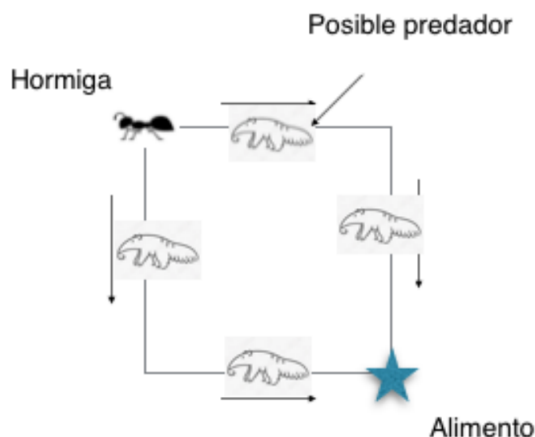


MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 3 de junio de 2022**Auxiliar 10: Repaso C2**

P1. Una hormiga se encuentra en un v´ertice de un cuadrado y necesita llegar al v´ertice opuesto (donde hay alimento), caminando por los lados del cuadrado. El problema es que en cada uno de los lados, con probabilidad p , puede haber un predador de la hormiga, que le impide pasar. La hormiga intenta pasar por donde no haya predadores. Se sabe que los sucesos relativos a la presencia del predador en cada lado son independientes. Calcule la probabilidad de que

- La hormiga llegue a su destino.
- Haya al menos un predador en el cuadrado, sabiendo que la hormiga llega a destino.
- Haya 4 predadores en el cuadrado, sabiendo que la hormiga no llega a destino.



- P2.** Sea Y una v.a. tal que $Y \sim U(0, 5)$, ¿Cuál es la probabilidad de que las soluciones a la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean ambas reales?
- P3.** Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X , con fgm dada por $\varphi_X(t) = e^{3(e^t - 1)}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

Parte 2

- P4.** Un auxiliar de MA3403, les pide a sus alumnos dibujar un octavo de circunferencia, posteriormente que escojan algún ángulo θ que este comprendido por este. El punto Y está determinado por la proyección en el eje Y de la intersección entre la recta que pasa por el origen, con pendiente $\tan(\theta)$ y la recta $x = 1$, a partir de la experiencia el ángulo parece estar distribuido uniformemente entre 0 y $\frac{\pi}{4}$. Determine la función de densidad de Y , y calcule la esperanza.

Obs: para el caso en se dibuja un cuarto de circunferencia no existe esperanza

Definición 1 (Bernoulli). Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0, 1]$ y falla con prob. $1 - p$.

Definición 2 (Binomial). Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0, 1]$ y $1 - p$ de fallar.

$$\begin{aligned} \blacksquare R_X &= \{0, 1, \dots, n\} & \blacksquare \text{Var}[X] &= np(1 - p) \\ \blacksquare \mathbb{E}[X] &= np \end{aligned}$$

Definición 3 (Geométrica). Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1 - p$. Una v.a. geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

$$\begin{aligned} \blacksquare R_X &= \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} & \blacksquare \text{Var}[X] &= \frac{1 - p}{p^2} \\ \blacksquare \mathbb{E}[X] &= \frac{1 - p}{p} \end{aligned}$$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.

Bernoulli $\text{Bern}(p)$

$$P(X = 1) = p \text{ y } P(X = 0) = 1 - p$$

Binomial $\text{Bin}(n, p)$, para $k \in \{0, \dots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Geométrica $\text{Geo}(p)$, para $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Poisson $\text{Pois}(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, \dots\}$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Definición 4 (V.a. continua). Una v.a. X es continua si existe una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
2. Dado $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
3. Dado $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$

4. Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$

Definición 5. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Definición 6. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Definición 7. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** $X \sim U(a, b)$, entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) &= \frac{1}{b - a} & \blacksquare \text{Var}(X) &= \frac{(b - a)^2}{12} \\ \blacksquare \mathbb{E}[X] &= \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

2. **Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ \blacksquare \mathbb{E}[X] &= \mu & \blacksquare \text{Var}(X) &= \sigma^2 \\ \blacksquare \text{Si } X &\sim \mathcal{N}(0, 1), \text{ la llamamos v.a. normal estándar.} \end{aligned}$$

3. **Exponencial:** $X \sim \text{exp}(\lambda)$, entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ \blacksquare \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} & \blacksquare \text{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$