Video F4 Análisis: Análisis Funcional IV. Operadores Lineales.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

4 de julio de 2021

Operadores lineales. Sean E, F evt., y $L : E \to F$ lineal (es decir, $L(x+\lambda y) = Lx + \lambda Ly$, para todo $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$). Un tal L se denomina usualmente **operador lineal.**

Ejemplos.

1. $E = C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma del supremo, $F = \mathbb{R}$, y $Lx = x(\frac{1}{2})$, para $x \in E$.

2. $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ y $F = C([0,1],\mathbb{R})$ con sus respectivas normas supremo, entonces $Lx = x'$ es lineal.

Lema. L es continua en E ssi lo es en 0.

Demostración. ($\Longrightarrow$) directa. Veamos ($\Longleftarrow$).

Si $x_\lambda \to x$ como red en E, por ser evt., $(x_\lambda - x) \to 0$. Luego, como L es continua en cero,

$$L(x_\lambda - x) \to L(0) = 0 \qquad \text{es decir,} \qquad Lx_\lambda \to Lx.$$

Lema. Sean E, F evn. $L : E \to F$ lineal es continua ssi

$$\text{existe } K > 0 \text{ tal que } \|Lx\|_F \leq K\|x\|_E, \text{ para todo } x \in E. \qquad (\star)$$

Demostración. Basta probar que L es continua en 0 ssi existe $K > 0$ tal que $\|Lx\|_F \leq K\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

$(\Longleftarrow)$ Si $x_\lambda \to 0$, entonces $\|x_\lambda\| \to 0$ y por hipótesis, $\|Lx_\lambda\| \to 0$, lo que implica que $Lx_\lambda \to 0$.

$(\Longrightarrow)$ Como L es continua en 0, dada $B_F(0,1) \in \mathscr{N}_0(\tau_{\|\cdot\|})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $L(\overline{B}_E(0,\varepsilon)) \subseteq B_F(0,1)$.

Luego, si $x \in E$, $x \neq 0$, $\varepsilon \frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}_E(0,\varepsilon)$, de donde $L(\varepsilon \frac{x}{\|x\|}) \in B_F(0,1)$.

Por lo tanto, $\|L(\varepsilon \frac{x}{\|x\|})\|_F \leq 1$, es decir, $\varepsilon\|Lx\|_F \leq \|x\|$, lo que prueba el resultado con $K = \frac{1}{\varepsilon}$. El caso $x = 0$ es trivial.

Definición. Denotamos por $\|L\|$ al ínfimo de todos los $K \in \mathbb{R}$ tales que($\star$) se satisface, es decir

$$\|L\| := \|L\|_{E,F} := \inf\Big\{k \in \mathbb{R} \ : \ \|Lx\|_F \leq k\|x\|_E, \quad \forall x \in E\Big\}.$$

Ejercicio. Mostrar que $\|L\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Lx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Lx\|_F$.

Lema. Si E, F son evn. y $L : E \to F$ es lineal, son equivalentes:

1. L es continua (en 0)
2. $\|L\| < +\infty$
3. L es acotada sobre $\overline{B}_E(0,1)$
4. L transforma acotado en acotado

Demostración. Ejercicio (basta probar 3 y 4).

Teorema. Sean E, F evn. y

$$\mathscr{LC}(E,F) := \{L : E \to F \ : \ L \text{ es lineal continua}\}.$$

Entonces $(\mathscr{LC}(E,F), \|\cdot\|_{E,F})$ es evn., y si F es además Banach, entonces $\mathscr{LC}(E,F)$ también lo es.

Demostración. $\|\cdot\|_{E,F}$ es norma, ejercicio. Probemos que $(\mathscr{LC}(E,F), \|\cdot\|_{E,F})$ es Banach si F lo es.

Sea (L_n) sucesión de Cauchy en $\mathscr{LC}(E,F)$. Notar que si $x \in E$,

$$\|L_n x - L_m x\|_F = \|(L_n - L_m)x\|_F \leq \|L_n - L_m\|_{E,F} \|x\|_E.$$

Entonces, para cada $x \in E$, $(L_n x)$ es de Cauchy en F, que es Banach, y por lo tanto converge.

