MA3711-1 Optimización Matemática
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliares: Juan Pablo Sepúlveda
Felipe López

Auxiliar 7: Condiciones de segundo orden y Fiacco-McCormick

13 de mayo de 2022

P1. El dilema del ingeniero químico Un ingeniero químico ha creado un nuevo fertilizante que tiene muy buenos resultados en el crecimiento plantas y que necesita de sólo dos compuestos químicos para su producción. El ingeniero quiere aprovechar esta oportunidad y producir la máxima cantidad de fertilizante posible.

Para ello, su presupuesto es de \$2,000 USD, que se dispone a gastar totalmente en comprar los compuestos. Los costos por kilogramo de cada compuesto, digamos A y B, son \$1000 y \$2000 USD, respectivamente. Al mezclar los compuestos, la cantidad de fertilizante obtenida está dada por la fórmula

$$q = 4x_A + 2x_B - 2\theta x_A^2 - x_B^2 - x_A x_B$$

donde x_A y x_B corresponden a los kilogramos de A y B, respectivamente, y $\theta \in \mathbb{R}$ corresponde a un factor de pérdida de la máquina que sintetiza el fertilizante.

a) Plantee el problema que debe resolver el ingeniero y encuentre condiciones sobre θ para que el problema sea convexo.
b) Resuelva el problema del ingeniero, para todos los valores posibles de θ, usando condiciones de optimalidad (KKT, y CNSO/CSSO en caso de ser necesario). Justifique si los puntos encontrados son óptimos del problema.
c) ¿Cuánto fertilizante más puede generar el ingeniero si se consigue \$200 USD más para gastarlos en compuestos? De sus respuestas para $\theta = \frac{1}{16}$ y $\theta = \frac{1}{4}$.
d) **Propuesto.** Si tuviese la obligación de comprar al menos una unidad de B. ¿Hasta cuánto sería aceptable pagar por ella? **Hint:** usar Fiacco-McCormick para ver cuánto disminuye el valor objetivo al modificar convenientemente el problema usando un parámetro t.

P2. Fact-checking Frente a la baja del precio del barril de petroleo, muchos economistas han hablado el cómo será su variación en el futuro. Entre ellos destaca uno el cual llama a la tranquilidad pues, basado en sus avanzados estudios en economía, el mercado regulará el precio del barril de petroleo siguiendo sencillas reglas: siempre se mantiene menor al precio de las armas, la suma de sus precios siempre es mayor a \$2 USD, y por último, el mercado siempre busca minimizar el producto de ambos precios.

Este economista afirma haber demostrado la estabilidad para los precios basado en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. ¿Le deberíamos creer?

P3. Mentalidad de tiburón La utilidad dada por una acción en la bolsa depende de un índice x de volatilidad, que puede ser positivo o negativo, y del precio $y \geq 0$ que uno está dispuesto a pagar por una garantía o seguro. Dicha utilidad viene dada por la función $f(x, y) = x^3 - 3x - y$.

a) Modele el problema de maximizar la utilidad de la acción respetando la restricción de riesgo $x + y \leq 2$.
b) Establezca las condiciones de KKT y resuelva.
c) Use las condiciones de optimalidad de segundo orden para verificar si los puntos encontrados son soluciones del problema.
d) Estime directamente la nueva utilidad si se aumenta el riesgo de 2 a $2,05$

Resumen

- **Teorema Fiacco-McCormick** Sea x_0 un mínimo local de (P_0) que satisface (IL), (CE) y $(CSSO)$ y sea (λ_0, μ_0) el único multiplicador de KKT asociado a x_0. Entonces, existen funciones diferenciables $x(t), \lambda(t), \mu(t)$ definidas en una vecindad de $t = 0$ tales que:

  a) $x(0) = x_0, \lambda(0) = \lambda_0, \mu(0) = \mu_0$

  b) $x(t), \lambda(t), \mu(t)$ es la única solución de $(KT)_t$ en una cierta vecindad de (x_0, λ_0, μ_0)

  c) $x(t)$ es un mínimo local estricto de (P_t)

  Y en este caso se tiene además que, si denotamos $V(t)$ como el valor de P en función de t, tenemos que:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(x^*, \mu^*, \lambda^*, 0)$$

  Lo cual permite aproximar las variaciones del valor óptimo en vecindades cercanas (en términos de t) a un óptimo anterior ocupando Taylor.

- **Condiciones de optimalidad**

  - **Condición Necesaria de Primer Orden** Si definimos el cono normal a F en el punto x_0 como

$$N_F(x_0) := \{u \in I\mathbb{R}^n : u^T d \leq 0 \quad \forall d \in T_F(x_0)\}$$

    se tiene que si x_0 es mímimo local de P, entonces satisface $\nabla f(x_0) \in N_F(x_0)$.

  - **Condición Suficiente de Primer Orden** Sea $x_0 \in F$ un punto factible tal que:

$$\nabla f(x_0) \cdot d > 0 \quad \forall d \in T_F(x_0) \setminus \{0\}$$

    entonces x_0 es mínimo local **estricto** de P.

  - **Condicion Necesaria de Segundo Orden (CNSO)** Sea x^* un mínimo local de un problema (P) tal que f es dos veces diferenciable en x^* y h y g son dos veces continuamente diferenciables en una vecindad de x^*. Supongamos además que se satisface la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz en x^*. Entonces existen multiplicadores μ, λ tales que:

$$\max_{\mu,\lambda} \qquad d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda) d \geq 0 \qquad \forall d \in C(x^*)$$

  - **Condicion suficiente de segundo orden (CSSO)**. Sea $x^* \in F$ tal que f, h y g son dos veces diferenciables en x^*. Supongamos además que x cumple la (CR) y que se satisface que:

$$\max_{\mu,\lambda} \qquad d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda) d > 0 \qquad \forall d \in C(x^*)$$

    Entonces x es un mínimo local aislado de (P)

    Nota: Cuando tenemos (IL), no es necesario tomar máximo, pues μ, λ son únicos.

    Nota: La notación $C(x^*)$ hace referencia al *cono de direcciones críticas en* x^*, dado por:

$$C(x^*) := \{d \in \mathbb{R}^m : \nabla g_i(x^*) \cdot d \leq 0 \quad \forall i \in I_0(x^*), \nabla h_j(x^*) \cdot d = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}, \nabla f(x^*) \cdot d \leq 0\}$$