MA3711-1 Optimización Matemática
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliares: Juan Pablo Sepúlveda
Felipe López

Auxiliar 1: Condiciones básicas de optimalidad

30 de marzo de 2022

Resumen

- **Función s.c.i:** Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dirá semi-continua inferior (s.c.i.) en x_0 si para toda sucesión $x_k \to x_0$ tal que $f(x_k)$ es convergente, se tiene:

$$\lim f(x_k) \geq f(x_0).$$

Equivalentemente, f es s.c.i. en x_0 si para todo $\lambda < f(x_0)$ existe una vecindad $B(x_0, \delta)$ tal que

$$\lambda < f(x) \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$$

- **Cono tangente** Se define el cono tangente al conjunto F en el punto x_0 como:

$$T_F(x_0) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \to 0^+, d_k \to d \mid x_0 + t_k d_k \in F \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

- **Función coerciva:** Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dirá coerciva si:

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = \infty$$

- **Teoremas de existencia de mínimos**
  - Toda función semi-continua inferior definida sobre un compacto alcanza su mínimo. En particular, esto también se cumple para funciones continuas, pues f continua $\implies$ f sci.
  - Toda función continua coerciva alcanza su mínimo global.
  - Si x_0 es un mínimo local de (P) entonces se satisface la condición necesaria de primer orden (CNPO):

$$\nabla f(x_0) d = 0 \quad \forall d \in T_F(x_0).$$

Recíprocamente, si $x_0 \in F$ (punto factible) y cumple la condición suficiente de primer orden (CSPO):

$$\nabla f(x_0) d > 0 \quad \forall d \in T_F(x_0) \setminus 0$$

entonces x_0 es un mínimo local estricto de P.

P1. Calentando motores.

a) Muestre que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + -x + sen(y) + cos(z)$$

Tiene mínimos globales en $\mathbb{R}^n$, y encuéntrelos.

b) Muestre que la función:

$$f(x) = \begin{cases} -\text{sen}(\frac{1}{x}) - x^2 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

Tiene al menos un mínimo local en el intervalo $[-1, 1]$

P2. Cono, pero no de helado. Calcule los siguientes conos tangentes:

a) Para el poliedro:

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ Ax \leq b\}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

en los puntos $(3, 2)$ y $(2, 1)$

b) Calcule el cono tangente a $B(0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ en $(0, 1)$ y $(0, 0)$