

Video F5 Análisis: Análisis Funcional V. Operadores Lineales 2 / Hanh-Banach 1.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

5 de junio de 2021

Recordemos que estábamos viendo **operadores lineales**.

Operadores lineales. Sean E, F evt., y $L : E \rightarrow F$ lineal (es decir, $L(x + \lambda y) = Lx + \lambda Ly$, para todo $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$). Un tal L se denomina usualmente **operador lineal**.

Denotábamos $\|L\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Lx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Lx\|_F$.

Lema. Si E, F son evn. y $L : E \rightarrow F$ es lineal, son equivalentes:

1. L es continua (en 0)
2. $\|L\| < +\infty$
3. L es acotada sobre $\overline{B}_E(0, 1)$
4. L transforma acotado en acotado

Teorema. Sean E, F evn. y

$$\mathcal{LC}(E, F) := \{L : E \rightarrow F : L \text{ es lineal continua}\}.$$

Entonces $(\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|_{E, F})$ es evn., y si F es además Banach, entonces $\mathcal{LC}(E, F)$ también lo es.

Definición muy importante. Sean E evt. con E ev. sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Denotamos por $E^* := \mathcal{LC}(E, \mathbb{K})$ al **espacio dual** de E . Los elementos ℓ de E^* se llaman **funcionales lineales continuos**.

Corolario. Si E es evn., entonces E^* es Banach para la norma $\|\ell\|_* := \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\ell(x)|$.

Hoy día partiremos con un teorema importante que caracteriza los funcionales lineales sobreyectivos.

Teorema (Aplicación abierta). Sean E, F Banach y $L : E \rightarrow F$ lineal continua. Si L es sobreyectiva, entonces es abierta, es decir, envía abierto en abierto. En particular, si L es biyección, entonces su inversa es continua (homeomorfismo).

Observaciones.

1. No toda función lineal es abierta. Por ejemplo, $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Lx \equiv 0$ envía $\mathbb{R}$ en 0 (cerrado no abierto). Pero $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Lx = x$ es abierta porque es sobreyectiva.
2. No confundir L abierta (imagen de abierto es abierto) con L continua, que quiere decir que preimagen de abierto es abierto.

Demostración. Para esta demostración usaremos el siguiente lema técnico. Para la demostración, ver la parte final.

Lema de Robinson. Si E, F son dos evn. con E Banach, y $C \subseteq E \times F$ es convexo cerrado tal que $\Pi_E C$ es acotado. Entonces

$$\text{int}(\Pi_F C) = \text{int}(\overline{\Pi_F C}).$$

Asumamos este lema, y supongamos primero que $L(\overline{B}(0,1)) \in \mathcal{N}_0(\tau_{\|\cdot\|_F})$ (imagen por L de la bola cerrada es vecindad del cero en F). Si esto es cierto, entonces L es abierta.

En efecto, sea $\Theta \in \tau_{\|\cdot\|_E}$; PDQ $L\Theta \in \tau_{\|\cdot\|_F}$.

Sea $\bar{y} \in L\Theta$. Luego, existe $\bar{x} \in E$ tal que $L\bar{x} = \bar{y}$. Como Θ es abierto, existe $\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \Theta$.

Pero $\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon) = \bar{x} + \varepsilon \overline{B}(0,1)$, de donde $L(\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon)) = \bar{y} + \varepsilon L(\overline{B}(0,1))$, por lo que si $L(\overline{B}(0,1)) \in \mathcal{N}_0(\tau_{\|\cdot\|_F})$ entonces $L(\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon))$ es vecindad de $\bar{y}$, que es lo pedido.

En efecto, para cada $\bar{y} \in L\Theta$, $L(\bar{B}(\bar{x}, \varepsilon))$ es vecindad de $\bar{y}$, lo que prueba que $L\Theta$ es abierto.

Probemos ahora que $L(\bar{B}(0, 1)) \in \mathcal{N}_0(\tau_{\|\cdot\|_F})$. Para ello usaremos Robinson. Sea

$$C := \{(x, Lx) : \|x\|_E \leq 1\} \subseteq E \times F.$$

Tenemos $\Pi_E C = \bar{B}_E(0, 1)$, acotada. Además $\Pi_F C = L(\bar{B}_E(0, 1))$.

Por último, C es convexo y cerrado pues L es continua. Por Robinson,

$$\text{int}(L(\bar{B}_E(0, 1))) = \overline{\text{int}(L(\bar{B}_E(0, 1)))}.$$

Pero $\overline{L(\bar{B}_E(0, 1))}$ es convexo cerrado, equilibrado y absorbente (ejercicio). Por ende, como F es Banach, es vecindad del origen.

Esto implica que $L(\bar{B}_E(0, 1))$ es vecindad del origen, lo que prueba el resultado.

