FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA3403, Secc. 04, 13/06/22
Prof. R. Gouet, Prof. Aux. V. Salinas

Solución Control #3

1. Una máquina automática expendedora de jugo de fruta tiene una cantidad aleatoria Y_2 de jugo en existencia al principio de un día determinado y dosifica una cantidad aleatoria Y_1 durante el día (con cantidades expresadas en galones). La máquina no se reabastece durante el día y, en consecuencia, $Y_1 \leq Y_2$. Además, se ha observado que (Y_1, Y_2) tiene densidad de probabilidad dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) (2 pts.) Compruebe que $C = 0{,}5$.
Solución: Para determinar la constante C imponemos la condición de que la densidad integre a 1. Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1dy_2 = C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0\leq y_1\leq y_2\leq 2\}}dy_1dy_2 = C\int_{0}^{2}\int_{y_1}^{2} dy_2dy_1 = 2C = 1,$$

de donde se concluye que $C = 1/2$.

b) (2 pts.) Calcule las marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$ e indique si Y_1 e Y_2 son independientes.
Solución: La densidad marginal de Y_1 se obtiene del cálculo de la siguiente integral:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0\leq y_1\leq y_2\leq 2\}}dy_2 = \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{\{0\leq y_1\leq 2\}}\int_{y_1}^{2} dy_2 = \tfrac{2-y_1}{2}\mathbf{1}_{\{0\leq y_1\leq 2\}}.$$

Análogamente, para Y_2 tenemos

$$f_{Y_1}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0\leq y_1\leq y_2\leq 2\}}dy_1 = \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{\{0\leq y_2\leq 2\}}\int_{0}^{y_2} dy_2 = \tfrac{y_2}{2}\mathbf{1}_{\{0\leq y_2\leq 2\}}.$$

Se observa de inmediato que $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) \neq f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$, de donde se concluye que Y_1 e Y_2 son v.a. dependientes.

c) (2 pts.) Calcule la esperanza $\mathbb{E}(Y_2 - Y_1)$.
Solución: De acuerdo con la definición y propiedad de linealidad de la esperanza, tenemos

$$\mathbb{E}(Y_2 - Y_1) = \mathbb{E}(Y_2) - \mathbb{E}(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} y_2 f_{Y_2}(y_2)dy_2 - \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f_{Y_1}(y_1)dy_1$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{y_2^2}{2}dy_2 - \int_{0}^{2} \frac{y_1(2-y_1)}{2}dy_1 = \frac{8}{6} - \frac{4}{2} + \frac{8}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. Sean X, Y variables aleatorias independientes normales $N(0,1)$. Use el método de cambio de variable con jacobiano para calcular la densidad de $Z = \frac{X-Y}{X+Y}$.

Solución: Para aplicar el método del jacobiano debemos definir una transformación g, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que cumpla las condiciones del teorema. Sea $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, donde

$$g_1(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad g_2(x,y) = x+y.$$

Para chequear la aplicabilidad del teorema calculamos el determinante del jacobiano, es decir, determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2y}{(x+y)^2} & \frac{-2x}{(x+y)^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que resulta ser $\delta(x,y) := \frac{2}{x+y}$. Ahora definimos el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ donde se cumple las hipótesis. Notamos primero que g y δ se indefinen en el conjunto $S = \{(x,y) | x+y=0\}$. Por lo tanto, preliminarmente podemos considerar el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus S$, donde g está bien definida, $\delta \neq 0$ y vemos que $\mathbb{P}((X,Y) \in U) = 1$.

Paga calcular la inversa g^{-1} debemos resolver el sistema $g_1(x,y) = z, g_2(x,y) = u$. Es fácil ver que $uv = x - y$, de donde se obtiene que $uz + u = x - y + x + y = 2x$ y concluimos que

$$x = \frac{uz+u}{2}, \quad y = u - \frac{uz+u}{2}.$$

Es decir,

$$g^{-1}(z,u) = \left(\frac{uz+u}{2}, u - \frac{uz+u}{2}\right).$$

En vista de lo anterior, podemos definir el vector aleatorio $(Z,U) = g(X,Y)$, que tiene densidad (de acuerdo con la fórmula del apunte) dada por

$$f_{Z,U}(z,u) = \frac{f_{X,Y}(g^{-1}(z,u))}{|\delta(g^{-1}(z,u))|} = \frac{|u|}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{uz+u}{2}\right)^2 + \left(u - \frac{uz+u}{2}\right)^2\right]} = \frac{|u|}{4\pi} e^{-\frac{u^2}{4}[z^2+1]}, \; z, u \in \mathbb{R}.$$

