Video F2 Análisis: Análisis Funcional II. Arzelà-Ascoli

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

5 de junio de 2021

El teorema de **Arzelà-Ascoli** nos permite caracterizar los subconjuntos de $C(X, Y)$ que son **(relativamente) compactos** con la topología uniforme.

Antes de enunciar el teorema, necesitamos un par de definiciones.

Definición 1. Un conjunto se dice **relativamente compacto** si su adherencia es compacta.

Ejemplos. 1. $B(0,1)$ en $\mathbb{R}^d$.

2. En $\mathbb{R}$, todo conjunto acotado es relativamente compacto. (=Weierstrass mechón, toda sucesión acotada posee subsucesión convergente!)

3. En dimensión infinta, es complicado saber los conjuntos compactos (estaremos hasta el final del curso dándole vueltas al problema).

Definición 2. Sea (X,τ) e.t. e (Y,d) e.m. Un subconjunto $\mathscr{E} \subseteq C(X,Y)$ se dice **equicontinuo** si para cualquier $x_0 \in X$, y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V \in \mathscr{N}_{x_0}$ tal que **para toda** $f \in \mathscr{E}$, y para todo $x \in V$, $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ejemplo. Sean $X = [a,b]$, $Y = \mathbb{R}$, y $M > 0$ fijo. En $C([a,b],\mathbb{R})$, tomamos $\mathscr{E} := \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \ : \ \|f'\|_\infty \leq M\}$. Entonces $\mathscr{E}$ es equicontinuo.

En efecto, sean $x, x_0 \in [a,b]$. Como $d = |\cdot|$, se tiene

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f'(s)ds \right| \leq |x - x_0| \|f'\|_\infty \leq M|x - x_0|.$$

Luego, si $\varepsilon > 0$ es dado, podemos tomar $V = \{|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}\} \cap [a,b]$, de donde $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathscr{E}$, y para todo $x \in V$. OK.

Ejercicio. Para $p \in (1,\infty)$, $\mathscr{E}_p := \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \ : \ \int_a^b |f'(x)|^p dx \leq M\}$ es equicontinua. Encontrar un conjunto que NO sea equicontinuo.

Teorema (Arzelà-Ascoli). Sea (X,τ) et compacto, e (Y,d) e.m. completo. Un conjunto $\mathscr{E} \subseteq C(X,Y)$ es relativamente compacto ssi

(A) es equicontinuo y

(B) para todo $x \in X$, $\mathscr{E}(x) := \{f(x) \ : \ f \in \mathscr{E}\}$ es relativamente compacta en Y.

Obs. $C(X,Y)$ es e.m. completo con $d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x))$.

Aplicación inmediata. Toda bola cerrada en $C^1([a,b],\mathbb{R})$ (con la norma $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$) es relativamente compacta en $C([a,b],\mathbb{R})$.

En efecto, $\mathscr{E} = \bar{B}(0,R) := \{g \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \ : \ \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \leq R\}$ es claramente equicontinuo.

Además, si $x \in [a,b]$, $\mathscr{E}(x) = \{g(x) \ : \ g \in \mathscr{E}\}$ es tal que $|\mathscr{E}(x)| \leq R$, acotada en $\mathbb{R}$. Luego, es relativamente compacta. Arzelà-Ascoli permiten concluir. OK.

Obs. Usualmente se habla que la inyección $i : C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ dada por $i(f) = f$ **es compacta.**

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos $\mathscr{E}$ relat. compacta, y probemos (A) y (B).

(A). **Equicontinuidad**. Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como adh($\mathscr{E}$) es compacta en e.m., es totalmente acotada. Luego, $\mathscr{E}$ es totalmente acotada también.

Luego, existen $h_1, \dots, h_N \in \mathscr{E}$ tal que $\mathscr{E} \subseteq B(h_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(h_N, \varepsilon)$.

Como cada h_i es continua, existe una vecindad $V_i \subseteq X$ de x_0 tal que $d(h_i(x), h_i(x_0)) \leq \varepsilon$, para todo $x \in V_i$ ($d = d_Y$).

Tomando $V := V_1 \cap \cdots \cap V_N$, me aseguro que $d(h_i(x), h_i(x_0)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in V$, y para todo $i = 1, \dots, N$.

Sea ahora $h \in \mathscr{E}$ cualquiera. Sea $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tal que $d_\infty(h, h_i) \leq \varepsilon$.

Entonces, si $x \in V$, y $h \in \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned} d(h(x), h(x_0)) &\leq d(h(x), h_i(x)) + d(h_i(x), h_i(x_0)) + d(h_i(x_0), h(x_0)) \\ &\leq d_\infty(h, h_i) + \varepsilon + d_\infty(h_i, h) \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que la familia $\mathscr{E}$ es equicontinua.

(B). **Puntualmente Relat. Comp.**. Sea $x \in X$ fijo. Introduzcamos la función

$$\delta_x : C(X,Y) \to Y, \quad \delta_x(f) = f(x).$$

Ejercicio. Probar que δ_x es continua. ($f_n \to f$ unif. entonces...)

Como adh($\mathscr{E}$) es compacta, δ_x(adh($\mathscr{E}$)) también lo es (imagen continua de compacto es compacto). Además, es cerrada en Y (porque Y es e.m., luego, Hausdorff).