Teorema (Grafo Cerrado). Sean E, F Banachs y $L : E \rightarrow F$ lineal. Entonces L es continua ssi $Gr(L) := \{(x, Lx) : x \in E\}$ es cerrado en $E \times F$.

Demostración. Ejercicio. Hint: Usar aplicación abierta para las proyecciones Π_F y Π_E a partir de $Gr(L)$, y que $L = \Pi_F \circ \Pi_E^{-1}$.

El Teorema de Hahn y Banach.

Este es uno de los teoremas más importantes del Análisis Funcional, y trata sobre **extensión de funcionales lineales** definidos sobre sevs..

En lo que sigue, **trabajaremos a valores reales**. Una función $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **sublineal** si para cada $x, y \in E$ y $\lambda > 0$ se tiene

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

(Por ejemplo, la norma $\|\cdot\|$ si E es evn.)

Teorema (Hahn-Banach, versión analítica). Sea E evt. real y $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal. Sean E_0 sev. de E y $\ell_0 : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\ell_0(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E_0$. Entonces existe $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal que extiende a ℓ_0 , i.e. tal que

$$\ell|_{E_0} = \ell_0, \quad \ell(x) \leq p(x), \quad x \in E.$$

Demostración. La idea es usar Zorn. Sea

$$\mathcal{L} := \left\{ (\ell, F) : F \text{ es sev. de } E, \quad E_0 \subseteq F, \quad \ell : F \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal} \right. \\ \left. \ell|_F = \ell_0, \quad \ell(x) \leq p(x), \quad x \in F. \right\}$$

Sobre $\mathcal{L}$ colocamos el orden parcial siguiente (ejercicio):

$$(\ell_1, F_1) \leq (\ell_2, F_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (F_1 \subseteq F_2) \quad \wedge \quad \ell_2|_{F_1} = \ell_1.$$

La idea es probar que $\mathcal{L}$ posee elemento maximal (ℓ, F) , y ese elemento satisface $F = E$.

Notar también que $\mathcal{L}$ es no vacío, pues $(\ell_0, E_0) \in \mathcal{L}$.

Sea $(\ell_\lambda, F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una cadena en $\mathcal{L}$; probemos que tiene cota superior.

Definimos la cota superior como $\tilde{F} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, y para $x \in \tilde{F}$, sea $\tilde{\ell}(x) := \ell_\lambda(x)$ si $x \in F_\lambda$.

Chequeemos que ℓ es lineal: si $x, y \in \tilde{F}$, existe λ tal que $x, y \in F_\lambda$ (es cadena), por lo que $x + y \in F_\lambda$ y se tiene

$$\tilde{\ell}(x + y) = \ell_\lambda(x + y) = \ell_\lambda x + \ell_\lambda y = \tilde{\ell}x + \tilde{\ell}y.$$

Chequear que $\tilde{\ell}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \tilde{F}$. Luego, $(\tilde{\ell}, \tilde{F})$ es cota superior de la cadena $(\ell_\lambda, F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $\mathcal{L}$. Por Zorn, existe elemento maximal (ℓ, F) .

Probemos que $F = E$, lo que concluye el resultado.

Supongamos que F no es E , y existe $x_0 \in F^c$. Sea

$$\hat{F} := \{x + tx_0 : x \in F, t \in \mathbb{R}\}$$

el sev. mínimo que contiene (estrictamente) a F y x_0 . Extendemos ℓ a $\hat{F}$ de la forma

$$\hat{\ell}(x + tx_0) := \hat{\ell}(x) + t\hat{\ell}(x_0) = \ell(x) + tm, \quad m := \ell(x_0) \text{ (libre)}.$$

Notar que $\hat{\ell}$ está bien definida y sigue siendo lineal por construcción. Además, $\hat{\ell} = \ell$ sobre F .

Basta probar que $\hat{\ell} \leq p$ sobre $\hat{F}$ para concluir una contradicción. Para ello, escogeremos el valor de $m = \ell(x_0)$ adecuadamente.

Notemos primeramente que si $t = 0$ no hay nada que probar: $\ell(x) \leq p(x)$ por dato.

Supongamos $t \neq 0$. Tenemos ahora que para cualquier $x \in F$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\ell(x) + tm \leq p(x + tx_0) \iff tm \leq p(x + tx_0) - \ell(x).$$

Si $t > 0$, tenemos

$$m \leq \frac{1}{t}(p(x + tx_0) - \ell(x)) \implies m \leq \inf_{t>0} \frac{1}{t}(p(x + tx_0) - \ell(x)).$$

Si $t < 0$, tenemos ahora

$$m \geq \frac{1}{t}(p(x + tx_0) - \ell(x)) \implies m \geq \sup_{t<0} \frac{1}{t}(p(x + tx_0) - \ell(x)).$$

Basta entonces probar que

$$\sup_{t < 0, x \in F} \frac{1}{t} (p(x + tx_0) - \ell(x)) \leq \inf_{t > 0, x \in F} \frac{1}{t} (p(x + tx_0) - \ell(x)),$$

(se puede escoger m entre estos dos números).

