

MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 22 de mayo de 2022**Auxiliar 9: Más Variables Aleatorias**

P1. Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X , con fgm dada por $\varphi_X(t) = e^{3(e^t-1)}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

P2. Considere X v.a. discreta tal que:

$$\mathbb{P}(X = r) = k(1 - \beta)^{r-1} \quad \forall r \in N - \{0\}$$

- a) Qué condiciones debe satisfacer β ?
- b) Determinar la constante k .
- c) Encuentre el valor más probable para X .
- d) Considere $t \in (0, 1)$, $r \in N$ calcule $\mathbb{P}(X > r + t | X \geq r)$.

P3. Un grupo de m personas simultáneamente entra a un ascensor en el piso más bajo (nivel 0) Cada persona aleatoriamente escoge uno de los r pisos $1, 2, 3, \dots, r$ para bajarse, donde cada elección de las personas son independientes unas de otras. El elevador solo para en un piso si al menos una persona quiere bajarse ahí. Si ninguna otra persona entra al ascensor en los pisos $1, \dots, r$. ¿Cual es el valor esperado de cantidad de paradas que hará el ascensor?

P4. Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución de Laplace de parámetros $\mu \in R$ y $b > 0$ si su densidad está dada por: $f_X(x) = Ce^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$, $\forall x \in R$

- a) Calcule el valor de C .
- b) Supongamos $\mu = 0$, ¿Qué variable conocida es $|X|$?
- c) Calcule $E(X)$.
- d) Calcule $Var(X)$.

Definición 1 (Bernoulli). Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0, 1]$ y falla con prob. $1 - p$.

Definición 2 (Binomial). Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0, 1]$ y $1 - p$ de fallar.

- $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$
- $Var[X] = np(1 - p)$
- $\mathbb{E}[X] = np$

Definición 3 (Geométrica). Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1 - p$. Una v.a. geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

- $R_X = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$
- $Var[X] = \frac{1 - p}{p^2}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1 - p}{p}$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.

Bernoulli $Bern(p)$

$$P(X = 1) = p \text{ y } P(X = 0) = 1 - p$$

Binomial $Bin(n, p)$, para $k \in \{0, \dots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Geométrica $Geo(p)$, para $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Poisson $Pois(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, \dots\}$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Definición 4 (V.a. continua). Una v.a. X es continua si existe una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
2. Dado $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
3. Dado $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$

4. Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$

Definición 5. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Definición 6. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Definición 7. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** $X \sim U(a, b)$, entonces

- $f(x) = \frac{1}{b - a}$
- $Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{a + b}{2}$

2. **Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, la llamamos v.a. normal estándar.

3. **Exponencial:** $X \sim exp(\lambda)$, entonces

- $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

P1. Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X , con fgm dada por $\varphi_X(t) = e^{3(e^t-1)}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

Caso poisson (λ) $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right) \lambda$$

$$= \lambda$$

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(e^{tx}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda)^k}{k!} \right) e^{-\lambda}$$

$$\varphi_x(t) = e^{e^t \cdot \lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

P1] $E(G(x)) = ?$

$$E(x^2 + x - 1) = E(x^2) + E(x) - 1$$

$$\varphi_x(t) = E(e^{tx})$$

$$\varphi'_x(t) = E(x \cdot e^{tx}) \Rightarrow \varphi'_x(0) = E(x)$$

$$\varphi''_x(t) = E(x^2 e^{tx}) \Rightarrow \varphi''_x(0) = E(x^2)$$

$$\varphi_x(t) = e^{3(e^t - 1)}$$

$$\varphi'_x(t) = e^{3(e^t - 1)} \cdot 3(e^t)$$

$$\varphi'_x(0) = e^{3(1-1)} \cdot 3e^0 = 3 = E(x)$$

$$\varphi_x''(t) = e^{3(e^t-1)} \cdot [(3e^t)^2 + 3e^t]$$

$$\varphi_x''(0) = 1 \cdot (9) + 3 = 12 = E(x^2)$$

$$\Rightarrow E(g(x)) = 12 + 3 - 1 = \boxed{14}$$

P2. Considere X v.a. discreta tal que:

$$\mathbb{P}(X = r) = k(1 - \beta)^{r-1} \quad \forall r \in N - \{0\}$$

- Qué condiciones debe satisfacer β ?
- Determinar la constante k .
- Encuentre el valor más probable para X .
- Considere $t \in (0, 1)$, $r \in N$ calcule $\mathbb{P}(X > r + t | X \geq r)$.

$$a) \mathbb{P}(X=r) = k(1-\beta)^{r-1}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = k \Rightarrow k \in (0, 1]$$

$$\mathbb{P}(X=2) = k(1-\beta) \Rightarrow \beta \leq 1$$

$$\mathbb{P}(X=r) = k(1-\beta)^{r-1}$$

$$S: \beta < 0 \Rightarrow 1-\beta > 1$$

$$\Rightarrow (1-\beta)^r \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow k(1-\beta)^r \rightarrow \infty$$

$$\ast \boxed{\beta \geq 0}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=r) = 1$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} K(1-\beta)^{r-1} = K \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (1-\beta)^r \Rightarrow \beta \neq 0$$

$$= K \cdot \frac{1}{1-(1-\beta)} = \boxed{\frac{K}{\beta}} = 1$$

b)

$$K = \beta \Rightarrow P(X=r) = \beta (1-\beta)^{r-1} \quad (r \geq 1)$$

c)

$$P(X=1) = \beta \cdot \underset{\text{V}}{1} \Rightarrow \underbrace{P(X=1)}_{\text{as cl. not probable}}$$

