de la subred, $y_\theta = x_{F(\lambda', V')} \in V' \subseteq V$, que es lo que queríamos probar.

Definición. Dos ets (X, τ) e (Y, σ) se dicen **homeomorfos** si existe $f : X \rightarrow Y$ biyectiva con f y f^{-1} continuas.

A tal f se le llama **homeomorfismo**.

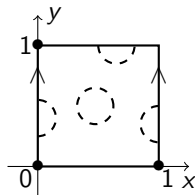
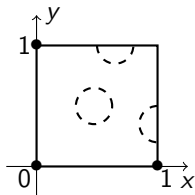
Ejemplos.

1. Si $Y := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces $f : (\mathbb{R}, \tau_c) \rightarrow (Y, \tau_c|_Y)$ dada por $f(x) = \arctan x$ es homeomorfismo con inversa $f^{-1}(x) = \tan x$.
2. $g : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ dada por $g(n) = 2n$ es homeomorfismo (cada e.t. tiene la topología discreta). Ejercicio!!

Ejercicio difícil. Encontrar $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \rightarrow Y$ biyectiva y continua, $g : Y \rightarrow X$ biyectiva y continua, pero donde no existe homeomorfismo (en otras palabras, $g \neq f^{-1}$).

Ejemplos de esp. topológicos y homeomorfismos. Caso 1:

$X_1 = [0, 1]^2$ en $\mathbb{R}^2$.



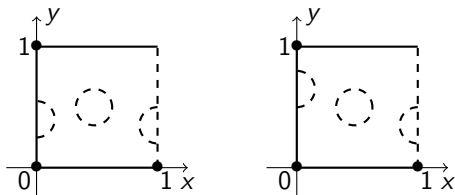
1. (τ_1) . Topo traza de $X_1 = [0, 1]^2$ (ver izquierda arriba). Base de vecindades de (x, y) :

$$B((x, y), \varepsilon) \cap X_1, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad \varepsilon > 0.$$

2. (τ_2) . Topo cilíndrica (no Hausdorff), se identifica $(0, y) \sim (1, y)$ (ver derecha arriba). Base de vecindades para (x, y) :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \implies B((x, y), \varepsilon) \cap X_1, \\ x = 0, 1 \implies (B((0, y), \varepsilon) \cup B((1, y), \varepsilon)) \cap X_1. \end{cases}$$

Caso 2. Sea $X_2 = [0, 1) \times [0, 1]$.



1. (τ_3) . Cilindro Hausdorff. Base de vecindades de (x, y) :

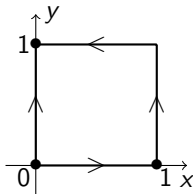
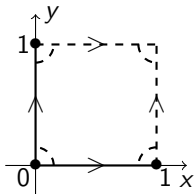
$$\begin{cases} 0 < x < 1 \implies B((x, y), \varepsilon) \cap X_2, \\ x = 0 \implies (B((0, y), \varepsilon) \cup B((1, y), \varepsilon)) \cap X_2. \end{cases}$$

X_2 con esta topo es homeomorfo al cilindro de $\mathbb{R}^3$ $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ con su topo traza.

2. (τ_4) . **Cinta de Möbius**. Base de vecindades para (x, y) :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \implies B((x, y), \varepsilon) \cap X_2, \\ x = 0 \implies (B((0, y), \varepsilon) \cup B((1, 1 - y), \varepsilon)) \cap X_2. \end{cases}$$

Caso 3: El toro. Sea $X_3 := [0, 1)^2$.



1. (τ_5) . (Izquierda) Base de vecindades de (x, y) :

$$\begin{cases} x, y = 0 \implies (B((0, 0), \varepsilon) \cup B((1, 0), \varepsilon) \cup B((1, 1), \varepsilon) \cup B((0, 1), \varepsilon)) \cap X_3 \\ 0 < x, y < 1 \implies B((x, y), \varepsilon) \cap X_3, \\ x = 0, 0 < y < 1 \implies (B((0, y), \varepsilon) \cup B((1, y), \varepsilon)) \cap X_3 \\ y = 0, 0 < x < 1 \implies (B((x, 0), \varepsilon) \cup B((x, 1), \varepsilon)) \cap X_3. \end{cases}$$

Obs. El toro es homeomorfo al espacio cuociente de (X_1, τ_1) con la relación

$$\mathcal{R} = \begin{cases} (x, y) \sim (x, y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ (0, y) \sim (1, y), & 0 \leq y \leq 1, \\ (x, 0) \sim (x, 1), & 0 \leq x \leq 1, \\ (0, 0) \sim (1, 0) \sim (1, 1) \sim (0, 1). \end{cases}$$

Caso 4: la botella de Klein. (Ver figura slide anterior derecha)
Corresponde a la topología (τ_6) de espacio cuociente sobre (X_1, τ_1) definida por la relación

$$\mathcal{R} = \begin{cases} (x, y) \sim (x, y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ (0, y) \sim (1, y), & 0 \leq y \leq 1, \\ (x, 0) \sim (1-x, 1), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicios.

1. Identificar la topología que se obtiene al tomar (X_1, τ_1) con la relación de equivalencia

$$\mathcal{R} = \begin{cases} (x, y) \sim (x, y), & \forall x, y, \\ (0, y) \sim (1, y), & \forall y. \end{cases}$$

2. Mostrar que (X_2, τ_4) (cinta de Möebius) es homeomorfo al espacio cuociente de (X_2, τ_2) con la relación de equivalencia

$$\mathcal{R} = \begin{cases} (x, y) \sim (x, y), & \forall x, y, \\ (0, y) \sim (1, 1 - y), & \forall y. \end{cases}$$

Próximo video. Compacidad.