Video D12 Análisis: Topología. Conexidad 2.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

5 de junio de 2021

Definición. Sea (X,τ) et. Diremos que (X,τ) es **conexo** si los únicos abiertos y cerrados en X son el mismo espacio y el vacío.

$A\subseteq X$ es conexo si $(A,\tau\big|_A)$ es conexo.

Ejemplos.

1. $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ (con la topo traza de la canónica) es conexo, pero $[0,1]\cup[2,3]$ no lo es.

2. $\mathbb{R}^d$ con la topología canónica es conexo, pero dos bolas abiertas disjuntas B_1, B_2 no lo son (ambas son abiertas y cerradas).

3. $(\mathbb{Z},\tau_d)$ no es conexo (cada punto es cerrado y abierto a la vez).

4. $(\mathbb{Z},\tau_{\mathbb{Z}})$ tampoco es conexo ($PA_{a,b}$ es abierta y cerrada para $a\neq 0$).

Lema. Los siguientes son equivalentes:

1. (X, τ) es conexo.

2. Si Θ_1, Θ_2 son abiertos disjuntos en X tales que $X = \Theta_1 \cup \Theta_2$, entonces uno es X y el otro vacío.

3. Si F_1, F_2 son cerrados disjuntos en X tales que $X = F_1 \cup F_2$, entonces uno es X y el otro vacío.

Lema. (X, τ) es conexo ssi toda función continua $f : (X, \tau) \to (\{0, 1\}, \tau_d)$ es necesariamente constante.

Lema. Los únicos conexos en $\mathbb{R}$ (con la topo traza de la canónica de $\mathbb{R}$) son los intervalos.

Lema. La imagen continua de un conexo es conexo.

Definición. Sea (X,τ) e.t. Una **curva continua** Γ en X es el conjunto

$$\Gamma := \{\gamma(t) \ : \ t \in [0,1]\} \subseteq X,$$

donde γ una función continua (c/r a las respectivas topologías naturales) $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma = \gamma(t) \in X$.

Ejemplo. $(X,\tau) = (\mathbb{R}^3, \tau_c)$ y $\Gamma := \{\vec{r}(t) \ : \ t \in [0,1]\}$, con $\vec{r}(t) := (t, t^3, \sin t)$.

Corolario. Si Γ es curva continua en X, entonces Γ es conexa.

Lema. Si (X,τ) es e.t. y $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ son conexos en X con $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es conexo.

Demostración. Sea $A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subseteq X$.

Tomemos $\Theta_1, \Theta_2 \in \tau$ disjuntos tales que $A \subseteq \Theta_1 \cup \Theta_2$.

Luego, para todo $\lambda \in \Lambda$, se tiene $X_\lambda \subseteq \Theta_1 \cup \Theta_2$. Como cada X_λ es conexo, se tiene $X_\lambda \subseteq \Theta_1$ o bien $X_\lambda \subseteq \Theta_2$.

Usamos ahora que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$: sea $\bar{x}$ en tal conjunto. Entonces, $\bar{x} \in \Theta_1$ o Θ_2, pero no ambos. Supongamos que está en Θ_1.

En tal caso, para todo λ, $X_\lambda \subseteq \Theta_1$. Si no es el caso, entonces Θ_1, Θ_2 no son disjuntos.

Concluimos entonces que $A \subseteq \Theta_1$. El otro caso es similar.

Lema. Sea (X, τ) e.t. y $A \subseteq X$ conexo. Entonces todo conjunto B tal que $A \subseteq B \subseteq \operatorname{adh}(A)$ es conexo. En particular, $\operatorname{adh}(A)$ es conexa.

Demostración. Sea $f : (B, \tau|_B) \to (\{0,1\}, \tau_d)$ continua. Entonces $f\big|_A : (A, \tau|_A) \to (\{0,1\}, \tau_d)$ también lo es. Como A es conexo, $f\big|_A$ es constante.

WLOG, suponemos $f \equiv 0$ en A. Sea ahora $\bar{x} \in B$ y (x_λ) red en A tal que $x_\lambda \to \bar{x}$ con la topo τ.

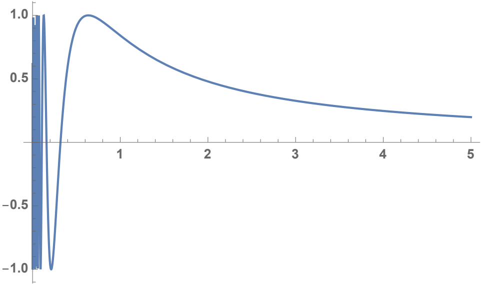
Luego, $x_\lambda \to \bar{x}$ con la topo $\tau\big|_B$. Como f es continua en B, $f(x_\lambda) \to f(\bar{x})$.

Por otro lado, $0 = f(x_\lambda) \to 0$. Como $(\{0,1\}, \tau_d)$ es Hausdorff, el límite es único, y por ende, $f(\bar{x}) = 0$.

Concluimos que $f \equiv 0$ en B, lo que prueba que B es conexo.

Ejemplo. $A := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \ : \ 0 < x < +\infty\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es conexo porque es la imagen continua de $(0, \infty)$ (conexo) por $f(x) := (x, \sin(\frac{1}{x}))$ (ver figura).

Luego, $\mathrm{adh}(A) = A \cup (\{0\} \times [0, 1])$ también es conexo!



Teorema. El producto topológico de ets conexos es conexo.

Ejemplo. $X := \Pi_{x\in[0,1]}[0,1]$ es conexo, si se toma en cada $[0,1]$ la traza de la topo. canónica.