Pero $\mathscr{E}(x) = \{f(x) \ : \ f \in \mathscr{E}\} \subseteq \delta_x(\mathrm{adh}(\mathscr{E}))$, por lo que $\mathrm{adh}(\mathscr{E}(x)) \subseteq \mathrm{adh}(\delta_x(\mathrm{adh}(\mathscr{E}))) = \delta_x(\mathrm{adh}(\mathscr{E}))$.

Luego, adh($\mathscr{E}(x)$) es cerrada dentro de un compacto, por ende compacta.

($\Longleftarrow$) **Asumamos (A) y (B), y probemos que $\mathscr{E}$ es relativamente compacta.**

Como $C(X,Y)$ es e.m. completo, y adh($\mathscr{E}$) es cerrada, es completa.

Luego, basta probar que $\mathscr{E}$ es totalmente acotada para probar que es relativamente compacta.

Sea $\varepsilon > 0$ y encontremos un ε-recubrimiento de $\mathscr{E}$. Para cada $x \in X$, sea V_x vecindad abierta tal que $d(h(y), h(x)) < \varepsilon$ para cualquier $y \in V_x$, y $h \in \mathscr{E}$ (equicontinuidad).

Como X es compacto sean $x_1, \ldots, , x_n \in X$ tales que $X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$.

Ahora bien, cada $\mathscr{E}(x_i) = \{f(x_i) \ : \ f \in \mathscr{E}\}$ es relativamente compacto en Y e.m. completo, por lo que se puede recubrir con un número finito de bolas de radio ε (usamos total acotamiento):

$$\mathscr{E}(x_i) \subseteq \bigcup_{h \in \mathscr{E}_i} B(h(x_i), \varepsilon), \quad \mathscr{E}_i \text{ finito}, \quad \mathscr{E}_i \subseteq \mathscr{E}.$$

Supongamos $\mathscr{E}_i = \{h_1^i, h_2^i, \ldots, h_{m_i}^i\}$. Tenemos entonces que

$$h_1^1(x_1), h_2^1(x_1), \ldots, h_{m_1}^1(x_1) \quad \text{son centros para } \mathscr{E}(x_1),$$

$$h_1^2(x_2), h_2^2(x_2), \ldots, h_{m_2}^2(x_2) \quad \text{son centros para } \mathscr{E}(x_2),$$

y así, sucesivamente,

$$h_1^n(x_n), h_2^n(x_n), \ldots, h_{m_n}^n(x_n) \quad \text{son centros para } \mathscr{E}(x_n).$$

Definamos ahora, para cada secuencia de naturales $(p_1, \ldots, p_n)$ con $1 \leq p_i \leq m_i$, el conjunto

$$\mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n) := \{h \in \mathscr{E} \ : \ d(h(x_i), h^i_{p_i}(x_i)) \leq \varepsilon, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Lema 1. diam $\mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n) \leq 4\varepsilon$.

Supongamos el lema, y concluyamos. Sea $h_{p_1,\ldots,p_n} \in \mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n)$. Por la parte anterior, $\mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n) \subseteq B(h_{p_1,\ldots,p_n}, 4\varepsilon)$.

Lema 2. $\mathscr{E} \subseteq \bigcup_{(p_1,\ldots,p_n)} \mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n) \subseteq \bigcup_{(p_1,\ldots,p_n)} B(h_{p_1,\ldots,p_n}, 4\varepsilon)$.

Si asumimos este resultado, el Teorema está completo. Probemos el Lema 2.

En efecto, si $f \in \mathscr{E}$, para cada i, $f(x_i)$ es cubierta por alguna bola $B(h(x_i), \varepsilon)$, con $h \in \mathscr{E}_i$. Supongamos que tal h es la $h^i_{p_i}$, para algún p_i, de donde para cada i,

$$f(x_i) \in B(h^i_{p_i}(x_i), \varepsilon) \implies d(f(x_i), h^i_{p_i}(x_i)) \leq \varepsilon.$$

Luego, $f \in \mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n)$, lo que prueba el resultado.

Falta probar el Lema 1. Para ello, sean $h, g \in \mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n)$. Sean $x \in X$, e $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in V_{x_i}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(h(x), g(x)) \leq &\ d(h(x), h(x_i)) + d(h(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) \\ \leq &\ \varepsilon + d(h(x_i), g(x_i)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado la equicontinuidad de $\mathscr{E}(p_1, \ldots, p_n) \subseteq \mathscr{E}$. Finalmente,

$$d(h(x_i), g(x_i)) \leq d(h(x_i), h^i_{p_i}(x_i)) + d(h^i_{p_i}(x_i), g(x_i)) \leq \varepsilon + \varepsilon,$$

lo que prueba el resultado.

Ejercicios (no fáciles).

1. Si $f_n \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ es tal que $\|f_n'\|_\infty \leq M$ y $f_n \to f$ puntualmente, entonces converge uniformemente a f.

2. Probar que Arzelà-Ascoli sigue siendo válido si Y es sólo e.m. **Ind.** Probar que adh($\mathscr{E}$) es completa.

3. Caracterizar los conjunto relativamente compactos de $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$. **Ind.** Probar que $C^1([a,b],\mathbb{R}) \ni f \mapsto (f,f') \in C([a,b],\mathbb{R}^2)$ es homeomorfismo.

Próximo video. Análisis Funcional 3. EVTs y Operadores lineales.