Video D10 Análisis: Topología. Compacidad.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

29 de mayo de 2021

Veremos el concepto esencial de compacidad. Sea (X,τ) e.t.

Definición 1. Un **recubrimiento abierto** de X es una familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$ tal que $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

Un **subrecubrimiento** es un subconjunto de la familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que sigue cubriendo X.

Ejemplos. 1. Para $\varepsilon > 0$,

$$[0,1] = \bigcup_{x\in[0,1]} ((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap[0,1]).$$

2. $(-\infty,0) = \cup_{n\geq 1}(-\infty,-\frac{1}{n}) = (-\infty,-1)\cup(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\infty,-\frac{1}{3})\ldots$

3. $[0,1) = \cup_{n\geq 1}[0,1-\frac{1}{n})$.

Definición 2. Diremos que (X, τ) es **compacto si todo** recubrimiento abierto de X posee un **subrecubrimiento finito**.

$A \subseteq X$ se dirá compacto si $(A, \tau\big|_A)$ es compacto.

Ejemplos. 1. Del ejemplo anterior, si $N_\varepsilon =$ entero superior a $1/\varepsilon$,

$$[0,1] = \bigcup_{n=0,1,\ldots,N_\varepsilon} ((n\varepsilon - \varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon) \cap [0,1]),$$

2. **Ejercicio.** (X, τ_d) con la topo. discreta es compacto ssi X es finito.

3. Todo conjunto finito es compacto (inclusive el vacío).

4. Una sucesión convergente más su límite es compacta (por qué?).

5. $(\mathbb{R}^d, \tau_c)$ no es compacto (basta ver $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \geq 1} B(0,n)$).

6. En $(\mathbb{R}^d, \tau_c)$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es compacto ssi es cerrado y acotado (a ver a posteriori).

Teorema 1. Sea (X, τ) et. Son equivalentes:

1. (X, τ) es compacto.

2. (X, τ) posee la propiedad de intersección finita (PIF):

Si $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de cerrados en X tales que $\bigcap_{\lambda \in F} F_\lambda \neq \emptyset$, para cualquier $F \subseteq \Lambda$ finito, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

3. Toda red en X posee un pto. de acumulación.

4. Toda red en X posee una subred convergente.

Obs. 1. Ya probamos 3 $\iff$ 4. Probaremos 1 $\iff$ 2, 2 $\implies$ 3, y 3 $\implies$ 1.

2. La PIF es en cierta forma "el complemento" de ser compacto.

Demostración.

$1 \implies 2$. Por contradicción. Sea $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ familia de cerrados en X tales que $\bigcap_{\lambda\in F} F_\lambda \neq \emptyset$, para cualquier $F \subseteq \Lambda$ finito.

Supongamos $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$.

Luego, $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda)^c = X$, es decir, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$. Por ende, $(F_\lambda^c)_{\lambda\in\Lambda}$ es recubrimiento abierto de X.

Por ser X compacto, existe recubrimiento finito: $X = \bigcup_{\lambda\in F} F_\lambda^c$, F finito, lo que implica $\bigcap_{\lambda\in F} F_\lambda = \emptyset$, contradicción. OK.

$2 \implies 1$. Ejercicio. (Muy similar al anterior, tomar complementos!)

$2 \implies 3$. Dada la PIF, probemos que toda red posee punto de acumulación. Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ red en X.

Usando esta red, construimos cerrados: Sea $F_\lambda := adh\{x_\mu \ : \ \mu \geq \lambda\}$.

Notar que para todo F de cardinal finito en Λ, se tiene $\bigcap_{\lambda\in F} F_\lambda \neq \emptyset$ (verificar usando que Λ es dirigido).

Luego, gracias a la PIF, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$. Sea $\bar{x}$ en este conjunto. Probemos que es pto. de acumulación.

Sea $V \in \mathscr{N}_{\bar{x}}$ y $\lambda \in \Lambda$. PDQ existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.

Como $\bar{x} \in F_\lambda = adh\{x_\mu \ : \ \mu \geq \lambda\}$, por def. de adherencia, $V \cap \{x_\mu \ : \ \mu \geq \lambda\} \neq \emptyset$.

Luego, existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.

