Video A3 Análisis: Lógica y Teoría de Conjuntos 3.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

22 de marzo de 2021

Estábamos estudiando la Teoría Axiomática de conjuntos NBG +AE:

Axioma I (Individualidad). $(x \in A) \wedge (x = y) \implies y \in A$.

Axioma II (Formación de clases). Para toda p propiedad en la cual aparecen cuantificadores de **variables de conjuntos**, existe una clase cuyos únicos miembros son sólo aquellos que satisfacen la propiedad.

Es decir, $\{x \ : \ (x \text{ es conjunto}) \wedge p(x)\}$ es clase.

Definición fundamental. Diremos que una clase x **es conjunto** si existe A clase tal que $x \in A$.

Definición (clase vacía).
$\emptyset := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \neq x)\}$, donde $(x \neq x) \iff \sim (x = x)$.

Axioma III (conjunto vacío). $\emptyset$ es conjunto, i.e., existe un conjunto.

Axioma IV (emparejamiento). Si A, B son conjuntos distintos, entonces $\{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = A \vee x = B)\}$ es conjunto, denotado $\{A, B\}$.

Definiciones.

1. $A \times B := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (\exists y \in A \wedge \exists z \in B)\ x = (y,z)\}$.
2. (Relación) Una relación R es **una subclase** de A, ie. $R \subseteq A \times B$. Escribimos $xRy \iff (x,y) \in R$.
3. (Función) Una relación f en una clase $A \times B$ es **función** si para cada $x \in A$ **existe un único** $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$. Denotamos
$$f : A \to B, \quad y = f(x).$$
4. Dada una familia de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, sean
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (\exists \lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (\forall \lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda\},$$
$$\Pi_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \left\{ f \ : \ f \text{ es función, } f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ \wedge \ (\forall \lambda)\ f(\lambda) \in A_\lambda \right\}.$$
Notación: $f = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, con $f(\lambda) =: a_\lambda$.

Axioma V (Unión). Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es conjunto.

Axioma VI (De reemplazo). Si A es conjunto y $\mathscr{A}$ clase, y $f : A \to \mathscr{A}$ función, entonces $f(A) := \{y \ : \ (y \text{ es conjunto}) \wedge (\exists x \in A) y = f(x)\}$ es conjunto.

Axioma VII (De corte). Si A es conjunto y $\mathscr{A}$ clase, entonces $A \cap \mathscr{A}$ es conjunto.

Axioma VIII (De las partes). Si A es conjunto entonces sus partes $\mathscr{P}(A)$ es conjunto.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos. 1. Si A es conjunto, entonces $\{A\}$ también lo es.

En efecto, si $A = \emptyset$, entonces $\{\emptyset\} = \mathscr{P}(A)$ que es conjunto por axioma VIII.

Si ahora A no es vacío, por axioma IV $\{\emptyset, A\}$ es conjunto. Notar que $\mathscr{A} := \{x \ : \ x \text{ es conjunto} \wedge (x = A)\}$ es clase, pero

$$\mathscr{A} \cap \{\emptyset, A\} = \{A\},$$

que es conjunto por axioma VII.

2. Si A, B son conjuntos, la clase $A \times B$ es conjunto.

Primero, notar que $A \times B = \bigcup_{x \in A} \{x\} \times B$, por lo que si $A_x := \{x\} \times B$ es conjunto, estamos listos por axioma V.

Pero $A_x = \{x\} \times B$ es la imagen de B conjunto por la función $f_x : B \to A \times B$ dada por $f_x(y) := (x, y)$. Por axioma VI se concluye.

Más ejemplos.

3. Si A, B son conjuntos, y $f : A \to B$ función, entonces f es conjunto.

Para ello, notar que $f \subseteq A \times B$ función significa que $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x, y) \in f$. Como $A \times B$ es conjunto y f subclase, f es conjunto.

4. Si A, B son conjuntos, $\mathscr{F}(A, B)$ correspondiente a todas las funciones $f : A \to B$ es conjunto.

Cada $f : A \to B$ función es conjunto. Como $\mathscr{P}(A \times B)$ es conjunto, y

$$\mathscr{F}(A, B) = \{f \in \mathscr{P}(A \times B) \ : \ f \text{ es función de } A \text{ a } B\} \subseteq \mathscr{P}(A \times B),$$

se tiene lo requerido.

5. La clase universal $\mathscr{U}$ no es conjunto.

Para ello, basta notar que si $\mathscr{U}$ fuese conjunto, $\mathscr{R} = \{x \in \mathscr{U} \ : \ x \notin x\}$ sería conjunto, contradicción.

Volvamos al ejemplo de Russell, $\mathscr{R} = \{x \ : \ x \text{ es conjunto} \wedge (x \notin x)\}$. Queremos una forma de evitar que fenómenos como el anterior le pasen a conjuntos válidos, es decir **queremos que siempre sea válida**:

$$(\forall x)\,(x \text{ es conjunto} \implies x \notin x)\,.$$

(Notar que esto implica que $\mathscr{R} = \mathscr{U}$.) Para ello, introduciremos el siguiente axioma fundamental.

