# *Video A1 Análisis: Lógica y Teoría de Conjuntos 1.*

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

15 de marzo de 2021

A través del curso (y la carrera), **asumiremos la lógica proposicional:**

1. Existen proposiciones lógicas $p, q, r, \ldots$
2. Existen operadores unitarios lógicos $\sim$, y binarios lógicos $\wedge, \vee$, etc., que permiten definir

$$\sim p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \ldots$$

   La implicancia se define por

$$p \implies q \quad \text{sí y sólo si} \quad \sim p \vee q,$$

   y

$$p \iff q \quad \text{sí y sólo si} \quad (p \implies q) \wedge (q \implies p),$$

3. Para $x$ variable, existen las funciones proposicionales $p(x), q(x), r(x), \ldots$ a valores en $\{V, F\}$.
4. Existen cuantificadores existenciales $\exists, \forall$, entre otros.

Por ejemplo, $(\exists x)p(x)$ se lee existe $x$ tal que $p(x)$, lo que puede ser cierto o no.

Existe toda una rama de las matemáticas llamada **Lógica Matemática**, que estudia en extrema profundidad las relaciones anteriores y sus consecuencias (otro curso!).

Aún así, es posible axiomatizar la lógica, es decir, darle bases fundamentales de las cuales partir. Estas bases **no se definen, se asumen** (por eso se llaman axiomas).

En auxiliar se verán estas bases más en detalle **(Axiomas de Hilbert-Ackermann)**.

Lo mismo se puede hacer con los conjuntos, es decir, darles una axiomática firme y bien definida. Resulta que tal estructura es para nada simple!

**Teoría Axiomática de conjuntos.** Existen esencialmente dos teorías axiomáticas bien reconocidas:

1. **Zermelo-Fraenkel (ZF):** Existen objetos que satisfacen ciertas propiedades ("conjuntos"), lo que no satisface esto no está definido.
2. **Von Neumann-Barnays-Gödel (NBG)**: Existen clases y conjuntos, los primeros permiten definir parte de lo que anteriormente no lo estaba.

Además de la axiomática, se incluye un último axioma de mucha profundidad y controversia, llamado **Axioma de Elección** (AE).

Ambas teorías son equivalentes en cierto modo, pero la segunda (NBG+AE) es más simple de enseñar, mientras que la primera (ZF+AE) es la que se usa en la investigación avanzada.

Nosotros estudiaremos (NBG+ AE).

**Problema fundamental de la teoría de conjuntos:** No toda función proposicional $p(x)$ da origen a un conjunto!

**Ejemplo de Russel:** Sean

$$p(x) := x \notin x; \quad \text{y} \quad \mathscr{R} := \{x \mid p(x)\} = \{x \mid x \notin x\}.$$

**Pregunta:** Es $\mathscr{R}$ conjunto?

Supongamos $\mathscr{R}$ es conjunto. Ahora tenemos dos casos: $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$ y $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$.

En el primer caso, por definición de $\mathscr{R}$ tenemos $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$, contradicción ($p \wedge \sim p$ siempre falso).

En el segundo caso, tenemos naturalmente $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$, otra contradicción.

El problema no es $\mathscr{R}$, sino lo que entendemos por conjunto!

**Objetos de la teoría.**

1. **Concepto no definido:** "clase"
2. **Variables de clase:** $x, y, A, B, \mathscr{A}, \mathscr{B}$, etc.
3. **Relación binaria entre clases no definida:** $\in$ ("pertenencia").

La intuición nos dice qué significa $\in$, pero ojo, **no está definida y puede significar cualquier cosa!**

Con lo anterior podemos formar proposiciones básicas como $x \in A$, que se lee la clase $x$ pertenece a la clase $A$.

Asimismo, podemos formar **proposiciones compuestas o fórmulas**, por medio de conectivos lógicos $\wedge, \vee, \sim, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$, cuantificadores, siempre respetando las reglas sintácticas del cálculo proposicional. Por ejemplo,

$$(x \in A) \wedge \sim (x \in B).$$

**Definiciones básicas:**

1. $x \notin A \iff \sim (x \in A)$
2. $A \subseteq B \iff (\forall x : \ x \in A \implies x \in B)$
3. $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \iff (\forall x : \ x \in A \iff x \in B)$.

**Ejercicios:**

1. Probar que $x = x$.
2. $(x \in A) \wedge (A = B) \implies (x \in B)$.

Notar que la última propiedad **cuantifica sobre la variable de la segunda posición:** cambiamos $A$ por $B$.

**Pregunta obvia:** es posible hacerlo sobre la primera posición?

Es decir, es cierto que $(x \in A) \wedge (x = y) \implies (y \in A)$?

Sólo con las definiciones anteriores, esto parece imposible. Necesitamos pues un axioma para ello.

**Axioma I (Individualidad)**. $(x \in A) \wedge (x = y) \implies y \in A$.

Este axioma nos dice que **todo elemento de una clase es único**.

Necesitamos ahora un axioma que nos permita construir clases.

**Axioma II (Formación de clases)**. Para toda $p$ propiedad en la cual aparecen cuantificadores de **variables de conjuntos**, existe una clase cuyos únicos miembros son sólo aquellos que satisfacen la propiedad.

Es decir, $\{x \ : \ (x \text{ es conjunto}) \wedge p(x)\}$ es clase.

Por ejemplo,

1. $\mathscr{R} := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \notin x)\}$ es la clase de Russel, y
2. $\mathscr{U} := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = x)\}$ es la clase universal.

Ojo que $x$ es conjunto todavía no está definida!

**Definición fundamental**. Diremos que una clase $x$ **es conjunto** si existe $A$ clase tal que $x \in A$.

Es decir, un conjunto es una clase que está incluida en otra clase. Dicho de otra forma, si $x, A$ son clases y $x \in A$, entonces $x$ es conjunto.

OJO que ($x$ es conjunto) es función proposicional: $(\exists A) x \in A$.

Bajo esta definición, la clase de Russel $\mathscr{R}$ **no es conjunto**, pues si lo fuese satisface $(\mathscr{R} \in \mathscr{R}) \iff (\mathscr{R} \notin \mathscr{R})$.

Toda clase que no es conjunto se dice **clase propia.**

**Ejercicio.** Probar que la clase universal $\mathscr{U}$ es clase propia.

Gracias al Axioma II, podemos definir

**Definición (clase vacía).**
$\emptyset := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \neq x)\}$, donde $(x \neq x) \iff \sim (x = x)$.

**Ejercicios.**

1. La propiedad $x \in \emptyset$ es siempre falsa.
2. Para toda clase $A$, $\emptyset \subseteq A$.
3. $\mathscr{R} = \mathscr{U}$.

**Más definiciones.**

1. $A \cup B := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \in A \vee x \in B)\}$, que es clase porque $x$ es cuantificado sobre conjunto.
2. $A \cap B := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \in A \wedge x \in B)\}$.
3. $A^c := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \notin A)\}$.
4. $A \backslash B := A \cap B^c$.
5. $\{A\} := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = A)\}$.

Hasta ahora no sabemos si existen conjuntos!

**Axioma III (conjunto vacío).** $\emptyset$ es conjunto, i.e., existe un conjunto.

**Axioma IV (emparejamiento).** Si $A, B$ son conjuntos distintos, entonces $\{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = A \vee x = B)\}$ es conjunto, denotado $\{A, B\}$.

Notar que podríamos decir que $\{A, B\} = \{A\} \cup \{B\}$, pero no sabemos si la unión de conjuntos es conjunto!

**Próxima clase:** Más axiomas, nos quedan 5!