Video A4 Análisis: Lógica y Teoría de Conjuntos 4.

Claudio Muñoz

Curso de Análisis 2021

23 de marzo de 2021

Estábamos estudiando la Teoría Axiomática de conjuntos NBG +AE:

Axioma I (Individualidad). $(x \in A) \wedge (x = y) \implies y \in A$.

Axioma II (Formación de clases). Para toda p propiedad en la cual aparecen cuantificadores de **variables de conjuntos**, existe una clase cuyos únicos miembros son sólo aquellos que satisfacen la propiedad.

Es decir, $\{x \ : \ (x \text{ es conjunto}) \wedge p(x)\}$ es clase.

Definición fundamental. Diremos que una clase x **es conjunto** si existe A clase tal que $x \in A$.

Axioma III (conjunto vacío). $\emptyset$ es conjunto, i.e., existe un conjunto.

Axioma IV (emparejamiento). Si A, B son conjuntos distintos, entonces $\{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = A \vee x = B)\}$ es conjunto, denotado $\{A, B\}$.

Axioma V (Unión). Si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es conjunto.

Axioma VI (De reemplazo). Si A es conjunto y $\mathscr{A}$ clase, y $f : A \to \mathscr{A}$ función, entonces $f(A) := \{y \ : \ (y \text{ es conjunto}) \wedge (\exists x \in A) y = f(x)\}$ es conjunto.

Axioma VII (De corte). Si A es conjunto y $\mathscr{A}$ clase, entonces $A \cap \mathscr{A}$ es conjunto.

Axioma VIII (De las partes). Si A es conjunto entonces sus partes $\mathscr{P}(A)$ es conjunto.

Axioma IX (Fundación). Para cada $A \neq \emptyset$ conjunto, existe $x \in A$ tal que $x \cap A = \emptyset$.

Axioma X (del infinito). Existe un conjunto A tal que

1. $\emptyset \in A$,
2. Si $x \in A$, entonces $x^+ \in A$.

Un conjunto que cumple tales propiedades se dice **inductivo.**

Los 10 axiomas antes mencionados permiten construir buena parte de la matemática, pero muchos resultados esenciales se quedan sin poder demostrar por la falta de un resultado que permita escoger un número infinito de términos rigurosamente.

Ejemplos básicos.

1. La frase "sea (a_n) sucesión real" es poco rigurosa! Requiere el acceso inmediato a infinitos números!

2. Más generalmente, la frase "sea $f : A \to B$ función", equivale a estar tomando un número tal vez no numerable de puntos en A y valores en B.

Ejemplo importante.

3. Dada una colección de conjuntos numerables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, su unión es numerable. En efecto, la clásica demostración consiste en enlistar (enumerar) los elementos de cada A_n :

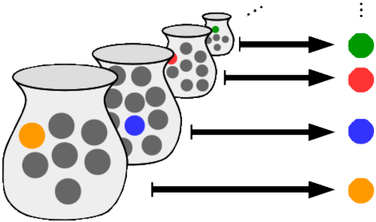
$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora, el recorrido clásico "diagonal" $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots$ es una enumeración de la unión de los A_n.

Sin embargo, para crear este conjunto **se tiene que escoger indefinidamente al menos un elemento de cada** A_n, tal proceso no se sabe si es riguroso!

Axioma XI (de Elección o de Zermelo). Dada una familia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto formado exactamente por un elemento de cada A_λ.

Existe un conjunto A formado por exactamente un elemento a_λ de cada A_λ.



Este axioma es controversial, por las impensadas consecuencias que posee en matemáticas. De él se deducen el Lema de Zorn, el Teorema de Tychonof, el teorema de Hahn-Banach, la existencia de ideal maximal en anillos, existencia de las bases de Hamel, etc.

Definición. Sea $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos, con Λ conjunto. Una **función de elección** es $f:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ tal que a cada $\lambda\in\Lambda$, le asocia $f(\lambda)\in A_\lambda$.

Proposición. El axioma de elección es equivalente a que toda familia de conjuntos no vacíos posee una función de elección. Notar que no se necesita que sean disjuntos!

Demostración. ($\Longleftarrow$) Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos disjuntos no vacíos, y f una función de elección asociada, entonces el conjunto formado por $\{f(\lambda)\ :\ \lambda\in\Lambda\}$ satisface el axioma de elección.

($\Longrightarrow$) El caso donde la familia está compuesta de conjuntos disjuntos queda de ejercicio.

Supongamos ahora que los A_λ **no son necesariamente disjuntos**. Consideremos $B_\lambda:=\{\lambda\}\times A_\lambda$, que es familia disjunta, porque si $A_\lambda\cap A_\mu\neq\emptyset$ para $\lambda\neq\mu$, entonces $(\{\lambda\}\times A_\lambda)\cap(\{\mu\}\times A_\mu)=\emptyset$.

Luego, por el caso anterior, se cumple que existe función de elección $g(\lambda)\in\{\lambda\}\times A_\lambda$ para cada λ.

Como $g(\lambda)=(\lambda,\tilde{g}(\lambda))$, $\tilde{g}(\lambda)$ es la función de elección pedida.