Sea L dada por $Lx := \lim_{n\to+\infty} L_n x \in F$.

Debemos probar tres cosas: L es lineal, continua y $\|L_n - L\|_{E,F} \to 0$.

Chequear que L es lineal.

Mostremos la continuidad. Para ello, para $n, m \geq n_0$ grandes, $\|L_n - L_m\|_{E,F} < \varepsilon$. Luego, si $x \in E$,

$$\|(L_n - L_m)x\|_F \leq \|L_n - L_m\|_{E,F}\|x\|_E < \varepsilon\|x\|_E.$$

Pasando al límite en m, $\|(L_n - L)x\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$. Esto prueba que $L_n - L$ es continua, pero L_n es continua, lo que muestra que L también lo es.

Además, $\|L_n - L\|_{E,F} < \varepsilon$, lo que prueba la convergencia. OK.

Definición muy importante. Sean E evt. con E ev. sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Denotamos por $E^* := \mathscr{LC}(E, \mathbb{K})$ al **espacio dual** de E. Los elementos ℓ de E^* se llaman **funcionales lineales continuos**.

Corolario. Si E es evn., entonces E^* es Banach para la norma $\|\ell\|_* := \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\ell(x)|$.

Notación. Los elementos duales se denotarán x^*, y^*, etc., mientras que $x^*(x) \in \mathbb{K}$ se denotará $\langle x^*, x \rangle$. Más sobre eso en próximas clases.

Ejercicio. Si E, F son evn., y $L : E \to F$ es lineal con $\dim(E) < +\infty$, entonces L es continua. **Ind.** Basta acotar L en una vecindad del 0.

Observación. Si $\dim(E) = \infty$, siempre existen funcionales lineales NO continuos:

Ejemplo. Sea $E := \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ p \text{ es polinomio}\}$, con la norma del supremo en $[0,1]$ que lo hace evn. Sea

$$L : E \to \mathbb{R}, \qquad Lp := p(2),$$

claramente lineal (si conocemos p en [0,1], lo conocemos en 2). Si $p_n := \frac{x^n}{2^n}$, tenemos $Lp_n = 1$, mientras que $\|p_n\|_\infty = 2^{-n}$, que converge a cero. Luego, L es discontinuo.

El Teorema de Baire.

Definición. Un conjunto A se dice **flaco o magro** si $\mathrm{int}(\mathrm{adh}A) = \emptyset$.

Ejemplos. Las bolas $B(0,1)$ en un evn. no son flacas; en $\mathbb{R}^2$ con la topo. canónica, las rectas son flacas.

El **teorema de Baire**, que posee muchas aplicaciones, nos dice que un Banach **no puede estar compuesto** por la unión numerable de conjuntos flacos.

Esta propiedad es bien fundamental y se llama ser **segunda categoría**. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ no se puede escribir como unión numerable de rectas, i.e., es de segunda categoría.

Un conjunto es de **primera categoría** si se puede escribir como unión numerable de conjuntos flacos, como los racionales en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q} = \cup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$).

Teorema (Baire). Sea $(E, \|\cdot\|)$ Banach. Si $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con F_n cerrados, entonces existe n_0 para el cual $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

En otras palabras, los Banach son de segunda categoría.

Demostración. Por contradicción, supongamos que $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$ para cada n. E es abierto, por ende $F_0 \neq E$ y existe $x_0 \in E$ pero no en F_0.

Como F_0^c es abierto, $\overline{B}(x_0, r_0) \subseteq B(x_0, 2r_0) \subseteq F_0^c$ para algún $r_0 > 0$.

Pero $B(x_0, r_0)$ Â no está incluida en F_1 (sino $\operatorname{int}(F_1) \neq \emptyset$), luego existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap F_1^c$ (abierto).

Luego, existe $0 < r_1 < \frac{1}{2} r_0$ tal que $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq \overline{B}(x_0, r_0) \cap F_1^c$.
Inductivamente, generamos una secuencia (x_n, r_n) tal que

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(x_n, r_n) \cap F_{n+1}^c, \qquad 0 < r_{n+1} < r_n/2 \to 0.$$

Por el **Teorema de intervalos encajonados**, $\bigcap_{n\geq 0} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x^*\}$.
Pero $x^* \in \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq F_n^c$, para todo n.

