MA3711-1 Optimización Matemática
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliares: Juan Pablo Sepúlveda
Felipe López

Auxiliar 3: Uso de KKT

15 de abril de 2022

P1. Vamos con teoría. Demuestre el teorema de caracterización del cono tangente, caso convexo:

Si F es convexo, y $x_0 \in F$, entonces se tiene que:

$$T_F(x_0) = \{\lambda(x - x_0) : \lambda \geq 0, x \in F\} = \overline{\mathit{aff}(F)}.$$

P2. Hora de optimizar. Javiercito, hijo de un connotado profesor del DIM, tiene que planear cómo distribuir sus tiempos de fiesta y estudio, ya que se viene fuerte su semestre. Preocupado por su situación, le pide consejos a su padre, quien le dice: Javiercito, la clave para mantener un balance exitoso entre fiesta y estudio es el siguiente. Sólo necesitas saber que:

- Debes estudiar al menos el cubo de las horas que vas de fiesta.
- Entre ambas actividades debes sumar 12 horas, para que tengas 12 para descansar y tener otros intereses.
- Estudiar h horas te quita h unidades de felicidad, mientras que h horas de fiesta te dan h^2 unidades de felicidad, y siempre debes buscar que tu felicidad sea máxima

Javier, perplejo, decide tomar el consejo de su padre al pie de la letra, y así aprovecha de estudiar optimización.

a) Modele el problema planteado como un problema de optimización en su forma estándar.

b) Bosqueje el conjunto factible del problema.

c) Muestre que se cumple (SL) y caracterice los puntos donde se satisface (IL). Discuta si con esto basta para resolver el problema de Javier a mano.

Resumen

- **CNPO, versión alternativa.** Si definimos el cono normal a F en el punto x_0 como

$$N_F(x0) := \{u \in I\mathbb{R}^n : u^T d \leq 0 \quad \forall d \in T_F(x_0)\}$$

entonces la (CN) se puede escribir $\nabla f(x0) \in N_F(x_0)$.

- **Caracterización de cono tangente (caso convexo).** Si F es convexo, y $x_0 \in F$, entonces se tiene que:

$$T_F(x_0) = \{\lambda(x - x_0) : \lambda \geq 0, x \in F\} = \overline{aff(F)}.$$

- **Caracterización de cono tangente (caso poliedral).** Sea F un poliedro finito, dado por $\{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$, con A una matriz y b un vector, entonces tenemos que, si para un conjunto finito de índices J, $(Ax)_j = b_j \quad \forall j \in J$:

$$T_F(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (Ax)_j \leq b_j \quad \forall j \in J\}.$$

Es decir, que basta considerar la intersección de los semiplanos dados por las restricciones *activas* (o que se cumplen con igualdad) en x_0

- **Cono linealizado.** Consideremos el caso en que el conjunto factible F está dado por un conjunto finito de igualdades y desigualdades:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in I; \quad h_j(x) = 0 \quad \forall j \in J\}$$

Definimos el *cono linealizante* de F en x_0 mediante:

$$L_F(x_0) := \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i^T(x_0)d \geq 0 \quad \forall i \in I(x_0); \nabla h_j(x_0)^T d = 0 \quad \forall j \in J\}$$

Donde $I(x) := i \in I : g_i(x) = 0$ es el conjunto de índices de las *restricciones activas* en x_0

- **Teorema de KKT.** Sea x_0 un mínimo local para el problema (P) tal que $T_F(x_0) = L_F(x_0)$, entonces existen multiplicadores $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ y $\mu = (\mu_1, ..., \mu_q)$ tales que:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x_0, \lambda, \mu) & = 0 \\ \lambda_i g_i(x_0) & = 0 \\ h_j(x_0) & = 0 \\ g_i & \leq 0 \\ \lambda_i & \geq 0 \end{cases}$$

- **Casos clásicos donde $T_F(x_0) = L_F(x_0)$:**

  (i) **Condiciones de Independencia Lineal (IL)** Se dice que un problema como los descritos anteriormente cumple la *condición de independencia lineal (IL)* si:

  $$\{\nabla h_j(x)\}_{j \in J} \cup \{\nabla g_i(x)\}_{i \in I(x)}$$

  Es un conjunto linealmente independiente.

  (ii) **Condiciones de Slater (SL)** Similarmente, un problema cumple la *condición de Slater (SL)* si: Si el dominio D es convexo, g_i son funciones convexas y h es una función lineal afín de R^n en R^p, y:

  $$\exists \overline{x} \in D \qquad g_i(\overline{x}) < 0, \forall i \in \{1, ..., m\}, h_j(\overline{x}) = 0, \forall j \in \{1, ..., p\}.$$

Notar que, si se cumple al menos una de estas condiciones, es posible aplicar el teorema de KKT.