Video E2 Análisis: Espacios Métricos 2.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

12 de junio de 2021

Definición. Recordemos que un par (X, d) es un **espacio métrico** (e.m.) si $d : X \times X \to \mathbb{R}$ define una **distancia**, es decir, para todo $x, y, z \in X$,

1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Ejemplo. Todo espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es métrico, donde $d(x,y) := \|x - y\|$.

Obs./Recuerdos. 1. Toda métrica define una topología sobre X, llamada la topología métrica, cuya base de abiertos son las bolas abiertas $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \ : \ d(x,y) < \varepsilon\}$.

2. Todo e.m. satisface el PAN (base de vecindades numerable para cada punto de X), por lo que la convergencia se puede caracterizar por sucesiones.

Definición. Una sucesión $(x_n) \subseteq X$ se dirá de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Ejercicio. Toda sucesión convergente es de Cauchy. El converso no es cierto en general, y motiva la siguiente definición.

Definición. Un e.m. se dirá **completo** si toda sucesión de Cauchy converge. Si el espacio es normado completo, diremos que es **Banach**.

Ejemplos. 1. $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ es Banach.

2. $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach (lo vamos a probar en realidad). Aquí, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Teorema (Completación de e.m.). Para cada e.m. (X,d) existe un e.m. completo (X^*,d^*) y una función inyectiva $\varphi : X \to X^*$ tal que

1. $\varphi(X)$ es densa en X^* (con la topo. generada por d^*).

2. φ es isometría: $d^*(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y)$ para todo $x,y \in X$. Luego, $\varphi : X \to \varphi(X)$ es biyección.

En otras palabras, todo e.m. es isométrico a un subconjunto denso de un e.m. completo. Además, (X^*,d^*) es único salvo isometría.

Ejemplo básico: $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ no es completo, pero su completación es $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Acá, $\varphi(x) = x$ para $x \in \mathbb{Q}$.

Teorema ultra útil. Sea (X, d) e.m. completo y (F_n) una sucesión de cerrados no vacíos y tales que están encajonados: $F_{n+1} \subseteq F_n$. Si $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, entonces $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ es un singleton.

Aquí, $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$.

Teorema. Sea X conjunto e (Y, d) e.m. completo. Para $x_0 \in X$ fijo, definimos

$$\mathscr{B}_{x_0}(X, Y) := \{f : X \to Y \ : \ \sup_{x \in X} d(f(x), f(x_0)) < +\infty\}.$$

Si $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$, entonces $(\mathscr{B}_{x_0}(X, Y), d_\infty)$ es e.m. completo.

Corolarios. 1. Para (X,τ) e.t. e (Y,d) e.m., $x_0 \in X$, sea

$$\mathscr{BC}(X,Y) := \{f \in \mathscr{B}_{x_0}(X,Y) \ : \ f \text{ es continua}\}.$$

Entonces $\mathscr{BC}(X,Y)$ es cerrado en $\mathscr{B}_{x_0}(X,Y)$ y por ende e.m. completo con d_∞. ($\mathscr{BC} =$ "bounded continuous")

2. Si además (X,τ) es compacto, entonces $\mathscr{BC}(X,Y) = \mathscr{C}(X,Y)$ (funciones continuas) y por lo tanto $(\mathscr{C}(X,Y), d_\infty)$ es e.m. completo.

Vamos ahora a estudiar **e.m. compactos** (todo recubrimiento abierto posee subrecubrimiento finito). Para ello, necesitamos antes unas definiciones (que serán equivalentes). **Sea** (X, d) **e.m.**

Definición 1. $A \subseteq X$ es **acotado** si $\operatorname{diam}(A) < +\infty$. Aquí, $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^d$, todas las bolas son acotadas.

Definición 2. $A \subseteq X$ se dice **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de conjuntos $R_1, \ldots, R_{n(\varepsilon)}$ que cubren X con $\operatorname{diam}(R_i) \leq \varepsilon$. Tal familia se llama ε-recubrimiento.

Ejemplos. 1. Para $[0, 1]$, los intervalos de ancho ε inducidos por la partición de $[1/\varepsilon]$ pasos, cubre $[0, 1]$.