Axioma IX (Fundación). Para cada $A \neq \emptyset$ conjunto, existe $x \in A$ tal que $x \cap A = \emptyset$.

Por ejemplo, si $A = \{a, \{a\}\}$, tenemos que $\{a\} \cap A = \{a\}$, pero $a \cap A = \emptyset$.

Proposición. Si x es conjunto, entonces $x \notin x$.

Demostración. La clase $\{x\}$ es conjunto no vacío. Luego, por Axioma IX, existe $a \in \{x\}$ tal que $a \cap \{x\} = \emptyset$.

El único a posible es x. Luego, $x \cap \{x\} = \emptyset$. Si $x \in x$, $x \cap \{x\} \neq \emptyset$, contradicción.

Ejercicio. Mostrar que si x, y son conjuntos, $(x \notin y) \vee (y \notin x)$.

Necesitamos ahora una forma de construir los **naturales**, que son el primer paso para construir todos los otros sistemas numéricos (y varias demostraciones de vital importancia de Gödel de las que hablaremos más adelante).

Definición. (Naturales de Von Neumann) Sean

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{\emptyset\} = \{0\}, \quad 2 := \{0,1\} = 1 \cup \{1\},$$
$$3 := \{0,1,2\} = 2 \cup \{2\}, \ldots$$

De manera general, $n := \{0,1,\ldots,n-1\} = (n-1) \cup \{n-1\}$.

Definición. Se define el **sucesor de** x, denotado x^+, como $x^+ := x \cup \{x\}$. Todos los anteriores son conjuntos!

Los naturales de Von Neumann no son construcción rigurosa, inductivamente no significa riguroso.

Necesitamos una definición rigurosa de los naturales, que permita deducir que el conjunto anterior, creado inductivamente, existe realmente.

Axioma X (del infinito). Existe un conjunto A tal que

1. $\emptyset \in A$,
2. Si $x \in A$, entonces $x^+ \in A$.

Un conjunto que cumple tales propiedades se dice **inductivo.**

Podría ser el caso que hayan muchos conjuntos inductivos (notar que cada uno de ellos contiene a los naturales definidos por Von Neumann):

$$\emptyset = 0 \in A, \quad 0^+ = 1 \in A, \ldots$$

Queremos pues que los naturales sean el **menor conjunto inductivo.** Sin embargo, hacer

$$\mathbb{N} := \bigcap_{A \text{ inductivo}} A,$$

no funciona, porque $\{A \ : \ A \text{ es inductivo}\}$ es solamente clase (Axioma II, verificar!). Luego $\mathbb{N}$ así como arriba no define conjunto necesariamente. Necesitamos una idea más rigurosa.

Para ello, sea A conjunto inductivo (existe al menos uno). Sea

$$I_A := \{B \;:\; (B \subseteq A) \wedge (B \text{ es inductivo})\} \subseteq \mathscr{P}(A),$$

(que es conjunto) y

$$\mathbb{N}_A := \bigcap_{B \in I_A} B = \{z \in A \;:\; (\forall B \in I_A)\; z \in B\}.$$

Esta definición de $\mathbb{N}$ depende en principio del conjunto "base" A que tomamos para hacer intersecciones.

Teorema. $\mathbb{N}_A$ no depende del A inductivo que escojamos, luego $\mathbb{N} := \mathbb{N}_A$, para cualquier A.

Demostración. Sean A, A' inductivos y diferentes, y sean $\mathbb{N}_A$ y $\mathbb{N}_{A'}$ sus correspondientes naturales.

WLOG, basta probar $\mathbb{N}_A \subseteq \mathbb{N}_{A'}$.

Sea $z \in \mathbb{N}_A$. Luego $z \in A$ y $z \in B$ para todo B inductivo incluido en A. Probemos que $z \in \mathbb{N}_{A'}$.

Notemos que $B := A \cap A'$ es inductivo (probarlo!) incluido en A y A'. Luego, de la parte anterior $z \in A \cap A'$, de donde $z \in A'$.

Si ahora B' es inductivo incluido en A' (elemento de $I_{A'}$), tenemos $B' \cap A \subseteq A$ inductivo, de donde $z \in B' \cap A$, es decir, $z \in B'$, que era lo pedido.

Teorema (Ppio. de Inducción). Se tiene

1. $\mathbb{N}$ es conjunto inductivo y si B es inductivo, B contiene a $\mathbb{N}$.
2. Si B es inductivo y $B \subseteq \mathbb{N}$, entonces $B = \mathbb{N}$.
3. Si $p(n)$ es proposición lógica para $n \in \mathbb{N}$ tal que
    3.1 $p(0)$ es verdadera,
    3.2 $p(n) \implies p(n+1)$,

    entonces $(\forall n)p(n)$.

Demostración. Ejercicio.

Próxima clase: Axioma de Elección y sus consecuencias.