$3 \implies 1$. Supongamos que toda red en X posee pto. de acumulación, y probemos que X es compacto.

Por contradicción, supongamos que X no es compacto. Luego, existe un recubrimiento $(\Theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X que no posee ningún sub-recubrimiento finito.

Sea $A \subseteq \Lambda$ de cardinal finito. Sabemos que $\bigcup_{\lambda\in A}\Theta_\lambda \subsetneq X$. Sea $x_A \in X \backslash \bigcup_{\lambda\in A}\Theta_\lambda$.

(Para cada A de cardinal finito en Λ, colocamos el orden creciente de la inclusión, que hace a ese conjunto dirigido. Luego, tenemos construida una red (x_A).)

Sea $\bar{x}$ punto de acumulación de esta red. Sea $\bar{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\bar{x} \in \Theta_{\bar{\lambda}}$ (que es vecindad).

Por def. de pto de acumulación, para cada A finito, existe A' finito, $A \subseteq A'$, tal que $x_{A'} \in \Theta_{\bar{\lambda}}$.

Tomado $A = \{\bar{\lambda}\}$, existe A' de cardinal finito conteniendo a $\bar{\lambda}$ tal que $x_{A'} \in \Theta_{\bar{\lambda}}$. Pero por def.

$$x_{A'} \in X \backslash \bigcup_{\lambda\in A'} \Theta_\lambda \implies x_{A'} \notin \Theta_{\bar{\lambda}} \qquad \Rightarrow\Leftarrow .$$

Recordemos que si (X, τ) es e.t., $A \subseteq X$ se dirá compacto si $(A, \tau\big|_A)$ es compacto.

Lema 1.

1. Si (X, τ) es Hausdorff y A compacto, entonces A es cerrado.

2. Si (X, τ) es compacto y A cerrado, entonces A es compacto.

Demostración. 2) ejercicio.

1) Supongamos A no cerrado. Luego, existe $\bar{x} \in adh(A) \backslash A$.

Además, existe red (x_λ) definida en A que converge a $\bar{x} \notin A$.

Como A es compacto, (x_λ) posee un pto. de acumulación $\hat{x} \in A$, y una subred (y_θ) que converge a tal punto. Notar que $\bar{x} \neq \hat{x}$.

Pero la subred también debe converger a $\bar{x}$, de donde posee dos límites diferentes. Como X es Hausdorff, esto no puede pasar. OK.

Lema 2.

1. Si (X, τ) es et. y K_1, K_2 compactos en X, entonces $K_1 \cup K_2$ es compacto en X.

Ojo que la unión numerable de compactos no es compacta: $X = \cup_{x \in X} \{x\}$, cada singleton compacto.

2. Si (X, τ) es e.t. Hausdorff y $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es familia de compactos en X, entonces $K := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ es compacto.

Demostración. Ejercicios. (Un recubrimiento de $K_1 \cup K_2$ también cubre a ambos K_1 y K_2 y ...)

Teorema (Weierstrass). Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua con (X, τ) compacto. Entonces existe $\bar{x}, \underline{x} \in X$ tales que

$$f(\underline{x}) = \inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x),$$
$$f(\bar{x}) = \sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x).$$

Demostración. Basta probar el caso ínfimo, el caso supremo resulta del anterior aplicado a $-f$ (verificar!).

Sea $\alpha := \inf_{x \in X} f(x) \geq -\infty$. Sea (α_n) una sucesión decreciente a α, $\alpha_n > \alpha$.

Definamos $K_n := \{x \in X \ : \ f(x) \leq \alpha_n\}$. Notar que $K_n = f^{-1}(-\infty, \alpha_n]$, que es cerrado (preimagen de cerrado por f continua).

Como K_n es cerrado en X compacto, K_n es compacto. Además, $K_{n+1} \subseteq K_n$ y son no vacíos (por qué?).

Como $\bigcap_{n\in F} K_n \neq \emptyset$ para cada F finito (por qué?), usando que X es compacto y la PIF,

$$K := \bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset.$$

Sea $\underline{x} \in K$. Luego, $\underline{x}$ está en cada $K_n = \{x \in X \ : \ f(x) \leq \alpha_n\}$. Luego, $f(\underline{x}) \leq \alpha_n$ para cada n. Pasando al límite,

$$f(\underline{x}) \leq \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha = \inf_{x\in X} f(x).$$

Esto prueba que el ínfimo existe y se alcanza en $\underline{x}$, y que $f(\underline{x}) > -\infty$.

