# *Video F1 Análisis: Análisis Funcional I. Stone-Weierstrass.*

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

21 de junio de 2021

El Teorema de Stone y Weierstrass nos permite **aproximar funciones continuas por subconjuntos de fácil manejo**, como polinomios, trigonométricas, etc.

Para fijar ideas, sea $(K, \tau)$ e.t. compacto, y $C(K, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas a valores reales, junto a la norma del supremo $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$, que lo hace Banach.

**Definición.** Un álgebra $(\mathscr{A},+,\cdot)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un anillo el cual también es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y se tiene para todo $x,y\in\mathscr{A}$, $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$(\lambda x)\cdot y=\lambda(x\cdot y)=x\cdot(\lambda y).$$

Una sub-álgebra $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ es una álgebra contenida en $\mathscr{A}$.

(Recordar que un anillo $(\mathscr{A},+,\cdot)$ es una estructura con dos leyes de composición internas $+,\cdot$, tales que $(\mathscr{A},+)$ es grupo abeliano (conmutativo), $\cdot$ es asociativa, y $\cdot$ distribuye sobre $+$ por ambos lados. Si todo elemento diferente al neutro aditivo posee inverso para $\cdot$, hablamos de cuerpo.)

**Ejemplos:** 1. Las **matrices** $n\times n$ **a valores reales**, $M_{n,n}(\mathbb{R})$, forman un anillo junto a la suma y la multiplicación.
Asimismo, también forman un álgebra (por ser un e.v. sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con la ponderación por escalar).

2. $C(K,\mathbb{R})$ forman un álgebra con la suma y multiplicación de funciones, y ponderación por escalar. Es además, conmutativa (para ambas leyes) y con unidad (para $+$).

**Definición.** Una familia $\mathscr{A} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ se dice **separante** si para cada $x, y \in K$ diferentes, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Si **además** para cualquier $x \in K$ existe $g \in \mathscr{A}$ con $g(x) \neq 0$, diremos que es **totalmente separante.**

**Ejemplos.** Si $K = [0,1]$, los polinomios $p : K \to \mathbb{R}$ definen una familia totalmente separante: $p_1(x) := x$ los separa, y $p_2(x) = 1$ los separa totalmente. Más ejemplos más adelante.

**Teorema (Stone-Weierstrass).** Sea $(K,\tau)$ Hausdorff compacto y $\mathscr{A} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ una álgebra separante. Entonces su adherencia $\mathrm{adh}(\mathscr{A})$ (c/r a la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $C(K,\mathbb{R})$) es

1. **Caso totalmente separante:** $C(K,\mathbb{R})$ (i.e. es denso);
2. **Caso separante pero no totalmente separante:** la subágebra de $C(K,\mathbb{R})$ formada por todas las funciones continuas que se anulan en un punto dado $x_0 \in K$.

**Ejemplos.**

1. Por lo visto anteriormente, los polinomios son densos en $C([0,1],\mathbb{R})$ (forman una sub-álgebra totalmente separante).

2. Si $C_p([0,2\pi],\mathbb{R})$ denota las funciones continuas $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ que son $2\pi$-periódicas (es decir, $f(0)=f(2\pi)$), y si

$$\mathscr{A} := \left\{ \sum_{k=0}^{N} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)) \ : \ a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N} \right\},$$

son los polinomios trigonométricos (o suma de Fourier), entonces $\mathscr{A}$ es sub-álgebra totalmente separante. **Ejercicio.**

Luego, son densos en $C_p([0,2\pi],\mathbb{R})$ ("toda función $2\pi$-periódica puede aproximarse por su serie de Fourier")

**Demostración**. La demostración se basa en tres lemas auxiliares, que enunciamos y demostraremos después.

**Lema 1**. Si $\mathscr{A}$ es una sub-álgebra de $C(K,\mathbb{R})$, entonces su adherencia también lo es.

**Lema 2**. Si $\mathscr{A}$ es una sub-álgebra de $C(K,\mathbb{R})$, y $f,g \in \operatorname{adh}(\mathscr{A})$, entonces ambas $\max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$ también lo están.

**Lema 3.** Sea $\mathscr{A}$ es una sub-álgebra de $C(K,\mathbb{R})$. Si $f \in C(K,\mathbb{R})$ puede ser aproximada en todo par de puntos diferentes $p,q \in K$ por elementos de $\operatorname{adh}(\mathscr{A})$, entonces $f \in \operatorname{adh}(\mathscr{A})$. ("$C(K,\mathbb{R}) \subseteq \operatorname{adh}(\mathscr{A})$")

**Demostración de Stone-Weierstrass.**

**1. Caso totalmente separante.** Debemos probar que $C(K,\mathbb{R}) \subseteq \operatorname{adh}(\mathscr{A})$.

Por el Lema 3, basta probar que toda $f \in C(K,\mathbb{R})$ puede ser aproximada en todo par de puntos diferentes $p,q \in K$ por una función $a = a_{p,q} \in \mathscr{A}$.