Obs. Para demostrar este resultado usaremos Zorn.

Demostración. Sea $X := \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $\tau := \otimes\tau_\lambda$, con cada $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ conexo.

Usaremos la caracterización vía función continua de conexidad. Sea $f : (X, \tau) \to (\{0,1\}, \tau_d)$ función continua. PDQ f es constante.

Fijemos $\bar{x} \in X$, y sea $\Gamma_\lambda : X_\lambda \to X$ dada por $\Gamma_\lambda(x_\lambda) := (x_\beta)_{\beta\in\Lambda}$, donde $x_\beta = \bar{x}_\beta$ si $\beta \neq \lambda$.

Es decir, Γ_λ vale $\bar{x}$ en todas las coordenadas, excepto en la λ donde es la identidad.

Ejercicio. Ver que Γ_λ es continua para cada λ (usar que $\Pi_\mu \circ \Gamma_\lambda : X_\lambda \to X_\mu$ es continua).

Como consecuencia, $f \circ \Gamma_\lambda : X_\lambda \to \{0,1\}$ es continua (composición de funciones continuas). Como cada X_λ es conexo, $f \circ \Gamma_\lambda$ es constante.

En particular, para λ fijo $f(\bar{x}) = f((x_\beta))$, donde $x_\beta = \bar{x}_\beta$ si $\beta \neq \lambda$.

Lo que se concluye de esto es que **si** $x = y$ **salvo un número finito de coordenadas, entonces** $f(x) = f(y)$.

Fijemos ahora $x^0, x \in X$. Vamos a construir una red $(x^J)_{J\in I}$ en X tal que $x^J \to x$ y $x^J_\lambda = x^0_\lambda$, salvo en un número finito de puntos.

Si esto es cierto, $f(x^J) = f(x^0)$ para todo J. Como f es continua, $f(x^J) \to f(x)$, y como $(\{0,1\}, \tau_d)$ es Hausdorff, obtenemos $f(x) = f(x^0)$. Esto probaría que f es constante y por ende, que X es conexo.

Construyamos la red. Sea I el conjunto de los $J \subseteq \Lambda$ finitos. Ordenamos I por inclusión creciente, lo que lo hace dirigido (ejercicio). Definimos la red como

$$x_\lambda^J := \begin{cases} x_\lambda^0, & \lambda \notin J, \\ x_\lambda, & \lambda \in J. \end{cases}$$

Claramente x^J coincide con x^0 salvo en un número finito de puntos. Probemos la convergencia de x^J a x.

Sea $V \in \mathscr{N}_x$, y sea C cilindro tal que $x \in C \subseteq V$. Supongamos $C = \Pi_{\lambda \in F} \Theta_\lambda \times \Pi_{\lambda \notin F} X_\lambda$, con $F \subseteq \Lambda$ finito, $\Theta_\lambda \in \tau_\lambda$.

Notar que $F \in I$. Sea $J \geq F$ (i.e., $F \subseteq J$). Si $\lambda \in F$, está en J, por lo que $x_\lambda^J = x_\lambda \in \Theta_\lambda$.

Si ahora $\lambda \notin F$, se tiene que $x_\lambda^J \in X_\lambda$. Por lo tanto, $x^J \in C \subseteq V$, que es lo pedido.

Definición. Sea (X,τ) e.t. Dado $x_0 \in X$, se denomina **componente conexa** (CC) de x_0 al mayor conexo conteniendo a x_0.

Se define la relación $x \sim y \iff (x,y$ pertenecen a la misma CC$)$. Probar que es relación de equivalencia, por lo que las CC no dependen del punto con que se las define.

Ejemplos: $[0,1]\cup[2,3]$ posee dos componentes conexas: $[0,1]$ y $[2,3]$. En $\mathbb{Z}$ con la topo discreta, cada punto es CC.

Definición. (Conexidad por caminos, CPC) (X,τ) e.t. se dice conexo por caminos si para cada par de puntos diferentes $x,y \in X$ existe una curva continua que los conecta, es decir

$$\exists r:[0,1]\to X, \quad r \text{ continua}, r(0)=x,\ r(1)=y.$$

A tal curva se le llama **camino** entre x e y (y es conexo).

Ejemplos de CPC: $\mathbb{R}^d$ es CPC. Dos bolas disjuntas NO son conexas por caminos. $\mathbb{R}$ menos un punto no es CPC.

Ejercicio: (X, τ) es CPC ssi existe $x_0 \in X$ conectable por camino a todo $y \in X$.

Lema. CPC implica conexo. La recíproca no es siempre cierta.

Demostración. Tenemos que $X = \bigcup_{y \in X} C_{y,x_0}$, donde C_{y,x_0} es el camino que conecta a y con x_0.

Como C_{y,x_0} es imagen continua de conexo, es conexo. Como $\bigcap_{y \in X} C_{y,x_0} = \{x_0\} \neq \emptyset$, entonces X es conexo. OK.

El ejemplo clásico de conexo no CPC es la curva $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \ : \ x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}$, que es conexa, pero no CPC (no se puede llegar a (0,0) de manera continua).

Ejercicios finales.

1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ con $|D| \leq \aleph_0$. Probar que $\mathbb{R}^2 \backslash D$ es CPC.

2. Mostrar que la cinta de Möebius NO es isomorfa al cilindro.

3. La imagen continua de CPC es CPC.

4. La unión de CPC es CPC si la intersección misma es no vacía.

5. Los siguientes son invariantes topológicos: Conexidad, CPC, número de CC.