MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 10 de junio de 2022

Auxiliar 11: Vectores Aleatorios y Cambios de Variables

P1. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} 1_{\{x>0,y>0\}}$$

a) Calcule $P(X \geq Y \geq 2)$ y $P(2 - Y \geq X \geq Y)$

b) Calcule $E(x)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$ y $E(XY)$

P2. En una tienda de compra y venta de vehículos, se paga una cantidad X por auto y los venden a una cantidad Y, con X, Y v.a.'s que tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y, son independientes?

b) ¿Cuál es el valor esperado de las ganancias por la compra y venta de vehículos?

P3. Sean X, Y v.a.'s con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y \in [0, \infty) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sean $Z = \dfrac{X}{X+Y}$ y $W = X + Y$. Calcule las densidad marginales de Z y W. ¿Son independientes? Calcule $Var(Z)$.

P4. Un auxiliar de MA3403, les pide a sus alumnos dibujar un octavo de circunferencia, posteriormente que escojan algún ángulo θ que este comprendido por este. El punto Y está determinado por la proyección en el eje Y de la intersección entre la recta que pasa por el origen, con pendiente $\tan(\theta)$ y la recta $x = 1$, a partir de la experiencia el ángulo parece estar distribuido uniformemente entre 0 y $\dfrac{\pi}{4}$. Determine la función de densidad de Y, y calcule la esperanza.

Obs: para el caso en se dibuja un cuarto de circunferencia no existe esperanza

Hint: Pruebe que si X, Y son dos v.a. tal que $g(X) = Y$ con g función real invertible y creciente, entonces $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$.

Propuestos

Prop1 Sea X e Y variables aleatorias tales que su densidad es $p(x,y) = \dfrac{e^{-2}}{x!(y-x)!}$ para todo $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \{x, x+1, x+2, ...\}$. Vale 0 en otro punto.

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y

b) Sea $Z = Y - X$. ¿Es X independiente de Z?

Prop2 Suponga que tiene una variable aleatoria X uniforme en $[0, 2\pi]$. Calcule entonces la densidad de $|\sin(X)|$

Definición 1 (Vectores Aleatorios)**.** Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 2 (Funciones marginales)**.** Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_n)\to\infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 3. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X, $pX : R^n \to [0,1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,x_3 \in R} P_X(x)$

Definición 4. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) \int_B f_X(x)dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.
Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \frac{1_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x,y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3$$

$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = f_X(x)$ **Obs:** Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{X\,i}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X\,i}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{X\,i}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$