Para terminar debemos calcular la marginal de Z como

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,U}(z,u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|}{4\pi} e^{-\frac{u^2}{4}[z^2+1]} du = \int_{0}^{\infty} \frac{u}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}[z^2+1]} du = \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2+1}, \; z \in \mathbb{R}.$$

3. Cuando la corriente I (medida en amperes) fluye a través de una resistencia R (medida en Ohms) la potencia generada está dada por $W = I^2 R$ (medida en watts). Suponga que el vector aleatorio (I,R) tiene densidad

$$f_{(I,R)}(i,r) = \begin{cases} 6i(1-i) \cdot 2r & \text{si } (i,r) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) (4 pts.) Determinar la función de densidad de W.

Solución: Una primera idea para calcular f_W es calcular previamente F_W y luego derivar. Notamos primero que W toma valores en $[0,1]$ y, por lo tanto, $F_W(w) = 0$, para $w < 0$, y $F_W(w) = 1$, para $w > 1$. Esto significa que los valores "interesantes" son los $F_W(w)$, para $w \in [0,1]$. Notemos que, para $w \in [0,1]$,

$$F_W(w) = \mathbb{P}(I^2 R \leq w) = \mathbb{P}((I,R) \in B) = \int_B f_{(I,R)}(i,r) didr,$$

donde $B = \{(i, r) \in [0, 1]^2 | i^2 r \leq w\}$. Por lo tanto,

$$F_W(w) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{w/r}} f_{(I,R)}(i, r) didr = \int_0^w \int_0^1 6i(1-i)2rdidr + \int_w^1 \int_0^{\sqrt{w/r}} 6i(1-i)2rdidr$$

$$= w^2 + 2\int_w^1 \frac{w}{r}\left(3 - 2\sqrt{\frac{w}{r}}\right) rdr = 3w^2 - 8w^{3/2} + 6w.$$

Derivando la distribución obtenida arriba, llegamos a la densidad:

$$f_W(w) = 6w - 12\sqrt{w} + 6 = 6(\sqrt{w} - 1)^2,\ w \in [0, 1].$$

Como alternativa para calcular la densidad podemos usar el método del jacobiano. Consideramos la función $g(i, r) = (i^2 r, r)$, que está bien definida en $[0, 1]^2$ y cuya inversa obtenemos resolviendo el sistema $i^2 r = w, r = v$, de donde llegamos a

$$g^{-1}(w, v) = \left(\sqrt{\frac{w}{v}}, \quad v\right).$$

Notamos arriba que hay un problema con la inversa porque $g(i, 0) = (0, 0)$, $\forall i \in [0, 1]$, de manera que no existe $g^{-1}(0, 0)$. Esto se resuelve sacando la recta $\{(i, r) \in [0, 1]^2 | r = 0\}$ del dominio. En vista de lo anterior, definiremos el abierto U como $U = (0, 1)^2$, notando de paso que $\mathbb{P}((I, R) \in U) = 1$.

Calculamos la matriz de las derivadas parciales, obteniendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial i} & \frac{\partial g_1}{\partial r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial i} & \frac{\partial g_2}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ir & i^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante, $\delta(i, r) = 2ir$, no se anula en U. Luego, de la fórmula de cambio de variables, con $(W, V) = g(I, R)$, obtenemos

$$f_{W,V}(w, v) = \frac{12ri(1-i)}{2ir} = 6\left(1 - \sqrt{\frac{w}{v}}\right),\ 0 \leq w \leq v \leq 1.$$

Finalmente, calculamos la marginal de W integrando la densidad conjunta. Para $w \in [0, 1]$ tenemos

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,V}(w, v)dv = \int_w^1 6\left(1 - \sqrt{\tfrac{w}{v}}\right) dv = 6w - 12\sqrt{w} + 6.$$

b) (2 pts.) Calcular (de existir) $\mathbb{E}(W)$.

Solución: La esperanza se puede obtener sin calcular previamente la densidad de W, considerando que W es una función $g(I, R) = I^2 R$. Entonces

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(g(I, R)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(i, r) f_{(I,R)}(i, r) didr$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 i^2 r 6i(1-i)2rdidr = 4\int_0^1 i^3(1-i)di \int_0^1 3r^2 dr = \frac{1}{5}.$$

Por supuesto, también se puede calcular como

$$\mathbb{E}(W) = \int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w)dw = \int_0^1 6w(\sqrt{w} - 1)^2 dw = \frac{1}{5}.$$