FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA3403, Secc. 04, 29/03/22

Prof. R. Gouet, Prof. Aux. V. Salinas

Solución Tarea #1

1. Considere tres urnas rotuladas A, B, C, cada una de las cuales contiene 6 fichas que poseen un cierto valor o puntaje, expresado mediante un número entero positivo. La urna A tiene 5 fichas que valen 3 puntos y una que vale 6; la urna B tiene 5 fichas que valen 4 puntos y una que vale 1; la urna C tiene tres fichas que valen 2 puntos y tres que valen 5.

   Usando las urnas descritas arriba, se desarrolla el siguiente juego: Juan escoge primero una urna y extrae una ficha al azar, luego María escoge una urna (distinta de la escogida por Juan) y también extrae una ficha al azar de dicha urna. Si la ficha de María tiene un valor mayor que la ficha de Juan, entonces María gana la partida. Por el contrario, si la ficha de María es menor que la de Juan, entonces gana Juan (nótese que es imposible empatar).

   a) Calcule la probabilidad de que María gane la partida a Juan, en cada una de las 6 situaciones siguientes: María escoge la urna X y Juan escoge Y, donde $X, Y \in \{A, B, C\}$, con $X \neq Y$.
   Sol: Para cada partida entre María y Juan usamos el espacio Ω de los pares (i, j), con $i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, con cardinal 36, que suponemos equiprobable.
   Basta analizar 3 casos porque, como es evidente, cuando intercambiamos X e Y la probabilidad es simplemente 1 menos la anterior. Suponiendo que María escoge X y Juan escoge Y, el suceso "María le gana a Juan" lo denotamos $X > Y$ y $\mathbb{P}(X > Y)$ es su probabilidad.
      1) Si $X = A, Y = B$ entonces María gana si escoge una ficha que vale 3 y Juan la ficha que vale 1 o bien María escoge la ficha que vale 6 y Juan cualquiera en la urna B. Entonces hay $5 + 6 = 11$ pares (i, j) favorables y la probabilidad es $\mathbb{P}(A > B) = 11/36 < 1/2$ (por lo tanto $\mathbb{P}(B > A) = 25/36 > 1/2$)
      2) Si $X = A, Y = C$ entonces María gana si escoge la ficha que vale 6 y Juan cualquiera en la urna C, o bien, María escoge una que vale 3 y Juan la que vale 2. En total hay $6 + 15$ pares favorables y la probabilidad es $\mathbb{P}(A > C) = 21/36 > 1/2$.
      3) $X = B, Y = C$ entonces María gana si le sale 4 y a Juan 2, para lo cual hay 15 pares y $\mathbb{P}(B > C) = 15/36$ (por lo tanto, $\mathbb{P}(C > B) = 21/36 > 1/2$.)

   b) De las probabilidades calculadas en el apartado anterior, muestre que María siempre puede escoger una urna con la que tiene mayor probabilidad de ganar que Juan. Explique en detalle la estrategia ganadora de María, es decir, qué urna debe escoger ella, cuando Juan ha escogido $X \in \{A, B, C\}$.
   Sol: De los cálculos anteriores se observa que María siempre tiene probabilidad de ganar mayor que la de Juan si sigue la siguiente estrategia: Si Juan escoge A entonces María escoge B y tiene probabilidad $25/36$ de ganar: si Juan escoge B entonces María escoge C y tiene probabilidad $21/36$ de ganar. Finalmente, si Juan escoge C entonces María escoge A y tiene probabilidad $21/36$ de ganar. Es decir, no importa que escoja Juan (primero), siempre María puede escoger una urna tal que su probabilidad de ganar sea mayor que $1/2$.

2. Una empresa alemana produce automóviles diesel, 30 % de los cuales se fabrican en la planta A, 20 % en la planta B y el resto en la planta C. Se sabe que en la planta A el 80 % de los autos tienen un software que falsea las emisiones de contaminantes; en la planta B solo un 60 % tiene este software pero en la planta C, la tasa es 90 %. Suponga que el gobierno federal selecciona un auto de esta marca al azar. Calcule la probabilidad de que

a) El auto no tenga el software.
Sol: Sea $S =$ "el auto tiene el software", $A =$ "viene de la planta A"; $B =$ "viene de la planta B" y $C =$ "viene de la planta C". Sabemos que $P(A) = 0{,}3; P(B) = 0{,}2; P(C) = 0{,}5$. Por otra parte, tenemos las probabilidades condicionales $P(S|A) = 0{,}8; P(S|B) = 0{,}6; P(S|C) = 0{,}9$. Usamos probabilidades totales para calcular $P(S)$:

$$P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) = 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}9 \times 0{,}5 = 0{,}81,$$

de donde obtenemos $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0{,}19$.

