SOLUCIÓN EXAMEN

1. Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta $f(x, y) = Kx(y - x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}$, donde $c > 0$ es una constante apropiada.

a) (2 pts.) Calcule K .

Sol: Para obtener K imponemos la condición $\int \int f(x, y) dx dy = 1$. Tenemos entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = K \int_0^{\infty} \int_0^y x(y - x)e^{-y} dx dy = K \int_0^{\infty} \frac{y^3}{6} e^{-y} dy = K,$$

de donde se concluye que $K = 1$.

b) (2 pts.) Muestre que

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{6x(y - x)}{y^3} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}},$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (y - x)e^{-(y-x)} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}.$$

Sol: Para calcular las densidades condicionales necesitamos las marginales de X y de Y . Tenemos

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x(y - x)e^{-y} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}} dy = xe^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}},$$

y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(y - x)e^{-y} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}} dy = \frac{y^3}{6} e^{-y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}},$$

de donde obtenemos

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x(y - x)e^{-y} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}}{\frac{y^3}{6} e^{-y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}}} = \frac{6x(y - x)}{y^3} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}},$$

y

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x(y - x)e^{-y} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}}{xe^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}} = (y - x)e^{-(y-x)} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}.$$

c) (2 pts.) Deduzca de lo anterior que $\mathbb{E}(X|Y = y) = y/2$, $\mathbb{E}(Y|X = x) = x + 2$.

Sol: Usando las densidades condicionales calculadas en el apartado anterior, obtenemos

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^y \frac{6x^2(y - x)}{y^3} dx = \frac{y}{2}.$$

Análogamente,

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_x^{\infty} y(y - x)e^{-(y-x)} dy = x + 2.$$

2. Una empresa de catering ofrece bebidas a los 1250 asistentes a un evento social. Se sabe que cada persona decide independientemente de las demás el número de bebidas que consumirá, el cual se puede modelar como una va discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, con probabilidades respectivas $p_0 = 0.1, p_1 = 0.6, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$. La empresa debe encargar previamente el número total de bebidas a un proveedor, siendo muy importante que nadie se quede sin las bebidas que quiere pero al mismo tiempo, intentando que no sobren, porque eso generaría pérdidas.

a) (2 pts.) Calcule la esperanza y la varianza de la v.a. M definida como el número total de bebidas consumidas en el evento.

Sol: Sea $n = 1250$ y designamos por $X_i, i = 1, \dots, n$ las v.a. independientes que representan los consumos individuales. Entonces

$$\mathbb{E}(X_i) = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0.6 + 0.4 + 0.3 = 1.3$$

y

$$\mathbb{E}(X_i^2) = 0^2p_0 + 1^2p_1 + 2^2p_2 + 3^2p_3 = 0.6 + 0.8 + 0.9 = 2.3,$$

de donde obtenemos

$$\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = 2.3 - (1.3)^2 = 0.61.$$

Por otra parte, es claro que $M = \sum_{i=1}^n X_i$, de donde se concluye que

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = 1.3n = 1625.$$

Por otra parte, gracias a la independencia de las X_i resulta

$$\text{Var}(M) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = 0.61n = 762.5.$$

Además,

$$\sqrt{\text{Var}(M)} = \sqrt{762.5} = 27.61.$$

b) (2 pts.) Muestre, usando el TCL, que la función de distribución $F_M(x)$ de la va M es aproximadamente $\Phi\left(\frac{x-1625}{27.61}\right)$, donde Φ es la función de distribución de la v.a. normal $N(0, 1)$.

Sol: Sabiendo que M es una suma de 1250 v.a. independientes X_i , podemos aplicar el TCL en los siguientes términos:

$$F_M(x) = \mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{M - \mathbb{E}(M)}{\sqrt{\text{Var}(M)}} \leq \frac{x - \mathbb{E}(M)}{\sqrt{\text{Var}(M)}}\right) \sim \Phi\left(\frac{x - \mathbb{E}(M)}{\sqrt{\text{Var}(M)}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 1250}{27.61}\right).$$

c) (2 pts.) Use el resultado de la parte (b) para calcular aproximadamente el número N de bebidas que debe encargar al proveedor, de manera que la probabilidad de que todos queden satisfechos sea superior a 0.99. Expresé su resultado en términos de Φ o su inversa.

Sol: Sea N el número de bebidas que se encargan al proveedor. Entonces, todos quedan satisfechos si se cumple la condición $M \leq N$. Se pide ajustar N de manera que la condición se cumpla con probabilidad al menos 0.99. Es decir, debe ocurrir que $\mathbb{P}(M \leq N) \geq 0.99$, de donde se despeja N .

Usando el resultado del apartado (b), tenemos

$$\mathbb{P}(M \leq N) \sim \Phi\left(\frac{N - 1250}{27.61}\right) \geq 0.99,$$

o bien, despejando N ,

$$N \geq 1250 + 27.61\Phi^{-1}(0.99) = 1250 + 27.61 \cdot 2.326 = 1314.22.$$

Entonces se cumple la condición de satisfacción si se encargan al menos 1315 bebidas.

Hint: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \in \mathbb{R}.$

3. Suponga que una moneda es tal que su probabilidad de cara se escoge al azar en el intervalo $[0, 1]$. Luego se realiza una serie (infinita) de lanzamientos independientes.

a) (3 pts.) Sea $n \in \mathbb{N}$ y X la v.a. definida como la cantidad de caras obtenidas en los primeros n lanzamientos. Muestre que $p_X(k) = \frac{1}{n+1}$, para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, y calcule $\mathbb{E}(X)$.

Sol: Sea Y la v.a. que corresponde a la probabilidad de cara de la moneda que, según el enunciado, es uniforme en intervalo $[0, 1]$, con densidad $f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y)$. Entonces X , condicional en $Y = y$ es binomial con parámetros n, y , es decir,

$$p_{X|Y}(k|y) = \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Por otra parte, usando las fórmulas conocidas, se puede calcular la marginal de X como

$$p_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y}(k|y) f_Y(y) dy = \binom{n}{k} \int_0^1 y^k (1-y)^{n-k} dy = \binom{n}{k} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{n+1}.$$

Para calcular la esperanza usamos el resultado anterior y obtenemos

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k p_X(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}.$$

También es posible calcular alternativamente la esperanza, sabiendo que $\mathbb{E}(X|Y = y) = ny$. Es decir,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \mathbb{E}(X|Y = y) f_Y(y) dy = \int_0^1 ny dy = \frac{n}{2}.$$

b) (3 pts.) Sea Z la v.a. definida como el número del lanzamiento en el que sale cara por primera vez. Muestre que $p_Z(n) = \frac{1}{n(n+1)}$, para $n \in \mathbb{N}$, y calcule $\mathbb{E}(Z)$.

Sol: Es claro del enunciado que Z condicional en $Y = y$ es v.a. geométrica de parámetro y . Es decir,

$$p_{Z|Y}(n|y) = (1-y)^{n-1} y, n \in \mathbb{N}.$$

Procediendo como en el apartado anterior calculamos

$$p_Z(n) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Z|Y}(n|y) f_Y(y) dy = \int_0^1 (1-y)^{n-1} y dy = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2)}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_Z(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Hint: Puede ser útil saber que $\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, donde $\Gamma(n) = (n-1)!$, para $n \in \mathbb{N}$.