Teorema. Elección es equivalente a que el producto cartesiano de una familia de conjuntos no vacíos es no vacío.

Es decir, Elección $\iff$ para todo $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \neq \emptyset$ implica $\Pi_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.

Demostración. El producto cartesiano corresponde al conjunto de todas las funciones de elección $f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Como los A_λ son no vacíos, elección equivale a la existencia de una función de elección para esta familia, es decir, que el producto cartesiano es no vacío.

Pregunta muy importante. Son los axiomas I-XI **consistentes**? (es decir, no se producen absurdos). Son **independientes** entre ellos?

La respuesta a estas preguntas están aún sin resolver completamente.

Consistencia. Aún no se resuelve completamente. Sin embargo, para ZF Gödel probó en su famoso **teorema de incompletitud** que los axiomas anteriores, por si mismos, no pueden probar la consistencia o no del mismo. Además, hay **teoremas indemostrables**!

Ver por ejemplo `https://www.youtube.com/watch?v=O4ndIDcDSGc`.

Es decir, para probar consistencia, se necesita "salir a un conjunto axiomático más grande".

Independencia. Gödel y Cohen probaron para ZF la independencia del Axioma XI de Elección de los otros diez axiomas: es decir, asumiendo la consistencia de los diez primeros, elección no se deduce de ellos, y también la negación de elección tampoco se deduce de ellos.

Consideraciones finales e históricas.

Ejemplo. El propósito es entender de manera simple el significado de los términos **consistencia e independencia** para un sistema axiomático.

Definamos la teoría axiomática siguiente:

- Objetos no definidos: *líneas, puntos.*
- Relación binaria no definida: *incidencia*.

Los axiomas que estudiaremos son los siguientes:

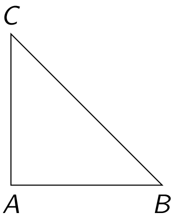
1. **Axioma I.** *Dos puntos diferentes* P, Q *inciden sobre una única linea* L*.*
2. **Axioma II.** *Sobre una línea* L *inciden al menos dos puntos diferentes* P, Q*.*
3. **Axioma III.** *Existen tres puntos diferentes* P, Q, R *con la propiedad que ninguna línea* L *es incidida por los tres.*

Un **modelo** $\mathscr{M}$ es una interpretación de los axiomas I-II-III arriba expuestos para el cual se satisfacen los tres axiomas.

Estas interpretaciones aparecen pues los objetos y relaciones no están definidas a priori.

Sea $\mathscr{M}_1$ la siguiente *interpretación* de los axiomas I-II-III: en el cuadro teórico de $\mathbb{R}^2$,

- puntos: $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ y $C = (0,1)$.
- líneas: los segmentos (cerrados) AB, AC y BC.
- incidencia: un punto P incide en la línea L ssi P está en L.



Entonces el modelo $\mathscr{M}_1$ **satisface los axiomas I-II-III.** En efecto:

1. **Axioma I.** *Dos puntos dif. P, Q inciden sobre una única linea L.*
2. **Axioma II.** *Sobre una línea L inciden al menos dos puntos diferentes P, Q.*
3. **Axioma III.** *Existen tres puntos diferentes P, Q, R con la propiedad que ninguna línea L es incidida por los tres.*

Sea ahora $\mathscr{M}_2$ la siguiente interpretación de los axiomas I-II-III: en el cuadro teórico de $\mathbb{N}$,

- puntos: $2, 3, 5, 7$.
- líneas: $6, 10, 14, 15, 21, 35$.
- incidencia: un punto P incide en la línea L ssi P divide a L.

Entonces el modelo $\mathscr{M}_2$ **satisface los axiomas I-II-III.** En efecto:

1. **Axioma I.** *Dos puntos diferentes P, Q inciden sobre una única linea L."*
2. **Axioma II.** *Sobre una línea L inciden al menos dos puntos diferentes P, Q.*
3. **Axioma III.** *Existen tres puntos diferentes P, Q, R con la propiedad que ninguna línea L es incidida por los tres.*

Decimos ahora que dos líneas son **paralelas** si no existe punto P incidente a ambas.

Queremos ver si la siguiente proposición lógica es cierta en los modelos $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$:

$$(||) \quad \textit{Existen líneas paralelas.}$$

La frase anterior es falsa en $\mathscr{M}_1$, pero es cierta en $\mathscr{M}_2$! (Verificar!!!)

Una proposición lógica P se dice **independiente** de un conjunto axiomático A si ni ella ni su negación se pueden deducir como teoremas de A.

Dicho de otra forma, existen modelos diferentes $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$ de la teoría para los cuales P es cierta en uno, y falsa en otro.

La proposición lógica $(||)$ es pues independiente de los axiomas I-II-III.

Una teoría axiomática A se dice **consistente** si no existe proposición lógica P tal que A permite demostrar ambas P y $\sim P$.

Se puede probar que si existe un modelo $\mathscr{M}$ en A, entonces ésta es consistente en este modelo.

Próxima clase: Más consecuencias Fundamentales del Axioma de Elección.