b) Que venga de la planta A dado que lo tiene.
Sol: se pide calcular $P(A|S)$. Para ello usamos la fórmula de Bayes:

$$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} = \frac{0{,}8 \times 0{,}3}{0{,}81} = 0{,}296.$$

c) Que tenga el software y provenga de la planta C.
Sol: se pide calcular $P(S \cap C)$. Usando la fórmula para la intersección tenemos

$$P(S \cap C) = P(S|C)P(C) = 0{,}9 \times 0{,}5 = 0{,}45.$$

d) Que no venga de la planta B sabiendo que no tiene el software.
Sol: se pide $P(\overline{B}|\overline{S})$. Calculamos

$$P(B|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|B)P(B)}{P(\overline{S})} = \frac{(1 - P(S|B))P(B)}{1 - P(S)} = \frac{(1 - 0{,}6) \times 0{,}2}{0{,}19} = 0{,}42,$$

de donde obtenemos $P(\overline{B}|\overline{S}) = 1 - P(B|\overline{S}) = 0{,}58$.

3. Un dado clásico y equilibrado de 6 caras se lanza n veces. Calcule la probabilidad de que

a) Todos los números 1 a 6 salgan al menos una vez.
Sol: Consideremos el espacio equiprobable Ω de todas las n-tuplas de números entre 1 y 6 o, de manera equivalente, las funciones de $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ en $B = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Tenemos entonces que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega| = 1/6^n$. Sea S el suceso de interés. Entonces, si $n < 6$, se tiene $S = \emptyset$ y así, $\mathbb{P}(S) = 0$.
Supongamos entonces que $n \geq 6$. En tal caso S corresponde al conjunto de funciones epiyectivas de A en B, cuyo cardinal se calcula con la fórmula (23) del apunte, que en el contexto de este ejercicio se escribe como

$$|\mathcal{E}| = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6 - k)^n.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{6^n} \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6 - k)^n.$$

Por ejemplo, si $n = 10$, $\mathbb{P}(S) = 0{,}27$; si $n = 30$, se tiene $\mathbb{P}(S) = 0{,}98$. A partir de $n = 13$ lanzamientos conviene apostar que todos los números del dado han salido.

b) Nunca salga el 2.
Sol: El suceso de interés S contiene las n-tuplas que no contienen al 2 y su cardinal es $|S| = 5^n$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(S) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Por ejemplo, si $n = 10$, $\mathbb{P}(S) = 0{,}16$; si $n = 30$, se tiene $\mathbb{P}(S) = 0{,}004$.

c) Solo salgan números pares.

Sol: El suceso de interés S contiene las n-tuplas que solo contienen al 2,4,6 y su cardinal es $|S| = 3^n$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(S) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Por ejemplo, si $n = 10$, $\mathbb{P}(S) = 0{,}001$; si $n = 30$, se tiene $\mathbb{P}(S) = 9 \times 10^{-10}$.

4. Ejercicio combinatorial.

a) Un estudiante debe rendir una prueba que consta de 7 preguntas y en cada una de la cuales puede obtener entre 0 y 5 puntos (valores enteros). Calcule el número de maneras en que puede obtener un puntaje total de 10.

Sol: Sea x_i el puntaje de la pregunta $i, i = 1, \ldots, 7$. Entonces $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y se pide que $\sum_{i=1}^{7} x_i = 10$. El problema es averiguar cuántas soluciones tiene dicha ecuación. Por ejemplo $x_1 = x_2 = 5, x_i = 0, i = 3, \ldots, 7$ es una solución.

Para resolver el problema podemos razonar como si fuera un problema de 7 urnas distinguibles, donde hay que distribuir 10 bolitas indistinguibles, de tal manera que algunas urnas pueden estar vacías y todas deben tener como máximo 5 bolitas.

Sabemos que el número de maneras de distribuir b bolitas indistinguibles en u urnas distinguibles es

$$\binom{u+b-1}{u-1}.$$

En nuestro caso, $u = 7, b = 10$, y tenemos $\binom{7+10-1}{6} = 8008$ maneras de obtener el puntaje 10 en 7 preguntas pero esta cantidad incluye soluciones como $x_1 = 10, x_2 = \cdots = x_7 = 0$, que no son admisibles.

