MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 24 de junio de 2022

Auxiliar 13

P1. Sea (X, Y) un vector aleatoria con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}$$

a) Calcule $P(X > 2|Y < 4)$ y $P(X > 2|Y = 4)$

b) Para $y > 0$, Calcule $E(X|Y = y)$ ¿Son X e Y independientes?

P2. Se obtienen dos mediciones independientes de una cantidad μ. Estas mediciones se modelan como dos v.a. X e Y normales con la misma esperanza: $E[X] = E[Y] = \mu$, pero distinta varianza:$Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$. Si se combinan ambas mediciones para obtener un promedio ponderado de la medición a través de la nueva v.a. $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$, con $\alpha \in [0, 1]$:

a) Muestre que E[Z] = µ.

b) Calcule $Var(Z)$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza del promedio ponderado, en función de σ_X^2 y σ_Y^2.

P3. Un restaurante puede servir 80 comidas por noche, y sólo acepta clientes con reservación. La experiencia Muestra que 20 % de los clientes que reservan no vienen.

Asumiendo que los clientes reservan y comen de manera independiente ¿Cuál es la máxima cantidad de reservaciones que puede aceptar el restaurante para que la probabilidad de poder servir a todos los clientes que vendrán sea mayor o igual a 0,9772?

Hint: Si Z distribuye como una normal estándar, entonces $\mathbb{P}(Z > 2) = 0{,}0228$

P4. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

a) De una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.

b) Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

c) Asumiendo que los puntajes de los alumnos son independientes entre ellos ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99 %, el promedio de notas esté entre 70 y 80?

Proposición 1 (Desigualdad de Markov)**.** *Si X es una v.a. positiva y $a > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Proposición 2 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Para todo $a > 0$ se cumple que*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Teorema 1 (LGN débil)**.** *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (iid). Sea $\mathbb{E}[\mathbb{X}_\daleth] = \mu$ (como la sucesión es iid, todas las v.a.'s X_i tienen la misma esperanza). Sea*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) = 0$$

Teorema 2 (LGN fuerte)**.** *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (iid). Sea $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ (como la sucesión es iid, todas las v.a.'s X_i tienen la misma esperanza). Sea*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(lim_{n\to\infty}\overline{X}_n = \mu) = 1$$

Teorema 3 (Teorema Central del Límite)**.** *Si $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias iid con media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, y $S_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, entonces*

$$Z_n = \frac{(S_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una normal estándar. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

donde Φ es la función de distribución de una $\mathcal{N}(0, 1)$.