Luego, $x^* \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$, contradicción.

Aplicaciones. Recordemos que un conjunto $C \subseteq E$ ev. es **convexo** si para todo $x, y \in C$ y $\alpha \in (0,1)$, se tiene $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$.

Ejemplo. En un evn., las bolas son convexas, pero un conjunto con dos componentes conexas no lo es.

Corolario. Sea F un convexo cerrado absorbente en $(E, \|\cdot\|)$ Banach real. Entonces $F \in \mathscr{N}_0$.

Demostración. Sea $G := F \cap (-F)$. Chequear que es convexo cerrado, **absorbente y equilibrado**.

Veamos que $G \in \mathscr{N}_0$. Como G es absorbente, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kG$, y por Baire existe k_0 tal que $k_0 G$ tiene interior no vacío.

Luego, G tiene interior no vacío y existe $x_0 \in G$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que $B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq G$ y $B(-x_0, \varepsilon_0) \subseteq G$ (por ser equilibrado).

Esto implica que $B(0, \varepsilon_0) \subseteq G$ (lo que prueba el resultado). En efecto, si $z \in B(0, \varepsilon_0)$, usando que G es convexo y

$$z = \frac{1}{2}(z + x_0) + \frac{1}{2}(-x_0 + z) \in B(x_0, \varepsilon_0) + B(-x_0, \varepsilon_0) \subseteq G.$$

Teorema (Ppio. de la Cota Uniforme). Sean E, F evn., con E Banach. Sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{LC}(E,F)$ una familia puntualmente acotada, es decir

$$\forall x \in E, \quad \{L(x) \ : \ L \in \mathscr{A}\} \text{ es acotado en } F.$$

Entonces existe $M > 0$ tal que $\|L\| \leq M$ para toda $L \in \mathscr{A}$.

Demostración. Sea $C := \{x \in E \ : \ \|Lx\| \leq 1, \forall L \in \mathscr{A}\}$. Chequear que C es cerrado, equilibrado y absorbente. Además, C es convexo.

Luego, $C \in \mathscr{N}_0$ y existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\overline{B}(0, \varepsilon_0) \subseteq C$. Por ende, si $\|y\| \leq \varepsilon_0$, $\|Ly\| \leq 1$.

Pero $y = \varepsilon_0 x$, $\|x\| \leq 1$, de donde $\|Lx\| \leq \varepsilon_0^{-1}$, por lo que $\|L\| \leq \varepsilon_0^{-1}$. OK.

Ejercicio. Probar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt$ converge a cero si $n \to +\infty$.

Aplicación. Usaremos el Ppio. de la Cota Uniforme para probar que existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = 0$ (i.e., en $C_0([0,1],\mathbb{R})$), y tal que

$$\int_0^1 f(t)\frac{\sin(nt)}{t}dt \qquad \text{no converge a cero.}$$

En efecto, sea $\ell_n : (C_0([0,1],\mathbb{R}), \|\|_\infty) \to \mathbb{R}$ lineal dada por

$$\ell_n f := \int_0^1 f(t)\frac{\sin(nt)}{t}dt, \text{ y } \mathscr{A} := \{\ell_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene ℓ_n continua:

$$|\ell_n f| \leq \int_0^1 |f(t)|\frac{|\sin(nt)|}{t}dt \leq K_n\|f\|_\infty, \qquad K_n := \int_0^n \frac{|\sin t|}{t} < +\infty.$$

