MA3711-1 Optimización Matemática
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliares: Juan Pablo Sepúlveda
Felipe López

Auxiliar 5: Más uso de KKT

29 de abril de 2022

P0. Hablar del control

P1. Modelo uno, rótate Un mechón del DIM, luego de sus clases, llega a su casa a desarrollar un ejercicio bonus de su ramo favorito. El profesor del ramo tiene gustos "particulares" en lo que a evaluaciones concierne, por lo que decide implementar un nuevo sistema de calificaciones dado por las siguientes reglas:

(i) El bonus consiste en dos preguntas, cada una con un puntaje no negativo que, por sí solo, no tiene cota superior.

(ii) La suma entre el cuadrado del puntaje de la P1 y el puntaje de la P2 no puede ser mayor a 2

(iii) El producto entre ambos puntajes será lo que se agrega de bonus para la nota del control.

Con estas extravagantes ideas en mente, y pensando en que queremos que el bonus sea lo máximo posible:

a) Modele el problema planteado como un problema de optimización.

b) Bosqueje el conjunto factible del problema.

c) Busque alguna caracterización de restricciones que se cumpla.

d) Encuentre la distribución óptima de puntajes, y el correspondiente bonus asociado.

P2. Se ve feo, pero es feísimo Dado $u \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar un $x \in \mathbb{R}^n$ que verifique $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ y que su distancia euclidiana a u sea la menor posible.

a) Formalice el problema como uno de minimización convexa y explique por qué este problema tiene solución (**Hint:** utilice un viejo enemigo relacionado a normas al cuadrado).

b) Utilizando KKT, pruebe que el óptimo $\overline{x}$ satisface:

I.- $\sum_{i=1}^{j}(u_i - \overline{x}_i) \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$

II.- $\left[\sum_{i=1}^{j}(u_i - \overline{x}_i)\right](\overline{x}_j - \overline{x}_{j+1}) = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$

III.- $\sum_{i=1}^{n} u_i - \overline{x}_i = 0$

IV.- $(u_n - \overline{x}_n)(\overline{x}_{n-1} - \overline{x}_n) = 0$

Resumen

- **Cono de direcciones críticas.** Sea $x \in C$. Definimos el *cono de direcciones críticas* de C en x como:

$$C(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^m : \nabla g_i(x)^T d \leq 0 \quad \forall i \in I_0(x), \nabla h_j(x)^T d = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., p\}, \nabla f(x)^T d \leq 0 \right\}$$

- **Casos clásicos donde se cumple** (CR) **(**$T_F(x_0) = L_F(x_0)$**):**

  (i) **Condiciones de Independencia Lineal (IL)** Se dice que un problema como los descritos anteriormente cumple la *condición de independencia lineal (IL)* si:

$$\{\nabla h_j(x)\}_{j \in J} \cup \{\nabla g_i(x)\}_{i \in I(x)}$$

  Es un conjunto linealmente independiente.

  (ii) **Condiciones de Slater (SL)** Similarmente, un problema cumple la *condición de Slater (SL)* si:
  Si el dominio D es convexo, g_i son funciones convexas y h es una función lineal afín de R^n en R^p, y:

$$\exists \overline{x} \in D \qquad g_i(\overline{x}) < 0, \forall i \in \{1, ..., m\}, h_j(\overline{x}) = 0, \forall j \in \{1, ..., p\}.$$

  iii) **Condiciones de Mangasarian-Fromovitz** Sea $x \in C$. Diremos que x satisface la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz (MF) en x si:
    - El conjunto $\{\nabla h_j(x) \mid \quad j \in \{1, \ldots, p\}\}$ es l.i.
    - Existe $d \neq 0$ tal que $\nabla g_i(x)^T d < 0, \forall i \in I_0(x) \quad \wedge \quad \nabla h_j(x)^T d = 0, \forall j \in \{1, \ldots, p\}$

  Notar que, si se cumple al menos una de estas condiciones, es posible aplicar el teorema de KKT.

- **Teorema de KKT.** Sea x_0 un mínimo local para el problema (P) tal que cumple (CR), es decir, $T_F(x_0) = L_F(x_0)$, entonces existen multiplicadores $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ y $\mu = (\mu_1, ..., \mu_q)$ tales que:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x_0, \lambda, \mu) & = 0 \\ \lambda_i g_i(x_0) & = 0 \\ h_j(x_0) & = 0 \\ g_i & \leq 0 \\ \lambda_i & \geq 0 \end{cases}$$

- **Condicion Necesaria de Segundo Orden (CNSO)** Sea x^* un mínimo local de un problema (P) tal que f es dos veces diferenciable en x^* y h y g son dos veces continuamente diferenciables en una vecindad de x^*. Supongamos además que se satisface la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz en x^*. Entonces existen multiplicadores μ, λ tales que:

$$\max_{\mu, \lambda} \qquad d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda) d \geq 0 \qquad \forall d \in C(x^*)$$

- **Condicion suficiente de segundo orden (CSSO)**. Sea $x^* \in F$ tal que f, h y g son dos veces diferenciables en x^*. Supongamos además que x cumple la (CR) y que se satisface que:

$$\max_{\mu, \lambda} \qquad d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda) d > 0 \qquad \forall d \in C(x^*)$$

  Entonces x es un mínimo local aislado de (P)

  Nota: Cuando tenemos (IL), no es necesario tomar máximo, pues μ, λ son únicos.