Probaremos realmente que $a$ satisface $a(p) = f(p)$ y $a(q) = f(q)$.

Sean $p,q \in K$ diferentes. Tomemos $g_1, g_2, h \in \mathscr{A}$ con $g_1(p) \neq 0$, $g_2(q) \neq 0$ (existe por ser totalmente separante) y $h(p) \neq h(q)$ (separante).

Sea ahora $r(x) := g_1(x) + \alpha g_2(x) + \beta h(x) \in \mathscr{A}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escogido tal que $r(p), r(q) \neq 0$, y $r(p) \neq r(q)$ (verificar!).

Definimos ahora $a(x) := \gamma_1 r(x) + \gamma_2 r^2(x) \in \mathscr{A}$, y escogeremos $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a(p) = f(p)$ y $a(q) = f(q)$ (sistema lineal $2 \times 2$ en $\gamma_1, \gamma_2$). Esto es posible si el determinante

$$\det \begin{pmatrix} r(p) & r^2(p) \\ r(q) & r^2(q) \end{pmatrix} \neq 0 \iff r(p)r(q)(r(q) - r(p)) \neq 0,$$

lo que prueba el teorema.

**2. Caso no totalmente separante.** Sea $x_0 \in K$ un punto para el cual $a(x_0) = 0$, para toda $a \in \mathscr{A}$. Notar que $x_0$ debe ser único, sino $\mathscr{A}$ no sería separante.

Notar además que $\text{adh}(\mathscr{A}) \subseteq C_0(K,\mathbb{R})$, donde $C_0(K,\mathbb{R})$ son las $f \in C(K,\mathbb{R})$ tales que $f(x_0) = 0$ (**Ejercicio**: $C_0(K,\mathbb{R})$ es cerrado).

Definimos $\mathscr{A}_0 := \{\alpha + a \ : \ a \in \mathscr{A}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Notar que $\mathscr{A}_0$ es sub-álgebra, pero ahora es totalmente separante.

Luego, por la parte anterior, $\mathscr{A}_0$ es denso en $C(K,\mathbb{R})$.

Con esta info ya podemos concluir. Sea $f \in C_0(K,\mathbb{R})$. Probemos que $f \in \text{adh}(\mathscr{A})$. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $a \in \mathscr{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|f - \alpha - a\|_\infty < \varepsilon.$$

En particular, en $x = x_0$ tenemos $|f(x_0) - \alpha - a(x_0)| < \varepsilon$, es decir, $|\alpha| < \varepsilon$.

Por último, $|a(x) - f(x)| \leq |\alpha + a(x) - f(x)| + |\alpha| < 2\varepsilon$. Tomando supremo, se concluye.

**Lema 1**. Si $\mathscr{A}$ es una sub-álgebra de $C(K,\mathbb{R})$, entonces su adherencia también lo es.

**Demostración.** Basta probar que $\operatorname{adh}(\mathscr{A})$ es cerrado (algebraicamente hablando) para las operaciones $+$, $\cdot$ y ponderación por escalar.

Vamos a probar el producto solamente, los otros dos quedan de ejercicio.

Sean $f,g \in \operatorname{adh}(\mathscr{A})$. PDQ $fg \in \operatorname{adh}(\mathscr{A})$.

Sean $f_n, g_n \in \mathscr{A}$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ con la norma del supremo. Entonces $f_n g_n \in \mathscr{A}$ (por ser álgebra), $\|f_n\|_\infty$ y $\|g_n\|_\infty$ permanecen acotadas (¿por qué?), y se tiene

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq |f_n(x)(g_n(x)-g(x))| + |g(x)(f_n(x)-f(x))| \\ &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.\end{aligned}$$

Luego, tomando supremo en $x$ a la izquierda, y pasando al límite se concluye.

**Lema 2**. Si $\mathscr{A}$ es una sub-álgebra de $C(K,\mathbb{R})$, y $f,g \in \text{adh}(\mathscr{A})$, entonces ambas $\max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$ también lo están.

**Demostración.** Esta demostración es técnica, y usa elementos de cálculo mechón.

Lo primero es notar que $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(|f+g|+|f-g|)$ y $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(|f+g|-|f-g|)$, por lo que basta probar que si $h \in \text{adh}(\mathscr{A})$, entonces $|h| \in \text{adh}(\mathscr{A})$.

El primer caso es el trivial: si $\|h\|_\infty = 0$, entonces $|h| = h = 0 \in \text{adh}(\mathscr{A})$ casi trivialmente.

Usaremos más abajo que $|z| \sim \sqrt{z^2+\varepsilon^2}$ cuando $\varepsilon \sim 0$ para aproximar $|z|$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Sea $\sum_{k=0}^{N} a_k(t-\frac{1}{2})^k$ el polinomio de Taylor al orden $N$ de $\sqrt{\varepsilon^2+t}$ en torno a $t_0 = \frac{1}{2}$. El radio de convergencia de esta serie ($N \to +\infty$) es $\frac{1}{2}+\varepsilon^2$ (chequear).