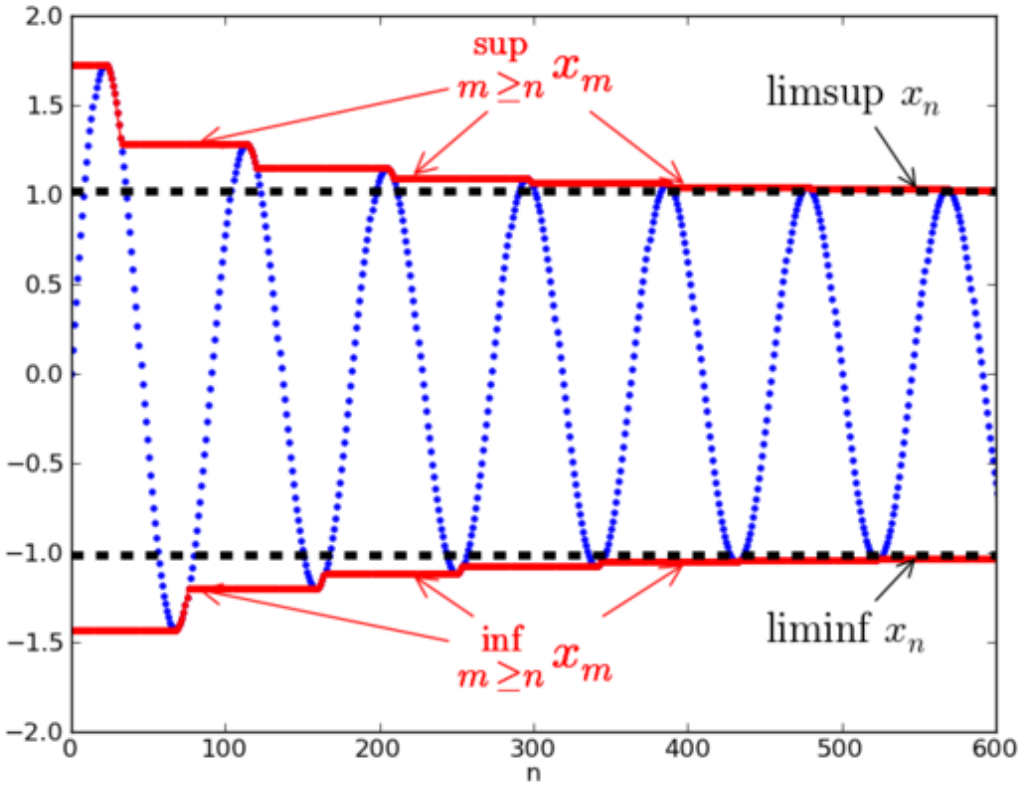
Ahora, asumamos $\ell_n f \to 0$ para toda f. Luego, $\mathscr{A}$ es puntualmente acotada en $\mathbb{R}$. Luego, es uniformemente acotada!

Luego, existe $M > 0$ tal que $\|\ell_n\|_* \leq M$. Esto es falso, porque $\|\sin(nt)\|_\infty = 1$, pero $\|\ell_n\|_* \geq |\ell_n(\sin(nt))| = \int_0^n \frac{\sin^2 t}{t} = \infty$. Contradicción.

Recordemos que si (a_n) es una sucesión de reales,

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup_{n\geq k} a_k.$$

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf_{n\geq k} a_k.$$



Teorema (Banach-Steinhaus). Sean E, F evn. con E Banach y sea $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones lineales continuas de E a F que es puntualmente convergente:

$$\text{para todo } x \in E, \qquad \text{existe } L(x) := \lim_{n\to+\infty} L_n(x).$$

Entonces $L : E \to F$ es continua y $\|L\| \leq \limsup_{n\to+\infty} \|L_n\| \quad (\star)$.

Obs. La cota $(\star)$ puede ser naturalmente estricta. Ver Auxiliar.

Demostración. La familia $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente acotada, por lo que lo es uniformemente: $\|L_n\| \leq M$ y $\limsup_{n\to+\infty} \|L_n\| < +\infty$. También, L es lineal (ejercicio).

Para probar la continuidad, basta probar $(\star)$. Tenemos por dato y continuidad de la norma que $\|L(x)\| = \lim_n \|L_n(x)\|$. Pero, usando la continuidad de L_n,

$$\|L_n(x)\| \leq \sup_{k\geq n} \|L_k(x)\| \implies \|L_n(x)\| \leq \left(\sup_{k\geq n} \|L_k\|\right) \|x\|.$$

de donde, tomando límite en n, $\|L(x)\| \leq \limsup_{n\to+\infty} \|L_n\| \|x\|$. Esto prueba $(\star)$.

Próximo video: Teoremas de Aplicación abierta, Grafo cerrado y Hanh-Banach.