2. En $\mathbb{R}$ con la topo canónica, $\mathbb{Z}$ no es totalmente acotado (ni acotado).

Ejercicio. Totalmente acotado implica acotado.

Definición 3. $\mu > 0$ se dice **número de Lebesgue** para un recubrimiento abierto $(\Theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ para el cual $B(x,\mu) \subseteq \Theta_\lambda$.

Obs. El no. de Lebesgue no tiene por qué ser único.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$, el recubrimiento $(n, n+2)_{n\in\mathbb{Z}}$ posee por ejemplo no. de Lebesgue $1/2$ (hay un traslape de largo 1 entre cada abierto).

Definición 4. En general, (X,τ) se dice **secuencialmente compacto** si toda sucesión en X posee subsucesión convergente.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^d, \tau_c)$, A cerrado y acotado es secuencialmente compacto, pero en dimensión infinita no es necesariamente cierto.

Teorema 1. Sea (X, d) e.m. y $K \subseteq X$ compacto. Entonces:

1. K es cerrado (consecuencia de ser Hausdorff).
2. K es acotado.
3. $(K, d|_K)$ es completo.
4. K es totalmente acotado.

Observaciones. La recíproca de 1) y 2) no es cierta. Cerrado y acotado no implica compacto, ejercicio!

Demostración. Demostraremos 2) y 3). 1) es directa y 4) ejercicio.

2) Sea $x_0 \in K$. Entonces K es cubierto por $(B(x_0, n))_{n \in \mathbb{N}}$, porque las bolas abiertas son base de abiertos en X y en un e.m. se satisface el PAN.

Como K es compacto, K es cubierto por un número finito de bolas. En particular, existe n_0 tal que $K \subseteq B(x_0, n_0)$. Luego, $\text{diam}(K) \leq 2n_0$.

3) Si (x_n) es sucesión de Cauchy en K compacto, posee subsucesión convergente (x_{n_k}) a $\bar{x}$. Entonces, por ser Cauchy, usando desigualdad triangular, toda la sucesión converge a $\bar{x}$ (verificar!).

Teorema 2. Sea (X, d) e.m. Son equivalentes:

1. X es compacto (con la topo inducida por la distancia).
2. X es secuencialmente compacto.
3. (X, d) es completo y totalmente acotado.

Corolario. En $\mathbb{R}^d$, A es compacto ssi es cerrado y acotado.

Demostración del Teorema.

1) $\implies$ 2). Sea (x_n) sucesión en X. Como es compacto, y x_n es también red, posee punto de acumulación $\bar{x}$.

Como (X, d) es e.m., satisface el PAN. Luego, posee **base de vecindades numerable** $(B(x, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$.

Como $\bar{x}$ es punto de acumulación, existe n_1 tal que $x_{n_1} \in B(\bar{x}, 1)$.

De manera inductiva, para cada $k = 2, 3, \ldots$, existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in B(\bar{x}, \frac{1}{k})$, es decir, $d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{1}{k}$.

Esto implica que (x_n) posee subsucesión (x_{n_k}) convergente a $\bar{x}$. OK.

2) $\implies$ 3). **Completo:** muy similar a parte 3) del Teorema 1.

Totalmente acotado. Por contradicción, suponemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo F finito, $\bigcup_{i\in F} B(x_i, \varepsilon_0) \subsetneq X$.

Sea $x_0 \in X$ fijo, y tomamos $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon_0)$, y después $x_2 \notin (B(x_0, \varepsilon_0) \cup B(x_1, \varepsilon_0))$, y así, sucesivamente.

Este proceso se puede hacer indefinidamente porque para todo F finito, $\bigcup_{i\in F} B(x_i, \varepsilon_0) \subsetneq X$.

La sucesión (x_n) creada satisface por definición, $d(x_{n+1}, x_n) > \varepsilon_0$, por lo que $d(x_m, x_n) > \varepsilon_0$. Luego, no puede poseer subsucesión convergente.