Más ejercicios.

1. Si (X, τ) es e.t. compacto y (x_λ) es red con único pto. de acumulación $\bar{x}$, entonces $x_\lambda \to \bar{x}$.

2. Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua con (X, τ) compacto e (Y, σ) Hausdorff, entonces f es cerrada (manda cerrado en cerrado).

3. Sea (X, τ) es Hausdorff, (Y, σ) Hausdorff compacto y $f : X \to Y$ función. Entonces f es continua ssi su grafo $Gr(f) := \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\}$ es cerrado en $(X \times Y, \tau \otimes \sigma)$.

Teorema ultra importante (Tychonoff). El producto topológico de ets compactos es compacto.

Ejemplo. Si $X = \Pi_{x\in[0,1]}[0,1]$, si se toma en cada $[0,1]$ la traza de la topo. canónica. Notar que $X = [0,1]^{[0,1]} = \{f : [0,1] \to [0,1], \quad f \text{ función}\}$, que es compacto (con la topo producto).

Obs. 1. Así de simple, este teorema tiene muchas implicaciones, y es de muy fácil uso.

2. Se puede mostrar que Tychonoff implica el axioma de Elección. Como Tychonoff usa Zorn, ambos son equivalentes!

3. Tychonoff es en realidad un ssi.

Ejercicio. Sean (X, τ) e (Y, σ) ets, y $f : X \to Y$ homeomorfismo. Probar que si X es compacto, entonces Y también lo es.

Una propiedad que se preserva por homeomorfismo se llama **invariante topólogico.** Por ejemplo, el número de "agujeros" de un conjunto es invariante topológico.

Del ejercicio anterior, la **compacidad** es un invariante topológico. Luego, $[0, 1]$ y $[0, 1)$, con sus respectivas topos trazas, no pueden ser homeomorfos.

Demostración de Tychonoff. Sean $X = \Pi_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ y $\tau = \otimes_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$. Suponiendo cada X_λ compacto, probaremos que X también lo es.

Por contradicción. Supongamos que X no es compacto.

Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los recubrimientos de X que **no poseen subrecubrimiento finito** (existe al menos uno de ellos). Ordenamos parcialmente $\mathscr{A}$ por inclusión creciente.

Lema 1. Toda cadena en $\mathscr{A}$ posee cota superior.

Asumiendo este lema, Zorn nos dice que existe un recubrimiento maximal $\bar{R}$ en $\mathscr{A}$.

Este recubrimiento maximal posee una propiedad muy rara: existen cilindros abiertos especiales que no son parte de $\bar{R}$.

Lema 2. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un $\bar{x}_\lambda \in X_\lambda$ tal que para todo $\Theta_\lambda \in \tau_\lambda$ tal que $\bar{x}_\lambda \in \Theta_\lambda$, se tiene

$$\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) = \Theta_\lambda \times \Pi_{\mu \neq \lambda} X_\lambda \notin \bar{R}.$$

El Lema 2 nos dará la manera de concluir una contradicción.

Paso 1. Creación de un recubrimiento especial.

Del Lema 2, sea $\bar{x} = (\bar{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Como $\bar{R}$ recubre X, existe $\Theta \in \bar{R}$ abierto tal que $\bar{x} \in \Theta$.

Como Θ es abierto en τ topo. producto, existe un cilindro abierto C conteniendo a $\bar{x}$ y contenido en Θ. Denotemos

$$C = \Pi_{\lambda \in F} \Theta_\lambda \times \Pi_{\lambda \notin F} X_\lambda \subseteq \Theta, \quad \Theta_\lambda \in \tau_\lambda, \quad F \text{ finito.}$$

Como para cada $\lambda \in F$, $x_\lambda \in \Theta_\lambda$, del Lema 2, $\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) \notin \bar{R}$.

Luego, para cada $\lambda \in F$, se tiene que $\bar{R} \cup \{\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)\}$ es un nuevo recubrimiento de X.

Estos recubrimientos sí poseen subrecubrimientos finitos, porque si no $\bar{R}$ no sería maximal.

