

Video D11 Análisis: Topología. Conexidad 1.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

5 de junio de 2021

Queremos ver un último invariante topológico antes de entrar de lleno a espacios métricos. Este invariante será la **conexidad** y sus derivados.

Intuitivamente, conexidad mide el **número de porciones de un conjunto dado**. Un conjunto formado por dos partes “disconexas” será no conexo.

Definición. Sea (X, τ) et. Diremos que (X, τ) es **conexo** si los únicos abiertos y cerrados en X son el mismo espacio y el vacío.

$A \subseteq X$ es conexo si $(A, \tau|_A)$ es conexo.

Ejemplos.

1. $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ (con la topo traza de la canónica) es conexo, pero $[0, 1] \cup [2, 3]$ no lo es.
2. $\mathbb{R}^d$ con la topología canónica es conexo, pero dos bolas abiertas disjuntas B_1, B_2 no lo son (ambas son abiertas y cerradas).
3. $(\mathbb{Z}, \tau_d)$ no es conexo (cada punto es cerrado y abierto a la vez).
4. $(\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}})$ tampoco es conexo ($PA_{a,b}$ es abierta y cerrada para $a \neq 0$).

Lema. Los siguientes son equivalentes:

1. (X, τ) es conexo.
2. Si Θ_1, Θ_2 son abiertos disjuntos en X tales que $X = \Theta_1 \cup \Theta_2$, entonces uno es X y el otro vacío.
3. Si F_1, F_2 son cerrados disjuntos en X tales que $X = F_1 \cup F_2$, entonces uno es X y el otro vacío.

Demostración. Probaremos $1 \iff 2$, el resto queda de ejercicio.

$1 \implies 2$. Tenemos $\Theta_2 = \Theta_1^c$ cerrado y abierto en τ , luego $\Theta_2 = X$ o bien $\Theta_2 = \emptyset$, lo que prueba lo pedido.

$2 \implies 1$. Si A es abierto y cerrado en X , A^c también lo es, y $X = A \cup A^c$, luego A o A^c es X , lo que prueba lo pedido.

Lema. (X, τ) es conexo ssi toda función continua $f : (X, \tau) \rightarrow (\{0, 1\}, \tau_d)$ es necesariamente constante.

Demostración.

($\implies$) Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (\{0, 1\}, \tau_d)$ continua. Entonces
$$X = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}).$$

Ambos $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{1\})$ son abiertos (preimagen de abiertos), y disjuntos.

Como (X, τ) es conexo, o bien $f^{-1}(\{0\}) = X$ y $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, o bien $f^{-1}(\{1\}) = X$ y $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. En ambos casos f es constante.

($\Leftarrow$) Supongamos (X, τ) no conexo. Entonces existen abiertos no vacíos y disjuntos A_1, A_2 en X con $X = A_1 \cup A_2$.

Definamos $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(x) = 1$ si $x \in A_1$, y $f(x) = 0$ si $x \in A_2$, i.e. f es no constante. Afirmamos que f es continua, lo que es absurdo.

En efecto, $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, ambos abiertos. Finalmente, $f^{-1}(\{0\}) = A_2$ y $f^{-1}(\{1\}) = A_1$, ambos abiertos. Esto termina la demo.

En $\mathbb{R}$, un **intervalo** es un conjunto I tal que si $x, y \in I$, todos los puntos entre x, y , están en I .

Ejemplos. $I = \{0\}$, $I = [0, 1)$, $I = (-1, 1)$, $I = (-\infty, 2]$, etc.

No es intervalo: $[0, 1) \cup [3, 4]$.

Lema. Los únicos conexos en $\mathbb{R}$ (con la topo traza de la canónica de $\mathbb{R}$) son los intervalos.

Demostración. ($\implies$) Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo, y probemos que es intervalo. Si A es un punto, es trivial.

Veamos ahora el caso general. Por contradicción, supongamos lo contrario.

Entonces, para ciertos $x, z \in A$, con $x < z$, existe $y \notin A$ y $x < y < z$.

Pero

$$A_1 \cup A_2 := (A \cap (-\infty, y)) \cup (A \cap (y, +\infty)) = A.$$

La unión arriba es disjunta, y cada miembro de la unión es abierto en la topo traza de la canónica sobre A .

Mejor aún, x está en A_1 , y z en A_2 , luego ambos son no vacíos. Por lo tanto, A no es conexo, contradicción. OK.

($\Leftarrow$) Supongamos que I es intervalo, probemos que es conexo en $\mathbb{R}$.

Si I es un singleton, estamos listos. Veamos el caso general: suponemos que $x, y \in I$, $x < y$, y $z \in (x, y)$, implican $z \in I$.

