FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA3403, Secc. 04, 03/06/22
Prof. R. Gouet, Prof. Aux. V. Salinas

Solución Control #2

1. Un(a) automovilista debe viajar de A a C, pasando por B. Para ir de A a B hay un solo camino que tiene un puente, que puede estar operativo o no (puente cortado). Si el puente está operativo entonces puede viajar de A a B y en caso contrario, el viaje debe aplazarse hasta que sea reparado el puente. Para ir de B a C hay dos caminos: el camino nuevo que tiene dos puentes y el camino viejo, que tiene un puente. Igual que antes, para usar cualquiera de los dos caminos, es necesario que los puentes respectivos estén operativos. Debido a los continuos temblores cada uno de los 4 puentes está operativo probabilidad $p \in (0,1)$. Se sabe también que los puentes son independientes entre si. Se pide calcular (para cualquier p y evaluar los casos particulares $p = 0, 1/2, 1$) la

   a) Probabilidad de realizar viaje de A a C. Evalúe numéricamente para los valores de $p \in \{1, 1/2, 0\}$.

   b) Probabilidad de realizar viaje de A a C, habiendo llegado a B. Evalúe numéricamente para los valores de $p \in \{1, 1/2, 0\}$.

   c) Probabilidad de realizar viaje de A a C, sabiendo que exactamente uno de los 4 puentes está cortado.

   a) (3 pts.) Probabilidad de realizar viaje de A a C. Evalúe numéricamente para los valores de $p \in \{1, 1/2, 0\}$.

   Sol: Sean los sucesos P_i = "el puente i está operativo", para $i = 1, 2, 3, 4$. Suponemos que el punte 1 está entre A y B, que los puentes 2 y 3 están en el camino nuevo entre B y C y que el puente 4 está en el camino viejo, de B a C.

   Tenemos, por enunciado, que los sucesos $P_i, i = 1, \ldots, 4$ son independientes y que $P(P_i) = p, i = 1, \ldots, 4$. Para ir de A a C es necesario que el puente 1 esté operativo y que el camino nuevo o el viejo, entre B y C estén operativos. Esto se puede escribir en términos de los sucesos P_i como sigue, siendo V el suceso "se puede viajar de A a C":

   $$V = P_1 \cap ((P_2 \cap P_3) \cup P_4)).$$

   Usando lo que sabemos sobre los sucesos P_i tenemos

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}((P_2 \cap P_3) \cup P_4)) &= \mathbb{P}(P_1)(\mathbb{P}(P_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_4) - \mathbb{P}(P_2 \cap P_3 \cap P_4)) \\ &= p(p^2 + p - p^3) = p^2(p + 1 - p^2).\end{aligned}$$

   Ilustramos con algunos casos particulares: para $p = 1$ tenemos $\mathbb{P}(V) = 1$, para $p = 1/2, \mathbb{P}(V) = 5/16$ y para $p = 0, \mathbb{P}(V) = 0$.

   b) (3 pts.) Probabilidad de realizar viaje de A a C, habiendo llegado a B. Evalúe numéricamente para los valores de $p \in \{1, 1/2, 0\}$.

   Sol: si ha llegado a B sabemos que P_1 ocurre entonces se pide calcular $\mathbb{P}(V|P_1)$. Tenemos

   $$\mathbb{P}(V|P_1) = \frac{\mathbb{P}(V \cap P_1)}{\mathbb{P}(P_1)} = \frac{\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P_1)} = p(p + 1 - p^2).$$

   Para $p = 1$ tenemos $\mathbb{P}(V|P_1) = 1$, para $p = 1/2, \mathbb{P}(V|P_1) = 5/8$ y para $p = 0, \mathbb{P}(V|P_1) = 0$.

2. Dos amigas, cada una de las cuales posee una moneda equilibrada, se reúnen para practicar el siguiente juego: ambas realizan series de lanzamientos simultáneos e independientes de sus respectivas monedas, hasta que alguna de ellas obtiene cara. Si esto ocurre en el lanzamiento n entonces la ganadora (que primero obtuvo cara) recibe una recompensa de 2^n (unidades). En caso de que ambas obtengan cara al mismo tiempo, en el lanzamiento n, se reparten el premio 2^n. Si R designa la v.a. correspondiente al premio pagado, calcule la función de probabilidad $p_R(r), r \in \mathbb{R}$, y la esperanza $\mathbb{E}(R)$.

   Sol: Consideremos que en cada instante $1, 2, \ldots$ las amigas lanzan independientemente sus monedas y puede ocurrir una de dos situaciones: o bien ambas obtienen sello y el juego continúa, o bien una de ellas obtiene cara y cobran un premio igual a 2^n, siendo n el número del lanzamiento en que por primera vez salió cara. Esta es la situación de una serie de experimentos de Bernoulli independientes, analizada en clase, donde el "éxito" es que alguna de las amigas obtenga cara, lo cual tiene probabilidad 3/4.

   Podemos plantear como espacio muestral el conjunto $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la sucesiones de 0's y 1's, donde 1 es interpretado como "alguna de las amigas obtiene cara" y 0 como "ambas obtienen sellos." Definimos los sucesos A_i ="alguna obtiene cara en el lanzamiento i" y B_n ="la primera vez que alguna obtiene cara ocurre en el lanzamiento n." Entonces, los sucesos A_i son independientes, con probabilidad constante $\mathbb{P}(A_i) = p = 3/4$, y $\mathbb{P}(B_n)$ se calcula con la fórmula del modelo geométrico, es decir,

$$\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{3}{4}.$$

   Notamos, por cierto, que los sucesos B_n y $\{R = 2^n\}$ son equivalentes, de manera que

$$p_R(2^n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{3}{4},\ n = 1, 2, \ldots$$

   y $p_R(r) = 0$ en cualquier otro caso. Notamos también que $D_R = \{2, 4, 8, \ldots\}$.

   Para calcular la esperanza usamos la definición:

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n p_R(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3.$$

3. Considere la ecuación de segundo grado $x^2 + (U+1)x + 1 = 0$, donde U es una v.a. con densidad $f_U(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}, u \in \mathbb{R}$. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos relacionados con las raíces de la ecuación.

   a) (3 pts.) Ambas raíces son reales.

   Sol: Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ambas son reales si $b^2 \geq 4ac$, lo cual es equivalente a $(U+1)^2 \geq 4$. Para simplificar podemos estudiar el suceso complementario (raíces imaginarias) que equivale a $(U+1)^2 < 4$, o bien a

$$-3 < U < 1.$$

   Para concluir calculamos la probabilidad del suceso anterior integrando la densidad f_U en la región correspondiente. Es decir

$$\mathbb{P}(-3 < U < 1) = \int_{-3}^{1} f_U(u)du = \int_{-3}^{1} \frac{1}{2} e^{-|u|} du = \frac{1}{2} \left(\int_{-3}^{0} e^u du + \int_{0}^{1} e^{-u} du \right) = 1 - (e^{-3} + e^{-1})/2.$$

   Por lo tanto, la probabilidad del complemento es

$$\mathbb{P}((U+1)^2 \geq 4) = \frac{e^{-1} + e^{-3}}{2} \sim 0{,}21.$$

b) (3 pts.) La suma de las raíces es mayor que 4.

Sol: La suma de las raíces es $-b/2a = -(U+1)$. Entonces, el suceso de interés se escribe como $-(U+1) > 4$, o bien, como $U < -5$. De lo anterior obtenemos

$$\mathbb{P}(U < -5) = \int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{2} e^{-|u|} du = e^{-5}/2 \sim 0{,}003.$$