

MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 6 de mayo de 2022**Auxiliar 8: Variables Aleatorias**

- P1. [Paseo Aleatorio]** Suponga que un borrachito da un paso a la derecha con probabilidad $p \in (0, 1)$ y un paso a la izquierda con probabilidad $1 - p$. Para modelar la trayectoria que sigue el borrachito supondremos que se posiciona sobre un número entero, comenzando en el origen. Encuentre la probabilidad de que caiga en la posición $k \in \mathbb{Z}$ luego de $n \in \mathbb{N}$ saltos. Deduzca la función de probabilidad de la posición del borrachito.
- P2.** Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1 - p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.
- Indique la función p_X de la variable X correspondiente al número de cultivos que proliferan.
 - Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que proliferó inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1 - q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?
- P3.** La adivina Solanda Yultana quiere demostrar su poder predictivo proponiendo el siguiente juego a las personas que tienen exactamente dos hijos (de cualquier sexo). Ella les hace la pregunta “Dime el nombre de una hija tuya”. Si la persona responde “No tengo hijas” entonces no hay nada que adivinar y se acaba el juego sin un ganador. En cambio, si responde un nombre, Solanda intenta adivinar el sexo del otro hijo o hija. Si acierta, la persona le da \$1000 a Solanda y si no acierta, es Solanda quien entrega \$1000 a la persona. Si Solanda en realidad siempre dice “tu otro hijo es un hombre”, ¿cuál es la ganancia esperada de la adivina en cada adivinanza? ¿Y su varianza? (Suponga que para todas las personas de dos hijos la probabilidad de que cada hijo sea de sexo masculino es $1/2$ independiente del sexo del otro hijo).
- P4.** Sea X v.a. con una función de densidad:
- $$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$
- Encuentre el valor de c
 - Calcule $P(X \geq \frac{1}{2})$
 - Calcule $P(X = \frac{1}{2})$
 - Calcule $E(X)$ y $Var(X)$
- P5.** Sea $\lambda > 0$, considere X v.a. absolutamente continua, con densidad $f_X(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$.
- Pruebe que $|X| \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.
 - Sea $Y = \text{signo}(X)$. Pruebe que $Y \sim \text{Bernoulli}(1/2)$.

Propuestos

- Un jugador de emboque Amateur va a participar en un Torneo de Emboque Amateur del barrio. Para ello compró con anticipación 5 emboques aparentemente idénticos y los usó por varios meses hasta que escogió aquél con mejores resultados. Así con el emboque “regalón” la probabilidad de acierto de cualquier lanzamiento es $3/4$, en cambio para los restantes cuatro emboques esta probabilidad es sólo $1/3$. El día del campeonato vió con estupor que la noche anterior había guardado el emboque regalón junto con los otros emboques, por lo que no era capaz de distinguirlos. Desesperado y atrasado, escoge uno de ellos al azar y se va al campeonato.
- Si para ganar el campeonato necesita hacer al menos 8 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que gane el campeonato?
 - Si gana obteniendo 9 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente escogido su emboque regalón?

2. Se ha observado que el volumen por hora de agua radiactiva que expulsa una planta nuclear, expresado en m^3 , se puede modelar como una v.a. absolutamente continua (con densidad de probabilidad continua). Su densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ B(1-x) & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro } x \end{cases}$$

- a) Determine la condición que deben satisfacer los parámetros $A, B > 0$ para que f_X sea una función de densidad.
b) Obtenga la función de distribución F_X .
c) Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

Definición 1 (Bernoulli). Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0, 1]$ y falla con prob. $1 - p$.

Definición 2 (Binomial). Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0, 1]$ y $1 - p$ de fallar.

- $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$
- $Var[X] = np(1 - p)$
- $\mathbb{E}[X] = np$

Definición 3 (Geométrica). Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1 - p$. Una v.a. geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

- $R_X = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$
- $Var[X] = \frac{1 - p}{p^2}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1 - p}{p}$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.

Bernoulli $Bern(p)$

$$P(X = 1) = p \text{ y } P(X = 0) = 1 - p$$

Binomial $Bin(n, p)$, para $k \in \{0, \dots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Geométrica $Geo(p)$, para $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Poisson $Pois(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, \dots\}$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Definición 4 (V.a. continua). Una v.a. X es continua si exista una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
2. Dado $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
3. Dado $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$

4. Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$

Definición 5. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Definición 6. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Definición 7. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** $X \sim U(a, b)$, entonces

- $f(x) = \frac{1}{b - a}$
- $Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{a + b}{2}$

2. **Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, la llamamos v.a. normal estándar.

3. **Exponencial:** $X \sim \exp(\lambda)$, entonces

- $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$