MA3711-1 Optimización Matemática
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliares: Juan Pablo Sepúlveda
Felipe López

Auxiliar 8: Refrito aux 7 + Dualidad

3 de junio de 2022

P1. El dilema del ingeniero químico Un ingeniero químico ha creado un nuevo fertilizante que tiene muy buenos resultados en el crecimiento plantas y que necesita de sólo dos compuestos químicos para su producción. El ingeniero quiere aprovechar esta oportunidad y producir la máxima cantidad de fertilizante posible.

Para ello, su presupuesto es de \$2,000 USD, que se dispone a gastar totalmente en comprar los compuestos. Los costos por kilogramo de cada compuesto, digamos A y B, son \$1000 y \$2000 USD, respectivamente. Al mezclar los compuestos, la cantidad de fertilizante obtenida está dada por la fórmula

$$q = 4x_A + 2x_B - 2\theta x_A^2 - x_B^2 - x_A x_B$$

donde x_A y x_B corresponden a los kilogramos de A y B, respectivamente, y $\theta \in \mathbb{R}$ corresponde a un factor de pérdida de la máquina que sintetiza el fertilizante.

a) Plantee el problema que debe resolver el ingeniero y encuentre condiciones sobre θ para que el problema sea convexo.

b) Resuelva el problema del ingeniero, para todos los valores posibles de θ, usando condiciones de optimalidad (KKT, y CNSO/CSSO en caso de ser necesario). Justifique si los puntos encontrados son óptimos del problema.

c) ¿Cuánto fertilizante más puede generar el ingeniero si se consigue \$200 USD más para gastarlos en compuestos? De sus respuestas para $\theta = \frac{1}{16}$ y $\theta = \frac{1}{4}$.

P2. Un problema convexo donde Dualidad Fuerte falla. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & e^{-x} \\ \text{sa}\ & \frac{x^2}{y} \leq 0 \\ & y > 0 \end{aligned}$$

Muestre que el problema es convexo y que a pesar de esto , este problema tiene un salto de dualidad.

P3. Una aplicación más práctica de dualidad Considere el problema (P):

$$\begin{aligned} \min\ & f_0(x) \\ \text{sa}\ & g_i(x) \leq 0 \\ & h_j(x) = 0 \end{aligned}$$

Y su versión perturbada $(P)_{(u,v)}$:

$$\begin{aligned} \min\ & f_0(x) \\ \text{sa}\ & g_i(x) \leq u_i \\ & h_j(x) = v_j \end{aligned}$$

Con $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^p$. Muestre que, asumiendo dualidad fuerte para (P), se tiene que:

$$\text{Val}((P)_{(u,v)}) \geq \text{Val}(P) - \langle \mu^*, u \rangle - \langle \lambda^*, v \rangle$$

Con (μ^*, λ^*) solución del dual de (P)

Resumen

- **Teorema Fiacco-McCormick** Sea x_0 un mínimo local de (P_0) que satisface (IL), (CE) y $(CSSO)$ y sea (λ_0, μ_0) el único multiplicador de KKT asociado a x_0. Entonces, existen funciones diferenciables $x(t), \lambda(t), \mu(t)$ definidas en una vecindad de $t = 0$ tales que:

  a) $x(0) = x_0, \lambda(0) = \lambda_0, \mu(0) = \mu_0$
  b) $x(t), \lambda(t), \mu(t)$ es la única solución de $(KT)_t$ en una cierta vecindad de (x_0, λ_0, μ_0)
  c) $x(t)$ es un mínimo local estricto de (P_t)

  Y en este caso se tiene además que, si denotamos $V(t)$ como el valor de P en función de t, tenemos que:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(x^*, \mu^*, \lambda^*, 0)$$

  Lo cual permite aproximar las variaciones del valor óptimo en vecindades cercanas (en términos de t) a un óptimo anterior ocupando Taylor.

- **Condicion Necesaria de Segundo Orden (CNSO)** Sea x^* un mínimo local de un problema (P) tal que f es dos veces diferenciable en x^* y h y g son dos veces continuamente diferenciables en una vecindad de x^*. Supongamos además que se satisface la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz en x^*. Entonces existen multiplicadores μ, λ tales que:

$$\max_{\mu,\lambda} \qquad d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda) d \geq 0 \qquad \forall d \in C(x^*)$$

  Nota: La notación $C(x^*)$ hace referencia al *cono de direcciones críticas en x^**, dado por:

$$C(x^*) := \{d \in \mathbb{R}^m : \nabla g_i(x^*) \cdot d \leq 0 \quad \forall i \in I_0(x^*), \nabla h_j(x^*) \cdot d = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}, \nabla f(x^*) \cdot d \leq 0\}$$

- **Problema dual.** Definimos el dual Lagrangeano de (P) como el problema de optimización

$$\begin{aligned} \max\ & q(\mu, \lambda) \\ \text{sa}\ & \lambda \in \mathbb{R}^p \\ & \mu \in \mathbb{R}^m_+ \end{aligned}$$

  Donde

$$q(\mu, \lambda) = \inf\{L(x, \mu, \lambda) \mid x \in C\}$$

  Con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío.

- **Teorema: Dualidad débil** Sea $x \in C$, un punto factible del primal (P), y (μ, λ) un punto factible del dual (D). Entonces $f(x) \geq q(\mu, \lambda)$.

- **Teorema: Dualidad Fuerte general** Se tienen los siguientes corolarios del terorema de dualidad débil:

  1. $\text{val}(P) \geq \text{val}(D)$.
  2. Si $x \in C$, punto factible del primal (P), y (μ, λ) es un punto factible del dual (D), tales que $f(x) = q(\mu, \lambda)$, entonces ambos son soluciones de sus problemas respectivos, y se cumple que $\text{val}(P) = \text{val}(D)$.
  3. Si (P) es no acotado, entonces el dual (D) es infactible.
  4. Si (D) es no acotado, entonces el primal (P) es infactible

- **Teorema: Dualidad Fuerte (caso convexo).** Considere el problema (P) en su versión convexa (es decir, C es convexo, f y g_i son convexas, y h es lineal afín). Supongamos que se satisface la calificación de restricciones de Slater. Entonces, no hay salto de dualidad. Además, si $\text{val}(P)$ es finito, entonces el dual tiene soluciones.