Paso 2. Conclusión.

Denotemos por $\bar{R}_\lambda \cup \{\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)\}$ un tal subrecubrimiento finito de X. Ojo que $\bar{R}_\lambda$ posee cardinal finito, y pertenencen a $\bar{R}$.

Sea también $A_\lambda := \bigcup\{\theta \ : \ \theta \in \bar{R}_\lambda\}$. Se tiene que si $x \notin A_\lambda$, entonces $x \in \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)$.

En efecto, esto es porque $X = A_\lambda \cup \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)$.

Sea ahora $B := \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda = \bigcup\{\theta \ : \ \theta \in \bigcup_{\lambda \in F} \bar{R}_\lambda\}$. Afirmamos que $x \notin B$ implica $x \in \Theta$.

En efecto, $x \notin B$ implica que para cada $\lambda \in F$, $x \notin A_\lambda$. Luego, $x \in \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)$.

De aquí, $x \in \bigcap_{\lambda \in F} \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) = \Pi_{\lambda \in F}\Theta_\lambda \times \Pi_{\lambda \notin F} X_\lambda = C \subseteq \Theta$.

Así, X es recubierta finitamente por elementos de $\bar{R}$: $X = \bigcup_{\lambda \in F} \bar{R}_\lambda \cup \{\Theta\}$. Pero $\bar{R} \in \mathscr{A}$, contradicción.

Lema 1. Toda cadena en $\mathscr{A}$ posee cota superior.

Demostración.

Sea (R_μ) una cadena en $\mathscr{A}$ (totalmente ordenado); luego, cada R_μ recubre X, pero no posee subrecubrimiento finito.

Definimos $R := \bigcup_\mu R_\mu$ que claramente recubre X y contiene a cada R_μ.

Claramente R no posee subrecubrimiento finito, porque si $\Theta_1, \ldots, \Theta_n \in R$ cubren X, como cada Θ_i proviene de un R_{μ_i}, y la cadena está totalmente ordenada, algún R_{μ_j} contendrá a los otros R_{μ_i}, y por ende a cada $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$.

Luego, R_{μ_j} posee subrecubrimiento finito, contradicción.

Concluimos que $R := \bigcup_\mu R_\mu \in \mathscr{A}$ es la cota superior que buscamos.

Lema 2. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un $\bar{x}_\lambda \in X_\lambda$ tal que para todo $\Theta_\lambda \in \tau_\lambda$ tal que $\bar{x}_\lambda \in \Theta_\lambda$, se tiene

$$\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) = \Theta_\lambda \times \Pi_{\mu \neq \lambda} X_\lambda \notin \bar{R}.$$

Demostración. Por contradicción. Supondremos lo contrario, y concluiremos que $\bar{R}$ posee subrecubrimiento finito.

Supongamos que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\bar{x} \in X_{\lambda_0}$ se tiene que existe un $\Theta_{\lambda_0,\bar{x}} \in \tau_{\lambda_0}$ con $\bar{x} \in \Theta_{\lambda_0,\bar{x}}$ y además $\pi_{\lambda_0}^{-1}(\Theta_{\lambda_0}) \in \bar{R}$.

Notar que $(\Theta_{\lambda_0,\bar{x}})_{\bar{x} \in X_{\lambda_0}}$ es recubrimiento de X_{λ_0} compacto; por ende, existe subrecubrimiento finito de X_{λ_0}

$$\Theta_{\lambda_0,\bar{x}_1}, \Theta_{\lambda_0,\bar{x}_2}, \ldots, \Theta_{\lambda_0,\bar{x}_n}.$$

Luego,

$$X = \pi_{\lambda_0}^{-1}\left(\Theta_{\lambda_0,\bar{x}_1} \cup \Theta_{\lambda_0,\bar{x}_2} \cup \ldots \cup \Theta_{\lambda_0,\bar{x}_n}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_0}^{-1}\left(\Theta_{\lambda_0,\bar{x}_i}\right).$$

Notar que cada $\pi_{\lambda_0}^{-1}\left(\Theta_{\lambda_0,\bar{x}_i}\right) \in \bar{R}$. Luego $\bar{R}$ posee subrecubrimiento finito.

Próximo video. Conexidad 1.