Para determinar el cardinal del conjunto de configuraciones (soluciones) admisibles, contamos el complemento y lo restamos del total, es decir, contamos cuántas configuraciones hay que tengan alguna urna con más de 5 bolitas.

Sea $A_i, i = 1, \ldots, 7$ el conjunto de configuraciones tales que la urna i tiene más de 5 bolitas. Entonces

$$A = \bigcup_{i=1}^{7} A_i$$

es el conjunto de configuraciones que tienen una o más urnas con más de 5 bolitas.

Para calcular $|A|$ notamos que, si $i \neq j$, se tiene $A_i \cap A_j = \emptyset$ puesto que es imposible que dos urnas tengan más de 5 bolitas siendo 10 el total de bolitas. Por lo tanto, usando el principio de la suma para los cardinales, tenemos

$$|A| = \sum_{i=1}^{7} |A_i|.$$

Por otra parte, es claro que los cardinales $|A_i|$ son iguales ya que no hay condiciones especiales relacionadas con el número de la urna, entonces $|A| = 7|A_1|$.

Ahora evaluamos $|A_1|$, definiendo los conjuntos B_j, de las configuraciones tales que la urna 1 tiene exactamente j bolitas y las demás urnas se reparten las $10 - j$ restantes, donde $j = 6, \ldots, 10$. Resulta entonces que $|B_j|$ es igual al número de maneras de distribuir $b = 10 - j$ bolitas en $u = 6$ urnas, es decir

$$|B_j| = \binom{6+10-j-1}{5} = \binom{15-j}{5}.$$

Notando que los conjuntos B_j son evidentemente disjuntos, resulta que

$$|A_1| = \sum_{j=6}^{10} |B_j| = \sum_{j=6}^{10} \binom{15-j}{5} = 210,$$

de donde obtenemos $|A| = 7|A_1| = 1470$ y llegamos al resultado final restando este valor del número total de configuraciones, es decir,

$$\binom{16}{6} - |A| = 8008 - 1470 = 6538.$$

b) Se extraen tres cartas al azar de un naipe inglés con 52 cartas. Calcule la probabilidad de obtener al menos dos cartas de la misma pinta.

Sol: El espacio muestral que proponemos es el de todos los subconjuntos de tamaño 3 de $\{1, ..., 52\}$, donde este último representa a las cartas y el primero las manos de 3 cartas. Usamos también equiprobabilidad puesto que nada nos hace pensar que una mano tenga más probabilidad que otra. Por lo tanto, todo se reduce a calcular la cantidad de subconjuntos de 3 cartas tales 2 o 3 cartas son de la misma pinta[1], denotamos por A este suceso. Con estas definiciones, $|\Omega| = \binom{52}{3} = 22100$ y $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$.

Para estudiar A consideramos el caso en que las 3 cartas son de la misma pinta (por ejemplo, $\{AT, 4T, KT\}$), correspondiente al suceso B, y el caso en que hay dos cartas de la misma pinta y una tercera, de otra pinta (por ejemplo $\{4C, QC, AT\}$), correspondiente al suceso C. Entonces $A = B \cup C$, con $B \cap C = \emptyset$. Para calcular $|B|$ debemos tomar en cuenta que hay 4 pintas, cada una con 13 cartas, y que hay $\binom{13}{3}$ maneras de escoger 3 cartas de una pinta dada. Así tenemos

$$|B| = 4\binom{13}{3} = 1144.$$

El suceso C lo podemos descomponer como unión sucesos disjuntos, según la pinta que se repite y la pinta distinta. Por ejemplo, podemos considerar todas las manos de 3 cartas con dos corazones y un trébol y tal suceso tiene cardinal $\binom{13}{2}\binom{13}{1}$. Este resultado es independiente de las pintas que escojamos, es decir, da igual dos corazones y un trébol que dos diamantes y un corazón.