Sean ahora $x_1, x_2 \in F$, $t_1, t_2 > 0$. Queremos ver que lo siguiente es verdadero:

$$-\frac{1}{t_1} (p(x_1 - t_1 x_0) - \ell(x_1)) \leq \frac{1}{t_2} (p(x_2 + t_2 x_0) - \ell(x_2)),$$

esto es

$$\ell(t_2 x_1 + t_1 x_2) \leq t_1 p(x_2 + t_2 x_0) + t_2 p(x_1 - t_1 x_0).$$

Pero

$$\ell(t_2x_1 + t_1x_2) \leq p(t_2x_1 + t_1x_2) = p(t_2(x_1 - t_1x_0) + t_1(x_2 + t_2x_0)),$$

y usando la subaditividad y positiva homogeneidad de p , se obtiene lo pedido:

$$\ell(t_2x_1 + t_1x_2) \leq t_1p(x_2 + t_2x_0) + t_2p(x_1 - t_1x_0).$$

Esto termina la demostración.

Ejercicio. Si E es evn. con $C \subseteq E$ convexo de interior no vacío, entonces el interior de C es el interior de su adherencia, y su adherencia es la adherencia de su interior. (Pensar en las bolas $C = B(0,1)$ y $\overline{B}(0,1)$ para hacerse una idea.)

Próximo video. Hanh-Banach 2.

Material adicional

Lema de Robinson. Si E, F son dos evn. con E Banach, y $C \subseteq E \times F$ es convexo cerrado tal que $\Pi_E C$ es acotado. Entonces

$$\text{int}(\Pi_F C) = \text{int}(\overline{\Pi_F C}).$$

Demostración. Supongamos $C \neq \emptyset$, sino el resultado es evidente.

Claramente $\text{int}(\Pi_F C) \subseteq \text{int}(\overline{\Pi_F C})$. Probemos la opuesta, que se obtiene de probar antes $\text{int}(\overline{\Pi_F C}) \subseteq \Pi_F C$.

Debemos probar que si $\bar{y} \in \text{int}(\overline{\Pi_F C})$, existe $\bar{x} \in E$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$, de donde $\bar{y} = \Pi_F(\bar{x}, \bar{y}) \in \Pi_F C$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq \overline{\Pi_F C}$, y tomemos $(x_0, y_0) \in C$ arbitrarios. Definiremos una sucesión $(x_k, y_k) \in C$ de la forma siguiente.

Siempre que $y_k \neq \bar{y}$,

PASO 1 Tomamos $\alpha_k := \frac{\varepsilon}{\|y_k - \bar{y}\|}$ y $w := \bar{y} + \alpha_k(\bar{y} - y_k)$;

Notar que $w \in \partial \bar{B}(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq \bar{B}(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq \overline{\Pi_F C}$.

PASO 2 Tomamos $(u, v) \in C$ tal que $\|v - w\| \leq \frac{1}{2}\|y_k - \bar{y}\|$.

PASO 3 Definimos $(x_{k+1}, y_{k+1}) := \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}(x_k, y_k) + \frac{1}{1+\alpha_k}(u, v) \in C$.

Si el algoritmo se detiene en el paso k , con $y_k = \bar{y}$, tomamos $\bar{x} = x_k$, por lo que $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}) \in C$ y se tiene $\bar{y} \in \Pi_F C$. Sino, tenemos una sucesión (x_k, y_k) .

Probaremos:

(1) $y_k \rightarrow \bar{y}$.

(2) (x_k) es de Cauchy y existe $\bar{x} := \lim_k x_k$.

Si estas dos afirmaciones son ciertas, como $(x_k, y_k) \in C$, se tiene $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{adh}(C) = C$. Luego, $\bar{y} \in \Pi_F C$.

Probemos (1) y (2). Primero,

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \frac{1}{1 + \alpha_k} \|x_k - u\| \leq \frac{1}{\alpha_k} \text{diam}(\Pi_E C) \leq M \|y_k - \bar{y}\|.$$

Por otro lado,

$$y_{k+1} = \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k} y_k + \frac{v}{1 + \alpha_k}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k} y_k + \frac{w}{1 + \alpha_k}.$$

Luego,

$$\|y_{k+1} - \bar{y}\| = \frac{1}{1 + \alpha_k} \|v - w\| \leq \|v - w\| \leq \frac{1}{2} \|y_k - \bar{y}\|.$$

Recursivamente, $\|y_k - \bar{y}\| \leq 2^{-k} \|y_0 - \bar{y}\| \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$.

Luego, $\|x_{k+1} - x_k\| \leq C 2^{-k}$, lo que prueba que es de Cauchy en Banach, luego, converge.