Video A2 Análisis: Lógica y Teoría de Conjuntos 2.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

15 de marzo de 2021

Estábamos estudiando la

Teoría Axiomática de conjuntos. Existen esencialmente dos teorías axiomáticas bien reconocidas:

1. **Zermelo-Fraenkel (ZF):** Existen objetos que satisfacen ciertas propiedades (=conjuntos), lo que no las satisface no está definido.
2. Von Neumann-Barnays-Gödel (NBG): Existen clases y conjuntos, los primeros permiten definir parte de lo que anteriormente no lo estaba.

Además de la axiomática, se incluye un último axioma de mucha profundidad y controversia, llamado **Axioma de Elección** (AE).

Objetos de la teoría.

1. **Concepto no definido:** "clase"
2. **Variables de clase:** $x, y, A, B, \mathscr{A}, \mathscr{B}$, etc.
3. **Relación binaria entre clases no definida:** $\in$ ("pertenencia").

Axioma I (Individualidad). $(x \in A) \wedge (x = y) \implies y \in A$.

Este axioma nos dice que **todo elemento de una clase es único**.

Axioma II (Formación de clases). Para toda p propiedad en la cual aparecen cuantificadores de **variables de conjuntos**, existe una clase cuyos únicos miembros son sólo aquellos que satisfacen la propiedad.

Es decir, $\{x \ : \ (x \text{ es conjunto}) \wedge p(x)\}$ es clase.

Definición fundamental. Diremos que una clase x **es conjunto** si existe A clase tal que $x \in A$.
OJO que (x es conjunto) es función proposicional: $p(x) := (\exists A) x \in A$.

Bajo esta definición, las clases de Russel $\mathscr{R}$ y universal $\mathscr{U}$ **no son conjuntos**. Toda clase que no es conjunto se dice **clase propia.**

Gracias al Axioma II, podemos definir

Definición (clase vacía).
$\emptyset := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \neq x)\}$, donde $(x \neq x) \iff \sim (x = x)$.

Axioma III (conjunto vacío). $\emptyset$ es conjunto, i.e., existe un conjunto.

Axioma IV (emparejamiento). Si A, B son conjuntos distintos, entonces $\{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = A \vee x = B)\}$ es conjunto, denotado $\{A, B\}$.

Definiciones.

1. (Producto cartesiano de clases)
$A \times B := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (\exists y \in A \wedge \exists z \in B)\ x = (y,z)\}$.
2. (Relación) Una relación R en una clase $A \times B$ es **una subclase** de A, ie. $R \subseteq A \times B$. OJO que $\subseteq$ no implica que R es conjunto! Escribimos
$$xRy \iff (x,y) \in R.$$
3. (Función) Una relación R en una clase $A \times B$ es **función** si para cada $x \in A$ **existe un único** $y \in B$ tal que $(x,y) \in R$. Denotamos (como usualmente se hace)
$$R : A \to B, \quad y = R(x).$$

Luego, una función es en realidad una **subclase** de una clase mayor que posee una cierta propiedad de unicidad. Abandonaremos rápidamente R y la denotaremos f! Si f es conjunto, no lo sabemos aún!!!

Definición. (Familias de conjuntos) Dado un conjunto Λ, una familia de conjuntos indizada por Λ es **una función** $f : \Lambda \to \mathscr{U}$.

Es decir, a cada elemento $\lambda \in \Lambda$, se le asocia $f(\lambda) =: A_\lambda \in \mathscr{U}$. Notación usual para f:

$$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \qquad (A_\lambda), \qquad etc.$$

Ejemplos:

1. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, a cada $\lambda \in \mathbb{N}$ asociamos $f(\lambda) = \{2\lambda\} = A_\lambda$.
2. Si $\Lambda = \mathbb{R}$, a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ asociamos $f(\lambda) = (\lambda - 1, \lambda + 1) = A_\lambda$.

Más definiciones. Dada una familia de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, sean

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (\exists\lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda\},$$

y

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (\forall\lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda\}.$$

También se denotan $\bigcup\{A_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ y $\bigcap\{A_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$.

Finalmente, definimos la **pitatoria o producto arbitrario de conjuntos** (de manera rigurosa pero tal vez poco intuitiva):

$$\Pi_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda := \left\{ f \ : \ f \text{ es función, } f:\Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ \wedge \ (\forall\lambda)\ f(\lambda)\in A_\lambda \right\}.$$

Es decir, $\Pi_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ corresponde a todas las funciones f que a cada $\lambda \in \Lambda$ le asocian un (único) elemento en A_λ.

Un elemento $f \in \Pi_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ se denota $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, con $f(\lambda) =: a_\lambda$.

Será muy útil a posteriori entender a las $f \in \Pi_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ como "elecciones": a cada $\lambda \in \Lambda$, escojo alguien en A_λ.

Axioma V (Unión). Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es conjunto.

(No es posible decir que la unión arbitraria de conjuntos es conjunto! Debe ser axioma. Y la intersección arbitraria?)

Axioma VI (De reemplazo). Si A es conjunto y $\mathscr{A}$ clase, y $f : A \to \mathscr{A}$ función, entonces $f(A) := \{y \ : \ (y \text{ es conjunto}) \wedge (\exists x \in A) y = f(x)\}$ es conjunto.

Este axioma garantiza que la imagen de un conjunto por una función no **puede ser extremadamente gigante** para dejar de ser conjunto.

Axioma VII (De corte). Si A es conjunto y $\mathscr{A}$ clase, entonces $A \cap \mathscr{A}$ es conjunto.

Este axioma garantizará que intersecciones arbitrarias no den objetos no definidos!

Axioma VIII (De las partes). Si A es conjunto entonces sus partes $\mathscr{P}(A)$ es conjunto.

Obs.: Las partes de una clase A es la clase $\mathscr{P}(A) := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \subseteq A)\}$. Pero si A es conjunto, las partes, por grandes que sean, son conjunto.

Ejercicios.
1. Si A es conjunto y $\mathscr{A} \subseteq A$ es subclase, entonces $\mathscr{A}$ es conjunto.
En efecto,

$$\mathscr{A} = A \cap \mathscr{A},$$

luego por Axioma VII, se concluye.

2. Si A es conjunto y $p(x)$ propiedad, entonces

$$B := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \in A) \wedge p(x)\} =: \{x \in A \ : \ p(x)\}$$

es conjunto. En efecto, por Axioma II tenemos que B es clase. Pero además $B = A \cap \mathscr{A}$, donde $\mathscr{A} := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge p(x)\}$, de donde, por axioma VII, B es conjunto.

Observar que $(x \in A)$ y $(x$ es conjunto$)$ son redundantes!

Ejercicios.

1. Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es conjunto.
2. Si A, B son conjuntos, entonces $B\setminus A$ es conjunto.
3. Mostrar que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Próxima clase: Más axiomas, nos quedan 3!