Por otra parte, hay 4 maneras de escoger la pinta que se repite y 3 maneras de escoger la pinta distinta, lo cual nos lleva a concluir que C se descompone en $4 \times 3 = 12$ sucesos disjuntos y que

$$|C| = 12\binom{13}{2}\binom{13}{1} = 12168.$$

Finalmente,

$$|A| = |B| + |C| = 4\binom{13}{3} + 12\binom{13}{2}\binom{13}{1} = 13312$$

y

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13312}{22100} = \frac{256}{425} = 0{,}60.$$

Como método alternativo podemos calcular el cardinal del complemento $\bar{A}$, que corresponde a todas las manos de tres cartas distintas. Para calcular $\bar{A}$ debemos descomponer según la pinta

[1]Denotamos las pintas por P,D,C,T y los valores por A,2,...,10,J,Q,K. Así, por ejemplo, el as de trébol es AT, el rey de diamante es KD, etc.

que no está presente en el trío y luego notar que las 3 cartas de distinta pinta se pueden escoger de $13 \times 13 \times 13 = 13^3$ maneras. Así resulta

$$|\bar{A}| = 4 \times 13^3 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{4 \times 13^3}{\binom{52}{3}} = \frac{256}{425}.$$

c) Una urna contiene 15 bolitas de 5 colores distintos: 3 azules, 3 blancas, 3 rojas, 3 verdes, 3 negras. Se extraen 6 bolitas al azar (sin reposición). Calcule la probabilidad de que el conjunto seleccionado contenga las 3 blancas o las 3 negras.

Sol: Consideramos como espacio Ω equiprobable a la colección de todos los subconjuntos o muestras de tamaño 6 del conjunto $\{1, 2, \dots, 15\}$, cuyo cardinal es $|\Omega| = \binom{15}{6} = 5005$. Sea A el suceso "la muestra contiene las 3 bolitas blancas" y B el suceso "la muestra contiene las 3 bolitas negras". Se pide calcular $\mathbb{P}(A \cup B)$, para lo cual disponemos de la fórmula

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Notemos que $A \cap B$ corresponde la una única muestra, compuesta de 3 bolitas blancas y tres negras, es decir, $|A \cap B| = 1$.

Para calcular $|A|$ razonamos calculamos las opciones que tenemos par escoger una muestra que tenga las 3 bolitas blancas: dado que las 3 blancas están en la muestra, queda por escoger las otras tres, entre las 12 restantes, lo cual puede hacerse de $\binom{12}{3}$ maneras. El mismo razonamiento aplica para determinar $|B|$ y tenemos, finalmente

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2\binom{12}{3} - 1 = 439,$$

de donde se obtiene $\mathbb{P}(A \cup B) = 439/5005 = 0{,}088$.

5. Un grupo de n personas (distinguibles) se distribuyen al azar en $m \le n$ habitaciones (distinguibles), sin restricciones de ocupación. Es decir, cada habitación puede contener ya sea a todas las personas o bien, quedar vacía. Calcule las probabilidades[2] de los siguientes sucesos y evalúe numéricamente el caso $n = 20, m = 5$ (usando un software apropiado si lo estima necesario) :

a) No hay ninguna habitación vacía.

Sol: Definimos como espacio Ω equiprobable al conjunto de las funciones de $A = \{1, \dots, n\}$ en $B = \{1, \dots, m\}$, cuyo cardinal es $|B|^{|A|} = m^n$. El suceso de interés S corresponde al subconjunto de Ω de las funciones epiyectivas de A en B, cuyo cardinal se presenta en la fórmula (23) del apunte, notando que los roles de m y n se intercambian. Tenemos entonces

$$|S| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(S) = \frac{1}{m^n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Evaluamos numéricamente el caso $n = 20, m = 5$ y obtenemos

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{5^{20}} \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)^{20} = 0{,}94.$$

b) La habitación 1 queda vacía; la habitación 1 es la única vacía; hay exactamente una habitación vacía.

[2]Se sugiere usar como espacio equiprobable Ω al conjunto de todas las funciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, m\}$.

Sol: El suceso V_1 ="la habitación 1 queda vacía" corresponde a las funciones en Ω que no tienen el valor 1 como imagen, o bien, n-tuplas donde no aparece el 1. Ese suceso tiene cardinal $(m-1)^n$ y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}(V_1) = \frac{(m-1)^n}{m^n} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n.$$

Evaluamos numéricamente el caso $n = 20, m = 5$ y obtenemos

$$\mathbb{P}(V_1) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20} = 0{,}01.$$

Por otra parte, el suceso U_1 ="la habitación 1 es la única vacía" corresponde a las funciones en Ω que no tienen el valor 1 como imagen y que tienen todos los demás valores, o bien, n-tuplas donde no está el 1 pero si están todos los demás valores. Este suceso se puede identificar con la colección de funciones epiyectivas de A en $\{2, \ldots, m\}$, cuyo cardinal es

