MA3701-1 Optimización
Profesor: Vicente Acuña
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 11: Repaso materia anterior

17 de junio de 2022

P1. Transportando anto. Un distribuidor de computadores tiene 2 bodegas con ofertas diarias de 50 cada una, y demandas diarias en 4 ciudades de 20, 20, 30 y 30 unidades, respectivamente. Sus costos por unidad enviada se resumen en la siguiente tabla:

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4
Bodega 1	1	2	4	3
Bodega 2	5	4	6	4

a) Modele el problema de satisfacer la oferta del distribuidor a costo mínimo como un problema de transporte.

b) Encuentre una solución básica factible del problema anterior usando saturación a costo mínimo. Justifique que la asignación de flujos obtenida corresponde a una solución básica factible.

c) Verifique si esta asignación es óptima, en caso negativo, aplique el algoritmo Simplex en redes para obtener una solución óptima del problema.

P2. Aplicando todo. Para un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la función:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + \alpha x_1 \cdot x_2 + x_1 - x_2.$$

a) Demuestre que f_α es una función convexa si y solo si $\alpha \in [-4, 4]$.

b) Sea $\alpha \in [-4, 4]$. Considere el siguiente problema de optimización.

$$\begin{aligned} \min\ & f_\alpha(x_1, x_2) \\ \text{sa}\ & x_1 + x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema usando el resultado de búsqueda de mínimos que estime conveniente.

Resumen

Considere el problema (P) dado por:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{sa}\ & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \\ & h_j(x) = 0, \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Donde diremos: $I := 1, \ldots, m$ y $J := 1, \ldots, p$

- **Condiciones de necesarias optimalidad de primer orden generales (KKT):** Sea x_0 un mínimo local para el problema (P) tal que cumple (IL), entonces existen multiplicadores $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ (uno por cada resticcion de igualdad) y $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$ (uno por cada desigualdad) tales que:

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x_0, \lambda, \mu) & = 0 \\ \mu_i g_i(x_0) & = 0 \\ h_j(x_0) & = 0 \\ g_i(x_0) & \leq 0 \\ \mu_i & \geq 0 \end{cases}$$

Con:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot h_j(x)$$

Donde se dice que punto x cumple la *condición de independencia lineal (IL)* si:

$$\{\nabla h_j(x)\}_{j \in J} \cup \{\nabla g_i(x)\}_{i \in I(x)}$$

Es un conjunto linealmente independiente. (Y donde $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$.).

En el caso donde no hay restricciones, esto se reduce al ya clásico caso de $\nabla f(x_0) = 0$.

- **Condiciones suficientes de optimalidad. Caso sin restricciones.** Sea $f \in \mathcal{C}^2(S)$ donde S es un abierto. Si $x_0 \in S$ cumple:

  i.- $\nabla f(x_0) = 0$

  ii.- El Hessiano $H(x_0)$ es definido positivo.

  Entonces, x_0 es un mínimo local estricto de f en S.

  Nota: Si el Hessiano es, por otro lado, def. negativo, el punto será un máximo local estricto. Si no es ninguno de las dos, será un punto silla. Si es cero, no nos da nada de información.