3) $\Longrightarrow$ 1). Sea $(\Theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ recubrimiento abierto de X, y supongamos que posee no. de Lebesgue $\mu > 0$:

$$\forall x \in X, \quad \exists \lambda \in \Lambda \quad \text{tq} \quad B(x,\mu) \subseteq \Theta_\lambda.$$

Como X es totalmente acotado, posee un μ-recubrimiento finito: $X = \bigcup_{j=1}^n B(x_j,\mu)$.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $B(x_j,\mu) \subseteq \Theta_{\lambda_j}$. Entonces $(\Theta_{\lambda_j})_{j=1}^n$ es el subrecubrimiento finito buscado.

Demostración de completo + totalmente acotado implican la existencia de no. de Lebesgue: ver slides adicionales al final.

Ejercicios (no simples).

1. Si $F:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ es continua con X compacto, entonces es **uniformemente continua**, es decir para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que **para cualquier** $x_1,x_2\in X$ con $d_X(x_1,x_2)<\delta$, se tiene $d_Y(F(x_1),F(x_2))<\varepsilon$.

Indicación. Usar que si $\varepsilon>0$, el recubrimiento de X dado por $\{F^{-1}(B(F(x),\frac{1}{2}\varepsilon))\}_{x\in X}$ posee no. de Lebesgue.

2. **(Pto. fijo de Banach).** Si (X,d) es e.m. completo y $F:X\to X$ es **contracción**, es decir existe $L\in(0,1)$ tal que para todo $x,y\in X$ se tiene $d(F(x),F(y))\leq Ld(x,y)$. Entonces F **posee un único punto fijo** $x^*\in X$:

$$F(x^*)=x^*.$$

Indicación. Probar que la sucesión $x_{n+1}=F(x_n)$ (partiendo de cualquier punto x_0) es de Cauchy y converge a x^*.

Próximo video. Análisis Funcional 1. Teorema de Stone-Weierstrass.

Material adicional. Probemos que (X,d) e.m. **completo y totalmente acotado** implican todo recubrimiento abierto de X posee número de Lebesgue.

Por contradicción, supongamos que para todo $\mu > 0$ existe $x \in X$ tal que $B(x,\mu)$ no es cubierta por un único Θ_λ.

Tomemos $\mu = \frac{1}{n}$, por lo que existe $x_n \in X$ con $B(x_n, \frac{1}{n})$ no contenida en ningún Θ_λ.

Tomemos un $\frac{1}{2}$-recubrimiento de X, de la forma $(B(y_{1/2,j}, \frac{1}{2}))_{j=1}^{n_{1/2}}$.

Alguna de las bolas $(\bar{B}(y_{1/2,j}, \frac{1}{2}))_{j=1}^{n_{1/2}}$ contiene una infinidad de elementos de (x_n). WLOG, tomemos $j=1$.

Tomemos ahora un $\frac{1}{4}$-recubrimiento, de forma que WLOG $F_2 := \bar{B}(y_{1/2,1}, \frac{1}{2}) \cap \bar{B}(y_{1/4,1}, \frac{1}{4})$ contenga una infinidad de elementos de (x_n).

Procediendo de manera inductiva, construimos una sucesión encajonada de cerrados F_k de la forma

$$F_k := \bar{B}\left(y_{\frac{1}{2},1}, \frac{1}{2}\right) \cap \bar{B}\left(y_{\frac{1}{4},1}, \frac{1}{4}\right) \cap \cdots \cap \bar{B}\left(y_{\frac{1}{2^k},1}, \frac{1}{2^k}\right).$$

Notar que cada F_k contiene una infinidad de elementos de (x_n), y además $\mathrm{diam}(F_k) \leq 2^{k-1} \to 0$.

Luego, $\bigcap F_k = \{\bar{x}\}$. Sea λ tal que $\bar{x} \in \Theta_\lambda$, y $\varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \Theta_\lambda$ (por ser abierto!).

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{diam}(F_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in F_i$ y además $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pero

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subseteq B\left(\bar{x}, \frac{1}{n} + d(x_n, \bar{x})\right) \subseteq B\left(\bar{x}, \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{diam}(F_i)\right).$$

Pero $\mathrm{diam}(F_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, lo que implica $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \Theta_\lambda$, contradicción al hecho que no era contenida por ningún Θ_λ!