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (m-1-k)^n.$$

De lo anterior se deduce que

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{m^n} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (m-1-k)^n$$

y, para el caso $n = 20, m = 5$ resulta

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{5^{20}} \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} (4-k)^{20} = 0{,}01.$$

Finalmente, sea E_1 ="hay exactamente una habitación vacía". Es claro que E_1 puede escribirse como unión de los sucesos U_j ="la habitación j es la única vacía", donde $j = 1, \ldots, m$. Notando que todos los U_j tienen la misma probabilidad y que son disjuntos dos a dos, llegamos a

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(E_j) = m\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{m^{n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (m-1-k)^n.$$

En el caso particular $n = 20, m = 5$, resulta $\mathbb{P}(E_1) = 5\mathbb{P}(U_1) = 0{,}05$.

c) Las habitaciones 1 y 2 quedan vacías; las habitaciones 1 y 2 son las únicas vacías; hay exactamente dos habitaciones vacías.

Sol: Aquí razonamos como en el apartado anterior pero teniendo en cuenta que las habitaciones 1 y 2 deben estar vacías.

El suceso V_{12} ="las habitaciones 1 y 2 quedan vacías" corresponde a las funciones en Ω que no tienen el valor 1 ni 2 como imagen, o bien, n-tuplas donde no aparece ni el 1 ni el 2. Ese suceso tiene cardinal $(m-2)^n$ y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}(V_{12}) = \frac{(m-2)^n}{m^n} = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n.$$

Evaluamos numéricamente el caso $n = 20, m = 5$ y obtenemos

$$\mathbb{P}(V_{12}) = \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{20} = 0{,}000037.$$

Por otra parte, el suceso $U_{12}=$"la habitaciones 1 y 2 son las únicas vacías" corresponde a las funciones en Ω que no tienen los valores 1,2 como imagen y que tienen todos los demás valores, o bien, n-tuplas donde no está el 1,2 pero si están todos los demás valores. Este suceso se puede identificar con la colección de funciones epiyectivas de A en $\{3,\ldots,m\}$, cuyo cardinal es

$$\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\binom{m-2}{k}(m-2-k)^n.$$

De lo anterior se deduce que

$$\mathbb{P}(U_{12})=\frac{1}{m^n}\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\binom{m-2}{k}(m-2-k)^n$$

y, para el caso $n=20, m=5$ resulta

$$\mathbb{P}(U_{12})=\frac{1}{5^{20}}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{k}(3-k)^{20}=0{,}000037.$$

Finalmente, sea $E_2=$"hay exactamente dos habitaciones vacías". Es claro que E_2 puede escribirse como unión de los sucesos $U_{ij}=$"las habitaciones i,j son las únicas vacías", donde $i\neq j, i,j=1,\ldots,m$. Notando que todos los U_{ij} tienen la misma probabilidad y que son disjuntos dos a dos, llegamos a

$$\mathbb{P}(E_2)=\sum_{i\neq j=1}^{m}\mathbb{P}(E_{ij})=\binom{m}{2}\mathbb{P}(U_{12})=\frac{m-1}{2m^{n-1}}\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\binom{m-2}{k}(m-2-k)^n.$$

En el caso particular $n=20, m=5$, resulta $\mathbb{P}(E_2)=10\mathbb{P}(U_{12})=0{,}00037$

d) Hay exactamente k habitaciones vacías, con $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$.

Sol: Sea E_k el suceso de interés. En los apartado anteriores hemos resuelto los casos $k=0,1,2$, que sugieren la estrategia del caso general. Definimos el suceso $U_S=$"las habitaciones del conjunto $S\subseteq\{1,\ldots,m\}$, son las únicas vacías", cuyo cardinal es

$$\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^j\binom{m-k}{j}(m-k-j)^n,$$

donde $|S|=k\leq m-1$. Para considerar todas los subconjuntos de tamaño k multiplicamos por $\binom{m}{k}$ para llegar a la probabilidad

$$\mathbb{P}(E_k)=\frac{\binom{m}{k}}{m^n}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^j\binom{m-k}{j}(m-k-j)^n.$$

En el caso particular $n=20, m=5$, resulta $\mathbb{P}(E_3)=1{,}1\times 10^{-7}$.