Además, $\sum_{k=0}^{N} a_k(t-\frac{1}{2})^k$ converge uniformemente en $t \in [0,1]$ a $\sqrt{\varepsilon^2+t}$ cuando $N \to +\infty$ (porque $[0,1]$ está incluido dentro del radio de convergencia de la serie).

Luego, tomando $t = z^2$, $z \in [-1,1]$, existe $P$ **polinomio** tal que $|P(z^2) - \sqrt{z^2+\varepsilon^2}| \leq \varepsilon$.

En particular, si $z = 0$, $|P(0)| \leq 2\varepsilon$, y si $Q(t) := P(t) - P(0)$, entonces para $z \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} |Q(z^2) - |z|| &= |P(z^2) - P(0) - |z|| \\ &\leq |P(0)| + |P(z^2) - \sqrt{z^2+\varepsilon^2}| + |\sqrt{z^2+\varepsilon^2} - |z|| \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Si ahora $a := \|h\|_\infty > 0$, definimos $f := h/a$, de modo que $\|f\|_\infty \leq 1$ en $K$. Probaremos el resultado para $f$ en vez de $h$. Por lo tanto,

$$|Q(f^2(x)) - |f(x)|| \leq 4\varepsilon \quad \text{y} \quad \|Q(f^2) - |f|\|_\infty \leq 4\varepsilon.$$

Pero $f \in \mathrm{adh}(\mathscr{A})$, que es sub-álgebra, por lo que $f^2$ también lo está, y también $Q(f^2(x))$ ($Q$ polinomio).

Luego, $|f| \in \mathrm{adh}(\mathrm{adh}(\mathscr{A})) = \mathrm{adh}(\mathscr{A})$, lo que prueba el resultado.

**Lema 3.** Sea $\mathscr{A}$ es una sub-álgebra de $C(K,\mathbb{R})$. Si $f \in C(K,\mathbb{R})$ puede ser aproximada en todo par de puntos diferentes $p,q \in K$ por elementos de $\mathrm{adh}(\mathscr{A})$, entonces $f \in \mathrm{adh}(\mathscr{A})$. ("$C(K,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{adh}(\mathscr{A})$")

**Demostración.** Aquí es donde se usa que $K$ es compacto. Partamos escribiendo la hipótesis. Sea $f \in C(K,\mathbb{R})$ tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualesquiera $p,q \in K$, existe $a_{p,q} \in \mathrm{adh}(\mathscr{A})$ tal que aproxima a $f$:

$$|f(p) - a_{p,q}(p)| < \varepsilon, \quad |f(q) - a_{p,q}(q)| < \varepsilon.$$

Definimos ahora

$$U_{p,q} := \{x \in K \,:\, a_{p,q}(x) < f(x) + \varepsilon\}, \quad V_{p,q} := \{x \in K \,:\, a_{p,q}(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Ambos son abiertos (Â¿por qué?). Notar que ambos $p,q$ están en $U_{p,q} \cap V_{p,q}$.

Fijemos ahora $q \in K$. La familia $(U_{p,q})_{p \in K}$ cubre $K$, compacto, por lo que posee subrecubrimiento finito: $K = U_{p_1,q} \cup U_{p_2,q} \cup \cdots \cup U_{p_k,q}$.

Sea ahora $a_q := \min\{a_{p_1,q}, a_{p_2,q}, \ldots, a_{p_k,q}\} \in \mathrm{adh}(\mathscr{A})$.

Se tiene $a_q(x) \le f(x) + \varepsilon$, para cada $x \in K$ (viene de cada $U_{p_i,q}$), y además $|f(q) - a_q(q)| \le \varepsilon$.

Sea ahora $V_q := V_{p_1,q} \cap U_{p_2,q} \cap \ldots \cap V_{p_k,q}$, que es abierto y contiene a $q$. Además, en $V_q$ se tiene $a_q(x) > f(x) - \varepsilon$.

Ahora bien, $(V_q)_{q\in K}$ es recubrimiento abierto de $K$, por lo que existe subrecubrimiento finito: $K = V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n}$.

Definimos $a(x) := \max\{a_{q_1}, a_{q_2}, \ldots, a_{q_n}\} \in \mathrm{adh}(\mathscr{A})$. Además, $a(x) \le f(x) + \varepsilon$ y $a(x) \ge f(x) - \varepsilon$ para $x \in K$.

Luego, $\|a - f\|_\infty \le \varepsilon$, lo que implica $f \in \mathrm{adh}(\mathrm{adh}(\mathscr{A})) = \mathrm{adh}(\mathscr{A})$, que es lo pedido.

**Ejercicio**. Sea $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ para cada $n = 0, 1, 2 \ldots$. Probar que $f \equiv 0$.

## Próximo video. Análisis Funcional 2. Teorema de Arzelà-Ascoli.