$$P(X=2) = \underset{\text{V}}{\beta} (1-\beta)$$

$$P(X=3) = \underset{\text{V}}{\beta} (1-\beta)^2$$

$$P(X=r) = \beta (1-\beta)^{r-1}$$

$$(1-\beta) < 1$$

$$(1-\beta)^2 < (1-\beta) < 1$$

d) $P(X > r+t \mid X \geq r)$

$$\frac{P(X > r+t \mid X \geq r)}{P(X \geq r)} = \frac{P(X > r+t)}{P(X \geq r)}$$

$$= \frac{P(X \geq r+1)}{P(X \geq r)}$$

$$P(X \geq r) = \sum_{k=r}^{\infty} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} \beta (1-\beta)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta (1-\beta)^{k+r-1} = \beta (1-\beta)^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1-\beta)^k$$

$$= \beta (1-\beta)^{r-1} \cdot \frac{1}{1-\beta} = (1-\beta)^{r-1}$$

$$\Rightarrow P(X > r+t | X \geq r) = \frac{(1-\beta)^r}{(1-\beta)^{r-1}} = \boxed{(1-\beta)}$$

P3. Un grupo de m personas simultáneamente entra a un ascensor en el piso más bajo (nivel 0). Cada persona aleatoriamente escoge uno de los r pisos $1, 2, 3, \dots, r$ para bajarse, donde cada elección de las personas son independientes unas de otras. El elevador solo para en un piso si al menos una persona quiere bajarse ahí. Si ninguna otra persona entra al ascensor en los pisos $1, \dots, r$. ¿Cual es el valor esperado de cantidad de paradas que hará el ascensor?

$$P(A_i = j) = \frac{1}{r} \quad , \quad \begin{matrix} j \in \{1, \dots, r\} \\ i \in \{1, \dots, m\} \end{matrix}$$

$$X_j : \text{"Piso en el piso } j" \quad \begin{cases} 1 & \text{por} \\ 0 & \text{no por} \end{cases}$$

$$X = \sum_{j=1}^m X_j = \text{"Nº de pisos donde por"} "$$

$$E(X) = \overset{\text{lineal}}{\sum_{j=1}^m} E(X_j)$$

$P(X_j = 1)$ No es real

$$P(X_j = 0) = P(\text{"Nadie escogió el piso } j\text{"})$$

$$\begin{aligned} P(X_j = 0) &= \left(\frac{r-1}{r}\right)_1 \left(\frac{r-1}{r}\right)_2 \frac{r-1}{r} \cdots \left(\frac{r-1}{r}\right)_m \\ &= \left(\frac{r-1}{r}\right)^m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(X_j = 1) = 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^m$$

$$\begin{aligned} E(X_j) &= 0 \cdot P(X_j = 0) + 1 \cdot P(X_j = 1) \\ &= 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{j=1}^r 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^m$$

$$= r \left[1 - \left(\frac{r-1}{r} \right)^m \right]$$

$$= \frac{r^m - (r-1)^m}{r^{m-1}}$$

$$\boxed{r=2}$$

$$\Rightarrow = \frac{2^m - 1}{2^{m-1}} \approx \frac{2^m}{2^{m-1}} = 2$$

$$\boxed{m=2} = \frac{3}{2}$$

P4. Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ si su densidad es dada por: $f_X(x) = C e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) Calcule el valor de C .

b) Supongamos $\mu = 0$, ¿Qué variable conocida es $|X|$?

c) Calcule $E(X)$.

d) Calcule $Var(X)$.

$$\frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{|x-\mu|}{2b}}$$

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = 1$$

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|z|}{b}} dz$$

$z = x - \mu$
 $dz = dx$

$$= 2C \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{b}} dz$$

$$= 2C \cdot (-b) e^{-\frac{z}{b}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= 2Cb = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2b}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$b) P(|x| < t) = F_{|x|}(t)$$

$$P(|x| < t) \stackrel{s: t \geq 0}{=} P(-t < x < t)$$

$$= \int_{-t}^t \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x|}{b}} dx$$

$$= \int_0^t \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}} dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{b}} \Big|_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{b}}$$

$$\frac{d}{dt} F_{|x|}(t) = f_{|x|}(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{t}{b}} = \lambda e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{1}{b}$$

$$|x| \sim \exp\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx \\
 &\stackrel{z=x-\mu}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (z+\mu) \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{|z|}{b}} dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{b}} e^{-\frac{|z|}{b}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{|z|}{b}} dz \\
 &= \frac{\mu}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|z|}{b}} dz = \frac{\mu}{\sqrt{b}} (-b) e^{-\frac{|z|}{b}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \boxed{\mu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad E(x^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x)^2 \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (z+\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{|z|}{b}} dz
 \end{aligned}$$

$$= \left[\int_0^{\infty} \underbrace{t^2}_{(II)} e^{-\frac{t}{6}} dt + \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{11}{6}}_{(I)} e^{-\frac{t}{6}} dt \right]$$

$$(I) = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t}{6}} dt$$

$$= \frac{1}{6} \left[\cancel{t^2 e^{-\frac{t}{6}} (-6)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2(-6) e^{-\frac{t}{6}} \cdot t dt \right]$$

$$= 2 \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{6}} dt = 2 \left[\cancel{t \cdot e^{-\frac{t}{6}} (-6)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{6}} (-6) dt \right]$$

$$= 26 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{6}} dt = 26(-6) e^{-\frac{t}{6}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \boxed{26^2}$$

$$\textcircled{\text{II}} = \mu^2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{b} dt = \mu^2 \left. e^{-\frac{t}{b}} \left(-\frac{1}{b} \right) \right|_0^{\infty} \\ = \mu^2$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ = 2b^2 + \cancel{\mu^2} - \mu^2 = \boxed{2b^2}$$