Por contradicción, supongamos $I = A_1 \cup A_2$ con A_i abiertos (c/r a I) no vacíos y **disjuntos**. Sean $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$, y WLOG $a_1 < a_2$.

La idea ahora es usar técnicas meconas (o de ideales) para contradecir lo anterior, en particular, usaremos el supremo.

Sea $\alpha := \sup\{x \in \mathbb{R} : [a_1, x) \subseteq A_1\}$. Tenemos $\alpha < a_2$.

En efecto: A_2 es abierto, y $a_2 \in A_2$, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $a_2 \in I \cap (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \subseteq A_2$. Si ε es chico, $a_1 < a_2 - \varepsilon$. Luego, $\alpha \leq a_2 - \varepsilon < \alpha_2$.

Además, $\alpha \in I$ porque $\alpha \in [a_1, a_2) \subseteq I$.

Ejercicio. Mostrar que $\alpha \in \text{adh}(A_1)$, y que $[a_1, \alpha) \subseteq A_1$.

Ahora usamos el hecho que A_1 es cerrado: $\alpha \in A_1$. Pero como A_1 es abierto, existe $\varepsilon > 0$ chico tal que $I \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq A_1$.

En particular, $I \cap [\alpha, \alpha + \varepsilon) \subseteq A_1$. Como $\alpha, \alpha + \varepsilon \in I$ intervalo, tenemos $[\alpha, \alpha + \varepsilon) \subseteq A_1$.

Concluimos que $[a_1, \alpha + \varepsilon) \subseteq A_1$, contradicción.

Recordemos que $A \subseteq X$ es conexo si $(A, \tau|_A)$ es conexo.

Ejercicios.

1. Mostrar que la intersección de dos conexos no es necesariamente conexa.
2. Mostrar que $A \subseteq X$ es conexo ssi

$$(A \subseteq \Theta_1 \cup \Theta_2, \Theta_i \in \tau, \Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset) \implies A \subseteq \Theta_j \text{ para algún } j = 1, 2.$$

(Lo usaremos más adelante.)

Lema. La imagen continua de un conexo es conexo.

Ejemplos.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Entonces $f([0,2)) = [0,4)$ conexo.
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ si $x < 0$, $g(x) = 1$ si $x \geq 0$. Entonces $g([-1,1]) = \{0\} \cup \{1\}$, que no es conexo.

Demostración. Coloquemos $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ continua con $A \subseteq X$ conexo, es decir, $(A, \tau|_A)$ es conexo.

PDQ $B := f(A) := \{y \in Y : y = f(x)\} \subseteq Y$ es conexo.

Sean $\Theta_1, \Theta_2 \in \sigma|_B$ **disjuntos** tales que $B = \Theta_1 \cup \Theta_2$. PDQ $\Theta_1 = B$ y $\Theta_2 = \emptyset$, o viceversa.

Sean abiertos $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2 \in \sigma$, tales que $\Theta_j = \tilde{\Theta}_j \cap B$, $j = 1, 2$.

Tenemos $B = \Theta_1 \cup \Theta_2 = (\tilde{\Theta}_1 \cap B) \cup (\tilde{\Theta}_2 \cap B)$. Luego, $B \subseteq \tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2$.

Entonces $B = f(A)$ implica $A \subseteq f^{-1}(\tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2)$.

Luego, $A \subseteq f^{-1}(\tilde{\Theta}_1) \cup f^{-1}(\tilde{\Theta}_2)$. Por lo tanto,

$$A = (f^{-1}(\tilde{\Theta}_1) \cap A) \cup (f^{-1}(\tilde{\Theta}_2) \cap A) =: A_1 \cup A_2.$$

Ambos, A_1, A_2 , son abiertos en $\tau|_A$ (f es continua), y **son disjuntos**.

En efecto, si $x \in A_1 \cap A_2$, tenemos $x \in A$, $f(x) \in \tilde{\Theta}_1$, $f(x) \in \tilde{\Theta}_2$.

Como $x \in A$, $f(x) \in B$, por lo que $f(x) \in \Theta_1$, $f(x) \in \Theta_2$, lo que es absurdo.

Como A es conexo, $A_1 = \emptyset$ y $A_2 = A$, o viceversa. WLOG, tomamos el primer caso.

Luego, $A_1 = \emptyset$ implica $f(x) \notin \tilde{\Theta}_1$ para $x \in A$. Por ende, $f(A) \cap \tilde{\Theta}_1 = \emptyset$.

Pero, $\emptyset = f(A) \cap \tilde{\Theta}_1 = B \cap \tilde{\Theta}_1 = \Theta_1$. El otro caso se tiene similarmente. OK.